Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

К ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Н. А. Ростовцев

(Комсомольск-на-Амуре)

Уравнения равновесия изотропной неоднородной среды, в пределах которой модули упругости являются отличными от постоянной дифференцируемыми функциями точки, а коэффициент Пуассона ν — постоянное число, исследуются в отношении применимости методов разделения переменных и интегральных преобразований. Дано уравнение функции напряжений в изотермических координатах и некоторые его применения. В пространственной задаче найдены условия возможности радиального распределения напряжений. Особо изучается случай степенной зависимости модуля упругости от одной декартовой координаты. В этом случае установлено, что фундаментальными функциями плоской задачи о полосе будут некоторые конфлюэнтные гипергеометрические функции. Рассмотрено применение метода Фурье в пространственных задачах, главным образом — в осесимметричной. Дан прием вычисления решения задачи Буссинека по известному решению задачи Фламана. Для того случая степенной зависимости, когда задача Фламана имеет точное решение, указывается точное решение задачи Буссинека.

1. В плоской задаче для неоднородной изотропной среды, коэффициент Пуассона которой есть постоянное число, при отсутствии массовых сил и термических напряжений, уравнение функции напряжений Эри F имеет вид [1]

$$(1-\nu)\triangle(m\triangle F)=\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 m}{\partial y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 m}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \qquad (1.1)$$

$$m=\frac{1}{2\mu},\qquad \mu=G,\qquad \triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Оно выводится подстановкой выражений деформаций

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}=m\left[-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+(1-\nu)\triangle F\right],\qquad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}=m\left[-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+(1-\nu)\triangle F\right]$$

$$e_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=-2m\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \qquad (1.2)$$

в условие совместности. Запись (1.1) относится к состоянию плоской деформации. Для перехода к плоскому напряженному состоянию надлежит заменить ν на $\nu^*=\nu/(1+\nu)$. Это уравнение является уравнением Эйлера вариационной задачи для функционала

$$J=\iint m\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{1}{2}(1-\nu)(\triangle F)^2\right]dx\,dy \qquad (1.3)$$

Как это следует из начала Кастильяно и может быть проверено непосредственным вычислением, выражение в правой части (1.1) представляет совместный инвариант двух тензоров напряжений, определяемых функциями F, m (F — истинные напряжения, m — фиктивные).

Поэтому в изотермических ортогональных координатах

$$\xi + i\eta = \zeta, \qquad \zeta = f(z), \qquad \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = h, \qquad \triangle = h^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)$$

уравнение (1.1) принимает вид

$$(1 - \nu) \triangle (m\triangle F) = D_{\xi\xi} m D_{\eta\eta} F + D_{\eta\eta} m D_{\xi\xi} F - 2D_{\xi\eta} m D_{\xi\eta} F \tag{1.4}$$

где D — операторы, выражающиеся формулами

$$D_{\xi\xi} = h^2 \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + h\left(\frac{\partial h}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial h}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \qquad D_{\eta\eta} = h^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + h\left(\frac{\partial h}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{\partial h}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

$$D_{\xi\eta} = h^2 \frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta} + h\left(\frac{\partial h}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{\partial h}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\right) \tag{1.5}$$

Для напряжений имеем [2]

$$\sigma_\eta = D_{\xi\xi} F, \qquad \sigma_\xi = D_{\eta\eta} F, \qquad \tau_{\xi\eta} = -D_{\xi\eta} F \tag{1.6}$$

В полярных координатах $\xi = \ln r$, $\eta = \varphi$ будет

$$(1 - \nu) e^{2\xi}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\left[e^{-2\xi} m \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right) F\right] = \left(\frac{\partial^2 m}{\partial\eta^2} + \frac{\partial m}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} - \frac{\partial F}{\partial\xi}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 m}{\partial\xi^2} - \frac{\partial m}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2} + \frac{\partial F}{\partial\xi}\right) - 2\left(\frac{\partial^2 m}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial m}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial F}{\partial\eta}\right) \tag{1.7}$$

Если в уравнениях (1.1) и (1.7) положить

$$m = m_0 e^{\alpha x + \beta y} \tag{1.8}$$

$$m = m_0 e^{\alpha\xi + \beta\eta} = m_0 r^\alpha e^{\beta\varphi} \tag{1.9}$$

то получаются уравнения с постоянными коэффициентами, что значительно упрощает постановку и решение задач.

Некоторые задачи для модуля типа (1.8) уже решались [3]. В общем же случае уравнение (1.4) не допускает разделения переменных.

