ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

А. М. Богородицкий (Тула)

1. Рассмотрим осесимметричные деформации тел вращения. Через X^A $(A = 1, 2, 3)$ будем обозначать материальные цилиндрические координаты точек тела в начальном состоянии, причем X^1 отсчитывать вдоль оси вращения, X^2 — расстояние точки от оси вращения, X^3 — полярный угол.

Положение точек тела в деформированном состоянии будем определять пространственными координатами x^i $(i = 1, 2, 3)$ в той же цилиндрической системе координат.

В дальнейшем в обозначении компонент тензоров прописные латинские буквы соответствуют материальным координатам, строчные латинские — пространственным. Ковариантная материальная производная тензора T: : обозначается при помощи координатного индекса, стоящего за запятой $T{::}_{,A}$; ковариантная пространственная производная тензора так же с помощью индекса, но строчного, стоящего за запятой $T{::}_{,i}$. Перемещения точек тела при деформировании в материальных координатах обозначим через U^1, U^2 соответственно вдоль X^1, X^2, а перемещение, перпендикулярное плоскости меридиана, U^3 считаем равным нулю. Таким образом, для рассматриваемой задачи контрвариантные компоненты вектора перемещения среды представляют собой функции двух параметров

$$U^1 = U^1(X^1, X^2), \qquad U^2 = U^2(X^1, X^2) \tag{1.1}$$

В работе показано, что условие несжимаемости среды дает возможность искомые функции (1.1) выразить через некоторую функцию двух параметров, названную здесь функцией перемещений, и, решение осесимметричной задачи нелинейной теории упругости привести к нахождению одной функции, удовлетворяющей уравнениям равновесия и граничным условиям.

2. Пусть α, β — криволинейные координаты в плоскости X^1, X^2. Пусть $\omega(\alpha, \beta)$ — функция, имеющая непрерывные производные до четвертого порядка включительно и удовлетворяющая условиям

$$\Delta = 1 - \omega_{\alpha\beta}^2 + \omega_{\alpha\alpha}\omega_{\beta\beta} \neq 0, \qquad -\beta < \omega_\alpha < \beta \tag{2.1}$$

Здесь греческие индексы обозначают частные производные этой функции.

Условие несжимаемости среды [1]

$$I = |\delta^A{}_B + U^A{}_{,B}| = 1 \tag{2.2}$$

представим в виде

$$\left[\left(1 + \frac{\partial U^1}{\partial X^1}\right)\left(1 + \frac{\partial U^2}{\partial X^2}\right) - \frac{\partial U^1}{\partial X^2}\frac{\partial U^2}{\partial X^1}\right]\left(1 + \frac{U^2}{X^2}\right) = 1 \tag{2.3}$$

Будем искать решение недоопределенного дифференциального уравнения (2.3) в виде семейства функций, зависящего от двух параметров. Для этого путем замены переменных

$$z = U^1 + X^1, \qquad w = \frac{(U^2 + X^2)(U^2 + X^2)}{2} \tag{2.4}$$

преобразуем уравнение (2.3) в виду

$$\left(\frac{\partial z}{\partial X^1}\frac{\partial w}{\partial X^2} - \frac{\partial z}{\partial X^2}\frac{\partial w}{\partial X^1}\right)\frac{1}{X^2} = 1 \tag{2.5}$$

и представим [2] решение (2.5) с помощью двух функций $P(\alpha, \beta)$, $Q(\alpha, \beta)$ в форме

$$X_1 = \alpha + P, \qquad X^2 = \sqrt{2(\beta + Q)}, \qquad z = \alpha - P, \qquad w = \beta - Q \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.5), получим уравнение

$$P_\alpha + Q_\beta = 0 \tag{2.7}$$

Отсюда имеем

$$P = \omega_\beta(\alpha, \beta), \qquad Q = -\omega_\beta(\alpha, \beta) \tag{2.8}$$

Здесь $\omega(\alpha, \beta)$ — произвольная функция, имеющая непрерывные производные первого и второго порядка.

При этом предполагается, что

$$\Delta = (1 + P_\alpha)(1 + Q_\beta) - P_\beta Q_\alpha \neq 0 \qquad (2.9)$$

Следовательно, искомое решение дифференциального уравнения (2.3) может быть представлено в виде формул

$$U^1 = -2\omega_\beta, \qquad U^2 = \sqrt{2(\beta + \omega_\alpha)} - \sqrt{2(\beta - \omega_\alpha)} \qquad (2.10)$$
$$X^1 = \alpha + \omega_\beta, \qquad X^2 = \sqrt{2(\beta - \omega_\alpha)}$$

Таким образом, искомые перемещения U^1, U^2 выражаются через производные одной функции $\omega(\alpha, \beta)$ двух параметров.

Заметим, что отображение (2.10) среды оставляет пространство евклидовым.

3. Для осесимметричной задачи условия совместности деформации можно получить в более простой форме, не прибегая к тензору кривизны пространства.