2. Теория упругости неоднородной среды выдвигает задачу нахождения распределения материальных постоянных, допускающего заданное напряженное состояние. Впервые такая задача была поставлена и решена С. Г. Лехницким для радиального напряженного состояния [4]. В цитируемой работе задача решается без использования функции напряжений. Полученное решение не будет общим в смысле теории уравнений с частными производными. Дадим решение, общее в указанном смысле. Имеем

$$\sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = 0, \qquad F = r\Phi(\varphi), \qquad \sigma_r = \frac{1}{r}(\Phi + \Phi'') \tag{2.1}$$

При этих условиях уравнение (1.6) приводится к виду

$$\triangle\left(\frac{\Psi}{r}\right) = \frac{1}{(1-\nu) r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}, \qquad \Psi = (\Phi + \Phi'') m \tag{2.2}$$

Это уравнение имеет частное решение, содержащее произвольный параметр

$$\Psi = r^\alpha (A \cos n\varphi + B \sin n\varphi)$$

$$n = n(\alpha) = \sqrt{(1 - \alpha)\,[1 + \alpha\nu / (1 - \nu)]} \tag{2.3}$$

Следовательно, общее решение в произвольных функциях представляется интегралом Стильтьеса

$$\Psi = \int r^{\alpha} \, [\cos \varphi n \, (\alpha) \, df \, (\alpha) + \sin \varphi n \, (\alpha) \, dg \, (\alpha)] \tag{2.4}$$

в котором $f(\alpha)$, $g(\alpha)$ — произвольные функции. Решение, данное в работе [4], получается отсюда, если в качестве $f(\alpha)$, $g(\alpha)$ взять ступенчатые функции. В той же работе указано, что степенная зависимость модуля упругости $\mu = Ky^k$ от декартовой координаты y входит в это семейство решений. Оно получается при $\alpha = -k$ в формулах (2.3). Формулы перемещений в цитируемой работе отсутствуют. Приводим здесь соответствующие результаты для полупространства, к границе которого приложена сосредоточенная нормальная сила P (задача Фламана)

$$\sigma_r = -CPr^{-1} (\sin \varphi)^k \cos q \, (^1/_2\pi - \varphi) \tag{2.5}$$

$$C = \left[\int_0^{\pi} (\sin \varphi)^{k+1} \cos q \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi\right]^{-1} = \tag{2.6}$$

$$= \frac{2^{1+k}\Gamma \, [1 + {}^1/_2 \, (1 + k + q)] \, \Gamma \, [1 + {}^1/_2 \, (1 + k - q)]}{\pi \Gamma \, (2 + k)}$$

$$u_r = \frac{(1 - \nu) \, CP}{2Kk} \frac{1}{r^k} \cos q \left(\frac{1}{2} \pi - \varphi\right), \quad u_\varphi = \frac{(1 - \nu) \, qCP}{2Kk \, (1 + k)} \frac{1}{r^k} \sin q \left(\frac{1}{2} \pi - \varphi\right) \tag{2.7}$$

$$q = \sqrt{(1 + k) \, [1 - k\nu \, / \, (1 - \nu)]}$$

Следовательно, при $y = 0$ вертикальное перемещение будет

$$v \, (x) = \frac{\vartheta \, (\nu, \, k)}{k} \, | \, x \, |^{-k}, \qquad \vartheta \, (\nu, \, k) = \frac{(1 - \nu) \, qCP}{2K \, (1 + k)} \sin \frac{\pi q}{2} \tag{2.8}$$

Постановка задачи о действии распределенной нагрузки $p(x)$ имеет смысл при $0 \leqslant k < 1$. Тогда

$$v \, (x) = \frac{\vartheta \, (\nu, \, k)}{k} \int p \, (\xi) \, | \, x - \xi \, |^{-k} d\xi \tag{2.9}$$

где интеграл берется по совокупности загруженных участков. При $k = 0$ модуль упругости становится постоянным, $\mu = K$, и уравнение переходит в уравнение контактной задачи для однородной полуплоскости [5]

$$v \, (x) = \vartheta \int p \, (\xi) \lg \frac{1}{|x - \xi|} d\xi + \text{const}, \qquad \vartheta = \vartheta \, (\nu, \, 0) = \frac{2 \, (1 - \nu^2)}{\pi E}$$

Вычислив таким же способом перемещения от действия касательной нагрузки, приложенной на границе, можно получить вместо одного уравнения (2.9) систему уравнений относительно распределенных нормальной и касательной нагрузок $p(\xi)$, $t(\xi)$. Это сделано в работе Л. А. Галина [6], где доказана и единственность решения задачи о сосредоточенной силе, что важно, так как в этом случае граница $y = 0$ будет особой линией.