Если перемещения среды непрерывны, то

$$\frac{\partial}{\partial X^1}\frac{\partial U^A}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X^2}\frac{\partial U^A}{\partial X^1} \qquad (A = 1, 2) \qquad (3.1)$$

и для совместности деформации достаточно потребовать, чтобы углы поворота произвольного материального волокна в меридиональной плоскости также были непрерывны. Получим условия неразрывности углов поворота волокон.

Как известно [3], компоненты α_B в разложении

$$a_{A,B} = \alpha_B a_A^\circ + \beta_B a_A \qquad (3.2)$$

ковариантной производной векторного поля a на поверхности по векторам данного и дополнительного полей определяют трансверсальный вектор поля.

Кроме того, трансверсальные векторы двух полей отличаются на градиент угла между векторами этих полей [3], т. е.

$$\gamma_B = \alpha_B + \frac{\partial \varphi}{\partial X^B} \qquad (3.3)$$

Здесь γ_B, α_B — ковариантные координаты трансверсальных векторов полей; φ — угол между векторами двух полей.

Используя это свойство, путем альтернирования второй ковариантной производной угла φ, получим условие непрерывности вращения в виде

$$\gamma_{[B,A]} - \alpha_{[B,A]} = 0 \qquad (3.4)$$

если γ_B, α_B — трансверсальные векторы некоторых материальных волокон, лежащих в меридиональной плоскости соответственно до и после деформации. Квадратные скобки указывают альтернирование тензора, т. е.

$$\alpha_{[A,B]} = {}^1/_2\,[\alpha_{A,B} - \alpha_{B,A}]$$

Таким образом, для совместности осесимметричной деформации необходимо и достаточно, чтобы выполнялись тождества (3.1) и (3.4).

4. При заданной функции $\omega(\alpha, \beta)$ каждой системе перемещений соответствует некоторое поле напряжений, если только известна связь между напряжениями и деформациями.

Но такое поле напряжений, вообще говоря, не будет удовлетворять ни условиям равновесия элемента среды, ни граничным условиям.

Условия равновесия элемента среды выделяют из геометрически допустимых систем деформаций, заданных $\omega(\alpha, \beta)$, те статически возможные системы, которым соответствует определенная связь между напряжениями и деформациями, выражающая механические свойства среды.

Назовем уравнение, выделяющее из систем геометрически возможных деформаций системы, удовлетворяющие уравнениям равновесия среды с некоторой плотностью потенциальной энергии деформации Σ, уравнением совместности напряжений и деформации. Здесь будет получено уравнение совместности для изотропных материалов. Следует заметить, что аналогично получаются уравнения совместности и для других типов несжимаемых материалов.

Уравнения равновесия в произвольной пространственной криволинейной системе координат имеют вид [4]

$$t^j{}_{i,j} + \rho f_i = 0$$

$$\left(t^{ij} = -pg^{ij} + 2\frac{\partial \Sigma}{\partial C_{AB}} x^i{}_{,A} x^j{}_{,B}; \qquad C_{AB} = g_{ij} x^i{}_{,A} x^j{}_{,B}; \qquad x^i{}_{,A} = \frac{\partial x^i}{\partial X^A} \right) \tag{4.1}$$

Здесь t^{ij} — компоненты тензора напряжений, ρ — плотность деформированной среды, f_i — компоненты массовых сил, p — множитель Лагранжа, C_{AB} — компоненты тензора Грина, g_{ij} — компоненты пространственного метрического тензора.

Для изотропного материала [1,4]

$$\Sigma = \Sigma(J_1, J_2) \qquad \left(J_1 = C^A{}_A, \quad J_2 = {}^1/_2 \left[J_1{}^2 - C^A{}_B C^B{}_A\right]\right) \tag{4.2}$$

Здесь J_1 и J_2 — базисные инварианты тензора Грина. Введем тензор [4]

$$(c^{-1})^{ij} = G^{AB} x^i{}_{,A} x^j{}_{,B}$$

где G_{AB} — компоненты материального метрического тензора.

Перейдем от координат X^A и x^i к конвективной системе координат

$$z^1 = \alpha, \qquad z^2 = \beta, \qquad z^3 = x^3 = X^3 \tag{4.3}$$

то тензор напряжений (4.1) для изотропной среды представляется в форме Грина — Церна [4,5]

$$t^{ij} = -pg^{ij} + 2\frac{\partial \Sigma}{\partial J_1} G^{ij} + 2\frac{\partial \Sigma}{\partial J_2}(J_1 G^{ij} - G^{ik} g_{kl} G^{lj}) \tag{4.4}$$

Для осесимметричной задачи при отсутствии массовых сил условия равновесия в конвективной системе координат можно записать в виде

$$(p\delta_i{}^j)_{,j} = \left[2\frac{\partial \Sigma}{\partial J_1} G^{jk} g_{ki} + 2\frac{\partial \Sigma}{\partial J_2}(J_1 G^{jk} g_{ki} - G^{nk} g_{ni} g_{kl} G^{lj})\right]_{,j} \qquad (i = 1, 2) \tag{4.5}$$