3. Возникновение особенности связано в данном случае с физической нереальностью такой неоднородной среды. Это же обстоятельство влечет и другое последствие — ограничения возможных значений показателя k

в формуле степенного закона. Это значительно затрудняет его применение в качестве интерполяционной формулы, моделирующей основание. В создании реактивного давления основной вклад принадлежит слоям, близким к поверхности, но как раз в этой области интерполяционная формула плохо соответствует действительности. В то же время степенная формула — одна из простейших, наряду с показательной. Поэтому представляет интерес равновесие упругой полосы, у которой неоднородность по высоте описывается степенным законом, но линия $y = 0$ находится вне полосы или на том краю, где полоса становится бесконечно жесткой, переходя в такое же полупространство. Покажем, что это не влечет существенных усложнений задачи в сравнении с задачами о полупространстве, состоящем из однородных слоев, или с неоднородностью, описываемой показательным законом. Действительно, при $m = Cy^{-k}$ уравнение (1.1) дает

$$\triangle (y^{-k}\triangle F) = \frac{k(1+k)}{1-\nu} y^{-k-2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

Представляя $F(x, y)$ интегралом Фурье

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(y, \xi)\, d\xi \tag{3.2}$$

после очевидных преобразований получаем (3.3)

$$y^2 \left(\frac{d^2}{dy^2} - \xi^2\right)^2 - 2ky\left(\frac{d^2}{dy^2} - \xi^2\right)\frac{df}{dy} + k(1+k)\frac{d^2 f}{dy^2} + h\xi^2 f = 0 \qquad \left(h = \frac{\nu k(1+k)}{1-\nu}\right)$$

Это уравнение запишем в безразмерной форме, положив $\eta = \xi y$; имеем

$$\eta^2\left(\frac{d^2}{d\eta^2} - 1\right) f - 2k\eta\left(\frac{d^3}{d\eta^3} - \frac{d}{d\eta}\right) f + k(1+k)\frac{d^2 f}{d\eta^2} + hf = 0 \tag{3.4}$$

Представим решение этого уравнения интегралом Лапласа

$$f(\eta) = \int e^{\eta t}\varphi(t)\, dt \tag{3.5}$$

взятым по контуру, выбранному надлежащим образом [7]. После интегрирования по частям и приведений получаем уравнение

$$\begin{gathered}(t^2-1)^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2(k+4)(t^2-1)\,t\frac{d\varphi}{dt} + \\ + [(k+3)(k+4) + h - 2k - 4]\,\varphi = 0\end{gathered} \tag{3.6}$$

Это уравнение с правильными особыми точками $t = -1, 1, \infty$. Вычисление показателей дает схему общего решения

$$\varphi(t) = P\begin{Bmatrix} 1 & -1 & \infty & \\ -{}^1\!/_2(3+k-q) & -{}^1\!/_2(3+k-q) & 3+k, & t \\ -{}^1\!/_2(3+k+q) & -{}^1\!/_2(3+k+q) & 4+k & \end{Bmatrix}$$

Подстановка $2u = 1 - t$ приводит элементы верхней строки к нормальной форме $(0, 1, \infty)$. За независимые частные решения можно принять гипергеометрические функции

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= [u(1-u)]^{-{}^1\!/_2(3+k)+{}^1\!/_2 q}\,{}_2F_1(q, q+1; u)\\ \varphi_2 &= [u(1-u)]^{-{}^1\!/_2(3+k)+{}^1\!/_2 q}\,u^{-q}\,{}_2F_1(0, 1; 1-q; u)\end{aligned} \tag{3.7}$$

которые, очевидно, приводятся к элементарным

$$\varphi_1 = u^{-1/2(3+k)+1/2q}(1-u)^{-1/2(3+k)-1/2q}, \quad \varphi_2 = u^{-1/2(3+k)-1/2q}(1-u)^{-1/2(3+k)+1/2q} \tag{3.8}$$

Внося эти выражения в интеграл Лапласа (3.5), находим, что независимые частные решения (3.4) будут [7] конфлюэнтными гипергеометрическими функциями, $\Phi(a; c; z)$, $\Psi(a; c; z)$, где $a = -{}^1/_2(1+k) + {}^1/_2 q$, $c = -(1+k)$, $z = 2\eta$ с дополнительным множителем $e^{-\eta}$. Общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} f(\eta) = e^{-\eta}\{&C_1\Phi(-{}^1/_2(1+k) + {}^1/_2 q; -(1+k); 2\eta) + \\ &+ C_2\Psi(-{}^1/_2(1+k) + {}^1/_2 q; -(1+k); 2\eta) + \\ &+ C_3\Phi(-{}^1/_2(1+k) - {}^1/_2 q; -(1+k); 2\eta) + \\ &+ C_4\Psi(-{}^1/_2(1+k) - {}^1/_2 q; -(1+k); 2\eta)\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

или, преобразуя к функциям Уиттекера,

$$\begin{aligned} f(\eta) = \eta^{1/2+1/2k}\{&C_1 M_{-1/2q,\,-1-1/2k}(2\eta) + C_2 W_{-1/2q,\,-1-1/2k}(2\eta) + \\ &+ C_3 M_{1/2q,\,-1-1/2k}(2\eta) + C_4 W_{1/2q,\,-1-1/2k}(2\eta)\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

В теории интегральных преобразований с функциями Уиттекера к настоящему времени достигнут некоторый прогресс (см., например, [8]). Поэтому имеется реальная возможность применения методов интегральных преобразований как к исследованию напряженного состояния пластин, так и к изучению соответствующих моделей упругого основания. Рассмотрим здесь один пример, в котором первая основная задача для полосы на жестком основании и находящейся под действием нормальной нагрузки по верхнему краю, имеет сравнительно простое решение.

4. Положим $m = cy$ внутри полосы $0 < y < H$, $m = 0$ для $y < 0$. Случай показателя $k = -1$ — особый, так как метод, рассмотренный выше, дает здесь только два независимых частных решения для уравнения (3.3). Но в данном случае это уравнение решается непосредственно. Понижая порядок, при условии регулярности $f(y, \xi)$ при $y = 0$, имеем

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - \xi^2 f = A\,\frac{\operatorname{sh}\xi y}{y} \tag{4.1}$$

Для деформаций и напряжений из формул (1.2) и (3.2) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= cy\int_{-\infty}^{\infty}\left[\xi^2 + (1-\nu)\left(\frac{d^2}{dy^2} - \xi^2\right)\right] f(y, \xi)\, e^{i\xi x} d\xi \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= cy\int_{-\infty}^{\infty}\left[-\frac{d^2}{dy^2} + (1-\nu)\left(\frac{d^2}{dy^2} - \xi^2\right)\right] f(y, \xi)\, e^{i\xi x} d\xi \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\sigma_y = -\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2 f(y, \xi)\, e^{i\xi x} d\xi, \qquad \sigma_x = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2 f}{dy^2}\, e^{i\xi x} d\xi, \qquad \tau_{xy} = -i\int \xi\,\frac{df}{dy}\, e^{i\xi x} d\xi \tag{4.3}$$

Отсюда заключаем, что при $y = 0$ имеется только жесткое перемещение, которое принимаем равным нулю, и что на границах $y = 0$, $y = H$ будут отсутствовать касательные напряжения, если $f_y'(0, \xi) = f_y'(H, \xi) = 0$. Отсюда же следует, что

$$f(H, \xi) = \frac{1}{2\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} p(t)\, dt \tag{4.4}$$

Решение уравнения (4.1), удовлетворяющее этим условиям, имеет вид

$$f(y,\ \xi)=\frac{g(y,\ \xi)}{2\pi\xi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi t}p(t)\,dt \tag{4.5}$$

где

$$g(y,\ \xi)=\left[\int\limits_0^H\frac{\operatorname{ch}\xi\alpha\operatorname{sh}\xi\alpha}{\alpha}\,d\alpha\right]^{-1}\int\limits_0^H K(y,\ \xi;\ \alpha)\frac{\operatorname{sh}\xi\alpha}{\alpha}\,d\alpha \tag{4.6}$$

$$K(y,\ \xi;\ \alpha)=\begin{cases}\operatorname{ch}\xi(H-y)\operatorname{ch}\xi\alpha, & \alpha<y\\ \operatorname{ch}\xi(H-\alpha)\operatorname{ch}\xi y, & \alpha>y\end{cases} \tag{4.7}$$

Входящие в это решение экспоненциальные интегралы — табулированные функции, и получение численных результатов здесь не встретит значительных трудностей.

5. Прежде чем перейти к рассмотрению пространственных задач, установим один результат отрицательного характера, а именно: в трехмерной неоднородной среде вообще не имеет места радиальное распределение напряжений. Более точно это значит, что задача С. Г. Лехницкого не имеет решения в произвольных функциях, подобного (2.4). Имеется лишь особое решение, содержащее одну произвольную функцию. При зависимости модуля упругости только от одной координаты это решение совпадает с известным, полученным в работе [9].