Здесь

$$G_{11} = (1 + \omega_{\alpha\beta})^2 + \frac{\omega_{\alpha\alpha}{}^2}{2(\beta - \omega_\alpha)}, \qquad G_{12} = (1 + \omega_{\alpha\beta})\,\omega_{\beta\beta} - \frac{\omega_{\alpha\alpha}(1 - \omega_{\alpha\beta})}{2(\beta - \omega_\alpha)}$$

$$G_{22} = \omega_{\beta\beta}{}^2 + \frac{(1 - \omega_{\alpha\beta})^2}{2(\beta - \omega_\alpha)}, \qquad G_{33} = 2(\beta - \omega_\alpha), \qquad G_{13} = 0, \qquad G_{23} = 0$$

$$g_{11} = (1 - \omega_{\alpha\beta})^2 + \frac{\omega_{\alpha\alpha}{}^2}{2(\beta + \omega_\alpha)}, \qquad g_{12} = -\omega_{\beta\beta}(1 - \omega_{\alpha\beta}) + \frac{\omega_{\alpha\alpha}(1 + \omega_{\alpha\beta})}{2(\beta + \omega_\alpha)}$$

$$g_{22} = \omega^2_{\beta\beta} + \frac{(1 + \omega_{\alpha\beta})^2}{2(\beta + \omega_\alpha)}, \qquad g_{33} = 2(\beta + \omega), \qquad g_{13} = 0, \qquad g_{23} = 0$$

Вычисляя вторую ковариантную производную от скалярной функции p и альтернируя, получим условие совместности напряжений и деформации для изотропной среды с плотностью энергии $\Sigma = \Sigma(J_1, J_2)$,

$$\begin{aligned} &[KG^{jk} g_{k1} + L(J_1 G^{jk} g_{k1} - G^{nk} g_{n1} g_{kl} G^{lj})]_{,j2} = \\ &= [KG^{jk} g_{k2} + L(J_1 G^{jk} g_{k2} - G^{nk} g_{n2} g_{kl} G^{lj})]_{,j1} \end{aligned} \qquad \left(K = \frac{\partial \Sigma}{\partial J_1}, \quad L = \frac{\partial \Sigma}{\partial J_2}\right) \tag{4.6}$$

В уравнение (4.6) входят только функция перемещения $\omega(\alpha, \beta)$ и константы, характеризующие механические свойства среды. Таким образом, решая уравнение (4.6), найдем $\omega(\alpha, \beta)$ и выделим тем самым из совокупности деформаций системы деформаций, удовлетворяющие условиям равновесия элемента среды

5. Изложенное позволяет наметить путь решения осесимметричных задач Интегрирование уравнения (4.6) определяет систему функций перемещения $\omega(\alpha, \beta)$, совместную с условиями равновесия элемента среды для заданного физического закона связи между напряжениями и деформациями.

Для этой системы $\omega(\alpha, \beta)$ из (4.5) можно найти p, так как система (4.5) вполне интегрируема. Таким образом определяются компоненты тензора напряжения t^{ij}.

Тогда остается удовлетворить граничные условия. Причем, очевидно, краевые условия с заданными на границе перемещениями, вообще говоря, могут быть удовлетворены предварительно путем выбора $\omega(\alpha, \beta)$ в соответствующей форме. Остаются, таким образом, краевые условия вида

$$t_i^j n_j = t_i \qquad (5.1)$$

где n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к граничной поверхности деформированной среды, t_i — компоненты внешней силы, отнесенной к единице площади той же поверхности.

Автор приносит глубокую благодарность Л. А. Толоконникову за внимание и помощь, оказанную при выполнении настоящей работы.

Поступила 30 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехтеоретиздат, 1948.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Гостехтеоретиздат, т. 2, 1948.
3. Норден А. П. Теория поверхностей. Гостехтеоретиздат, 1956.
4. Trusdell C., The Mechanical Foundation of Elacticity and Fluid Dynamics. J. of Rational Mechanics and Analysis, 1952, v. 1, № 1, 2.
5. Green A. E., Zerna W. Theoretical elasticity. New York, 1954.

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ «О МАКСИМАЛЬНОЙ ДАЛЬНОСТИ ПОЛЕТА РАКЕТЫ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ»

Г. Лейтманн (США, Калифорния)

Задача, рассмотренная в работе [1], принадлежит к классу задач, изученных в [2]. Там показано, что предположение о монотонности $m(V)$, обусловливающее единственное оптимальное управление не более чем с двумя переключениями, удовлетворяется для отвечающих реальности законов сопротивления

$$D = AV^2 + B\frac{L^n}{V^{2n-2}} \qquad (n = 2 \quad \text{или} \quad n = {}^3/_2)$$

Другие рассмотрения задачи можно найти в работе [3, 4].

Поступила 6 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейтманн Г. О максимальной дальности полета ракеты в горизонтальной плоскости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
2. Miele A., Chapter 4 of Optimisation Techniques, ed. G. Leitmann, Academic Press, 1962.
3. Cicala P. and Miele A. Generalised Theory of the Optimum Thrust Programming for the Level Flight of a Rocket-Powered Aircraft. Jet Propulsion, 1956, v. 26, № 6.
4. Miele A. An Extension of the Theory of the Optimum Burning Program for the Level Flight of a Rocket-Powered Aircraft, J. Aeronaut. Sci., 1957, v. 24, № 12.