Здесь удобно перейти к сферическим координатам. Уравнения равновесия сводятся тогда к единственному

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{2}{s}\sigma_r=0 \tag{5.1}$$

Отсюда, с учетом осевой симметрии задачи, следует

$$\sigma_r=\sigma=r^{-2}S(\theta) \tag{5.2}$$

Для деформаций имеем

$$e_{rr}=\varepsilon,\qquad e_{\theta\theta}=e_{\varphi\varphi}=-\nu\varepsilon,\qquad e_{r\theta}=e_{\theta\varphi}=e_{\varphi r}=0\qquad(\varepsilon=\sigma/E) \tag{5.3}$$

Не выписывая условий совместности в сферических координатах [10], приведем результат подстановки выражений (5.3) в эти условия

$$\begin{gathered}\left(\nu\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}+2r\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}\right)+2(1+\nu)\varepsilon=0,\qquad\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}+\nu r\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial r\,\partial\theta}=0\\ \nu r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varepsilon)+r\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}-\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}=0,\qquad\nu r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varepsilon)+r\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}-\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\theta^2}=0\end{gathered} \tag{5.4}$$

Из последних двух условий следует

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\theta^2}-\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}=0,\qquad\varepsilon=f(r)\cos\theta+g(r) \tag{5.5}$$

Подстановка этого результата во второе условие (5.4) дает

$$f(r)+\nu rf'(r)=0,\qquad f(r)=Ar^{-1/\nu} \tag{5.6}$$

Подстановка же в первое условие приводит к уравнениям

$$(\nu+1)\,g(r)+\nu rg'(r)=0,\qquad g(r)=Br^{-1-1/\nu} \tag{5.7}$$

Итак,

$$E=Ar^{-1/\nu}\cos\theta+Br^{-1-1/\nu} \tag{5.8}$$

Последние условия (5.4) при этом удовлетворяются тождественно. Отсюда имеем для модуля упругости

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{r^{1/\nu-1}S(\theta)}{Ar\cos\theta + B} \tag{5.9}$$

Если E — функция только z, то

$$S(\theta) = C(\cos\theta)^{1/\nu-1}, \qquad E = \frac{Ar^{1/\nu-1}}{Az+B} \tag{5.10}$$

Это дает при $A = 0$ одно, при $B = 0$ — другое из решений, приведенных в работе [19]. Для перемещений имеем

$$u_r = A\frac{\nu}{\nu-1}r^{1-1/\nu}\cos\theta - \nu Br^{-1/\nu}, \quad u_\theta = \frac{-\nu^2}{\nu-1}Ar^{1-1/\nu}\sin\theta \tag{5.11}$$

(жесткое перемещение отброшено). На поверхности $z = 0$, $\theta = {}^1/_2\pi$ будет

$$u_r = -\nu Br^{-1/\nu}, \qquad u_\theta = \frac{\nu^2}{\nu-1}Ar^{1-1/\nu} \tag{5.12}$$

Для того чтобы это решение имело смысл в случае распределенной нагрузки, необходимо, чтобы показатели в этих формулах были больше, чем -2. Если $B \neq 0$, то должно быть $\nu > 2$, что физически нереально. Если же $B = 0$, то должно быть $\nu > {}^1/_3$. Итак, реально

$$E = z^{1/\nu-2}F(\theta), \qquad S(\theta) = cF(\theta)(\cos\theta)^{1/\nu-1} \qquad ({}^1/_2 > \nu > {}^1/_3) \tag{5.13}$$

При $F(\theta) = \text{const}$ получается решение, найденное в работе [19].

6. Уравнение равновесия в перемещениях для неоднородной среды получается обычным путем из уравнений равновесия Коши подстановкой в них формул, выражающих напряжения через деформации. Обозначая

$$\theta = \operatorname{div}\mathbf{u}, \qquad \epsilon = \operatorname{def}\mathbf{u}$$

имеем для тензора напряжений формулу

$$\mathrm{S} = \lambda\theta\mathrm{I} + 2\mu\epsilon \qquad (\mathrm{I}\text{ — единичный тензор}) \tag{6.1}$$

и уравнение равновесия в перемещениях имеет вид

$$(\lambda+\mu)\nabla\theta + \mu\triangle\mathbf{u} + \theta\nabla\lambda + 2\epsilon\cdot\nabla\mu = 0$$

где

$$\triangle = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \tag{6.2}$$

При $\nu = \text{const}$ уравнение упрощается

$$\alpha\nabla\theta + \triangle u + [(\alpha-1)\theta I + 2\epsilon]\cdot\nabla\ln\mu = 0 \qquad \left(\alpha = \frac{1}{1-2\nu}\right) \tag{6.3}$$

Рассмотрим полупространство с модулем упругости, зависящим от глубины, $\mu = \mu(z)$. Имеем в декартовых координатах

$$\begin{gathered}\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x} + \triangle u + q(z)e_{zx} = 0, \qquad \alpha\frac{\partial\theta}{\partial y} + \triangle v + q(z)e_{zy} = 0\\ \alpha\frac{\partial\theta}{\partial z} + \triangle w + q(z)[(\alpha-1)\theta + 2e_{zz}] = 0, \qquad q(z) = \frac{d}{dz}\ln\mu(z)\end{gathered} \tag{6.4}$$

Если μ зависит от глубины экспоненциально, то $q(z) = \text{const}$, и уравнение (6.4) образует систему с постоянными коэффициентами. Этот случай рассматриваться не будет. Отдельные задачи, к нему относящиеся, уже обсуждались [11]. Ниже рассматривается в основном случай, когда

$1/q(z)$ имеет вид $az + b$, или при переносе начала координат, более просто, z/k, т. е. когда имеет место степенная зависимость модуля упругости от глубины, $\mu = Kz^k$; случай $\mu = a + bz$ относится сюда же. Будем искать решение уравнений (6.4), представляющееся интегралами Фурье

$$(u, v, w) = \iint_{-\infty}^{\infty} (U, V, W)\, e^{i(\xi x + \eta y)}\, d\xi d\eta \tag{6.5}$$

Это приводит в общем случае к системе шестого порядка

$$\begin{gathered}
\alpha\xi\left(i\frac{dW}{dz} - \xi U - \eta V\right) + \left(\frac{d^2U}{dz^2} - \rho^2 U\right) + q(z)\left(\frac{dU}{dz} + i\xi W\right) = 0 \\
\alpha\eta\left(i\frac{dW}{dz} - \xi U - \eta V\right) + \left(\frac{d^2V}{dz^2} - \rho^2 V\right) + q(z)\left(\frac{dV}{dz} + i\eta W\right) = 0 \\
\alpha\left[\frac{d^2W}{dz^2} + i\left(\xi\frac{dU}{dz} + \eta\frac{dV}{dz}\right)\right] + \left(\frac{d^2W}{dz^2} - \rho^2 W\right) + \\
+ q(z)\left[(\alpha+1)\frac{dW}{dz} + (\alpha-1)\, i(\xi U + \eta V)\right] = 0 \qquad (\rho^2 = \xi^2 + \eta^2)
\end{gathered} \tag{6.6}$$

Исследование такой системы в общем случае аналитического коэффициента $q(z)$ затруднительно. В случае же степенного закона преобразование Лапласа позволяет снизить ее порядок вдвое и избавиться от неправильной особой точки на бесконечности. Полагая в этом случае

$$(U, V, W) = \int (\Phi, X, \Psi)\, e^{zt} dt \tag{6.7}$$

после некоторых выкладок приходим к системе, содержащей первые производные по t функции Φ, X, Ψ. Во избежание слишком громоздких записей представляем эту систему в матричной форме

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Phi \\ X \\ \Psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 - \rho^2 - \alpha^2\xi^2 & -\alpha\xi & i\alpha t\xi \\ -\alpha\xi\eta & t^2 - \rho^2 - \alpha^2\eta^2 & i\alpha t\eta \\ i\alpha t\xi & i\alpha t\eta & (\alpha+1)t^2 - \rho^2 \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} (k-2)t & 0 & (k-\alpha)i\xi \\ 0 & (k-2)t & (k-\alpha)i\eta \\ (k\alpha - k - \alpha)i\xi & (k\alpha - k - \alpha)i\eta & (\alpha+1)(k-2)t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\Phi \\ X \\ \Psi\end{bmatrix} \tag{6.8}$$

Определитель первой матрицы

$$\triangle(t) = (\alpha + 1)(t^2 - \rho^2)^2$$

Для этой системы бесконечно удаленная точка будет правильной. Тем не менее, аналитическое исследование и построение решений представляет сложную и трудную задачу.

7. Положение несколько упрощается в осесимметричной задаче. В этом случае система уравнений в перемещениях распадается на две независимые подсистемы, из которых одна описывает состояние круговой симметрии

$$\begin{gathered}
\alpha\frac{\partial\theta}{\partial r} + \triangle u - \frac{u}{r^2} + q(z)\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0 \\
\alpha\frac{\partial\theta}{\partial z} + \triangle w + q(z)\left[(\alpha-1)\theta + 2\frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0
\end{gathered} \tag{7.1}$$

$$u = u_r, \qquad w = u_z, \qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

а другая — состояние кручения

$$\triangle v - \frac{v}{r^2} + q(z)\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \qquad v = u_\varphi \tag{7.2}$$

Последнее уравнение приводится к виду

$$\triangle \omega + q(z)\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \qquad \left(v = \frac{\partial \omega}{\partial z}\right)$$

В случае $q(z) = kz^{-1}$, $0 < k < 1$, это уравнение изучалось в работе [12], где указаны его фундаментальные функции (гипергеометрические) в системе координат сжатого сфероида. Здесь дается приведение (7.1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (при $q(z) = kz^{-1}$). Для этого представляем перемещения u, w интегралами Ханкеля

$$u = \int_0^\infty sJ_1(rs)\, f(z, s)\, ds, \qquad w = \int_0^\infty sJ_0(rs)\, g(z, s)\, ds \tag{7.3}$$

Для функций f, q тогда получается система

$$\begin{gathered} \frac{d^2 f}{dz^2} - (\alpha+1)\, s^2 g - \alpha s \frac{dq}{dz} + q(z)\left(\frac{df}{dz} - sg\right) = 0 \\ (\alpha+1)\frac{d^2 g}{dz^2} - s^2 g + \alpha s \frac{df}{dz} + q(z)\left[(\alpha-1)\, sf + (\alpha+1)\frac{dq}{dz}\right] = 0 \end{gathered} \tag{7.4}$$

Полагая $q(z) = kz^{-1}$ и делая подстановку $\zeta = zs$, получаем

$$\begin{gathered} \zeta\left[\alpha\frac{df}{d\zeta} + (\alpha+1)\frac{d^2 g}{d\zeta^2} - g\right] + k\left[(\alpha-1)\, f + (\alpha+1)\frac{dg}{d\zeta}\right] = 0 \\ \zeta\left[\frac{d^2 f}{d\zeta^2} - (\alpha+1)\, g - \alpha\frac{dg}{d\zeta}\right] + k\left(\frac{df}{d\zeta} - g\right) = 0 \end{gathered} \tag{7.5}$$

Преобразованием Лапласа

$$f(\zeta) = \int \varphi(t)\, e^{\zeta t} dt, \qquad g(\zeta) = \int \psi(t)\, e^{\zeta t} dt \tag{7.6}$$

понижаем порядок системы. Получается

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\varphi \\ \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t), & a_{12}(t) \\ a_{21}(t), & a_{22}(t)\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\varphi \\ \psi\end{bmatrix} \tag{7.7}$$

$$a_{ij} = \frac{A_{ij}(t)}{\Delta(t)}, \qquad \Delta(t) = (\alpha+1)(t^2-1)^2 \tag{7.8}$$

$$\begin{gathered} A_{11} = t\,[(\alpha+1)(k-2)\, t^2 - \alpha(k\alpha - k - \alpha) - (k-2)] \\ A_{12} = (\alpha+1)(k\alpha - k - \alpha)\, t^2 - (\alpha - k) \\ A_{21} = (\alpha - k)\, t^2 - (\alpha+1)(k\alpha - k - \alpha) \\ A_{22} = t\,[(\alpha+1)(k-2)\, t^2 - (\alpha+1)^2(k-2) - \alpha(\alpha - k)] \end{gathered} \tag{7.9}$$

Как можно видеть, все особые точки этой системы правильные. Исключая одну функцию, получаем для другой уравнение второго порядка, которое квадратичным преобразованием приводится к уравнению Хойна с четырьмя особыми точками (из них одна — кажущаяся особенность).

Заметим, что, решая плоскую задачу в перемещениях методом преобразований Фурье (по координате z) и Лапласа (по координате y), приходим к такой же системе уравнений (7.7). В то же время в плоской задаче аналитическая сторона дела существенно упрощается при использовании функции напряжений. Построение этой функции в задаче о полосе привелось к преобразованиям Фурье от линейных комбинаций Уиттекера, тогда как перемещения имеют более сложную аналитическую структуру, как это видно из формул (1.2). Указанное обстоятельство заставляет и в осесимметричной задаче искать иной прием, более эффективный в аналитическом отношении. Здесь также можно ввести функцию напряжений, но представляется более рациональным использование соответствий между плоской и осесимметричной задачами, установленных в работах В. И. Моссаковского [13] и А. Я. Александрова [14] для однородной среды. Так как эти соответствия представляют интегральные преобразования, не затрагивающие координаты z, то они сохранят силу и в случае неоднородности по этой координате [1]. В последнем пункте дается применение этого метода к задаче вычисления нормальных перемещений на границе полупространства, вызываемых сосредоточенной нормальной силой, приложенной к границе (задача Буссинека).

8. Так как касательные напряжения на границе отсутствуют, то для поставленной цели достаточно двух формул [14]

$$W(r) = \int_{-r}^{+r} w^-(x) \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}, \qquad P^-(t) = \int_0^t p^-(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{p(r)\,r dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \tag{8.1}$$

Пусть $p(r)$ — локально интегрируемая финитная функция. (Черточками в степени отмечаются величины плоской задачи.)

Тогда $P^-(t) = O(t^{-1})$ при $t \to \infty$. Учитывая это, имеем для перемещений в плоской задаче

$$w^-(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p^-(t)\, \mathbf{K}^-(x, t)\, dt = -\int P^-(t) \frac{\partial \mathbf{K}^-}{\partial t}\, dt \tag{8.2}$$

Пусть

$$\mathbf{K}^-(x, t) = \mathbf{K}^-(|x - t|), \qquad \mathbf{K}^-(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_*^-(s)\, e^{isx} ds \tag{8.3}$$

В силу сделанного замечания относительно $P^-(t)$, в интеграле (8.2) после подстановки (8.3) можно изменить порядок интегрирования. Тогда

$$w^-(x) = \int_{-\infty}^{\infty} is\mathbf{K}_*^-(s)\, e^{isx} ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} P^-(t)\, dt \tag{8.4}$$

и из первой формулы (8.1) следует

$$w(r) = \int_{-\infty}^{\infty} i\pi s\mathbf{K}_*^-(s)\, J_0(rs)\, ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} P^-(t)\, dt \tag{8.5}$$

Результат подстановки второй из формул (8.1) во внутренний интеграл (8.5) выражается довольно сложно, но он нам не потребуется. Для сосредоточенной силы P легко найти, что

$$P^-(t) = (2\pi^2)^{-1} P t^{-1}$$

и внутренний интеграл равен $-i\pi \operatorname{sgn} s$. В этом случае получаем

$$w(r) = P \int_0^{\infty} s\mathbf{K}_*^-(s)\, J_0(rs)\, ds \tag{8.6}$$

Для единичной силы $P = 1$ перемещение $w(r) = \mathbf{K}(r)$ образует ядро функционала перемещений на границе полупространства (слоя)

$$w(x, y) = \iint p(\xi, \eta)\, \mathbf{K}(r)\, d\xi d\eta, \qquad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \tag{8.7}$$

[1] Автор благодарит В. И. Моссаковского, подавшего эту мысль.

Обращая (8.3) и внося результат в (8.6), получаем непосредственное представление ядра $\boldsymbol{K}(r)$ через ядро $\boldsymbol{K}^-(x)$ симметричной плоской задачи

$$\boldsymbol{K}(r) = \frac{-1}{\pi}\int_r^\infty \boldsymbol{K}^{-\prime}(x)\,\frac{dx}{\sqrt{x^2-r^2}} \tag{8.8}$$

В применении к степенному ядру (2.8) это дает

$$\boldsymbol{K}(r) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(^1/_2+{}^1/_2k)}{\Gamma(1+{}^1/_2k)}\,\vartheta(\nu,k)\,r^{-1-k} \tag{8.9}$$

Отсюда при $k=0$ или $\nu = 1/(2+k)$ можно получить уже известные результаты [5, 10, 12].

Замечание 1. Непосредственное вычисление $K_*^-(s)$ из (8.3) иногда приводит к вычислению интегралов (8.6) за пределами допустимых значений параметров (как в рассмотренном примере). Так как вывод (8.8) состоит в вычислении свертки обобщенных преобразований Фурье и Ханкеля, такие интегралы надлежит брать в обобщенном смысле.

Замечание 2. В случае степенной зависимости модуля упругости от декартовой координаты преобразования Фурье напряжений образуют линеал над множеством конфлюэнтных гипергеометрических функций этой координаты. Преобразования, связывающие плоскую задачу с осесимметрической, не изменяют аналитической характеристики этого множества. В осесимметричной задаче ханкелевы преобразования образуют линеал над тем же множеством. Это определяет степень и характер аналитических трудностей в обеих задачах с таким типом неоднородности упругих свойств.

Поступила 7 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ду Цин-хуа. Плоская задача теории упругости неоднородной упругой среды. Пробл. механики сплошной среды. Изд-во АН СССР, 1961.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935, стр. 102.
3. Theodorescu P. P., Predeleanu M. Über das eben Problem nichhomogener elastischer Körper. Acta techn. Acad. scient hung., 1959, No 3—4.
4. Лехницкий С. Г. Радиальное распределение напряжений в клине и полуплоскости с переменным модулем упругости. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 1.
5. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. ОНТИ, 1949.
6. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости для тел с переменным модулем упругости. Всесоюзн. совещ. по применению методов т. ф. к. п. к задачам мат. физики (тезисы докладов), Тбилиси, 1961.
7. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental functions. McGraw-Hill Book, 1953, v. 1.
8. Srinivasan V. On the generalized Meijer Transform. Bull. Acad. polon. sci. cl III, 1963, v. 11, No 7.
9. Клейн Г. К. Учет неоднородности, разрывности деформаций и других механических свойств грунта при расчете сооружений на сплошном основании. Сб. тр. Моск. инж.-строит. ин-та, 1956, № 14.
10. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехтеоретиздат, 1955, стр. 42.
11. Тер-Мкртчьян Л. Н. Некоторые задачи теории упругости неоднородных сред. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 6.
12. Ростовцев Н. А. О некоторых решениях интегрального уравнения теории линейного деформируемого основания. ПММ, 1964, т. XXVIII, вып. 1.
13. Моссаковский В. И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 2.
14. Александров А. Я. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи зависимостей между осесимметричным и плоским состояниями. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.