

ОБ УТОЧНЕНИИ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК

А. В. Колос (Москва)

Рассматривается применение предложенного в работе [1] метода уточнения классической теории изгиба пластинок к задаче о круглой пластинке и бесконечной пластинке с круговым отверстием.

1. Поставленные задачи решаются в цилиндрических координатах. Начало цилиндрической системы координат выбирается в центре окружности пластинки в ее срединной плоскости, ось z — перпендикулярна этой плоскости. Толщина пластинки $2h$, радиус ее — R . Искомое напряженное состояние пластинки составляется как сумма напряженного состояния, названного в работе [1] основным, и двух вспомогательных напряженных состояний, быстро затухающих при удалении от края.

При интегрировании уравнений трехмерной задачи теории упругости все напряжения и перемещения Q задаем в виде

$$Q = h^{-q} \sum_{s=1}^{s=S} h^{s-1} Q^{(s)} \quad (1.1)$$

где q — целое число, которое в каждом итерационном процессе для различных напряжений и перемещений выбирается так же, как и в работе [1].

Для основного напряженного состояния, которое строится при помощи основного итерационного процесса, q имеет следующие значения

$$\begin{aligned} q = 2 & \text{ для } \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, & q = 1 & \text{ для } \tau_{rz}, \tau_{\theta z} \\ q = 0 & \text{ для } \sigma_z, & q = 2 & \text{ для } u, v, & q = 3 & \text{ для } w \end{aligned} \quad (1.2)$$

Система уравнений [1], которым удовлетворяют в каждом приближении напряжения и перемещения $Q^{(s)}$ этого напряженного состояния, для рассматриваемой задачи в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r^{(s)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(s)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\sigma_r^{(s)} - \sigma_\theta^{(s)}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(s)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta^{(s)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{2\tau_{r\theta}^{(s)}}{r} &= 0, & \frac{\partial \tau_{rz}^{(s)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}^{(s)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\tau_{rz}^{(s)}}{r} &= 0 \\ E \frac{\partial u^{(s)}}{\partial r} = \sigma_r^{(s)} - \nu (\sigma_\theta^{(s)} + \sigma_z^{(s-2)}), & E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \theta} + \frac{u^{(s)}}{r} \right) = \sigma_\theta^{(s)} - \nu (\sigma_r^{(s)} + \sigma_z^{(s-2)}) & (1.3) \\ E \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = \sigma_z^{(s-4)} - \nu (\sigma_r^{(s-2)} + \sigma_\theta^{(s-2)}), & E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \theta} + \frac{\partial v^{(s)}}{\partial r} - \frac{v^{(s)}}{r} \right) = 2(1 + \nu) \tau_{r\theta}^{(s)} \\ E \left(\frac{\partial v^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \theta} \right) = 2(1 + \nu) \tau_{\theta z}^{(s-2)}, & E \left(\frac{\partial w^{(s)}}{\partial r} + \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} \right) = 2(1 + \nu) \tau_{rz}^{(s-2)} \end{aligned}$$

Решение системы (1.3) представим в виде суммы $Q_i^{(s)} + Q^*^{(s)}$, $Q_i^{(s)}$ — решение однородной системы, которую получим, если в уравнениях (1.3) отбросим члены с верхними индексами $(s-2)$ и $(s-4)$; а $Q^*^{(s)}$ — какое-либо частное решение неоднородной системы (1.3), в которой величины с верхними индексами $(s-2)$ и $(s-4)$ рассматриваются как известные. Решение $Q_i^{(s)}$ легко получаем в виде

$$\begin{aligned} w_i^{(s)} &= w_0^{(s)}(r, \theta), & u_i^{(s)} &= \zeta u_1^{(s)}(r, \theta), & v_i^{(s)} &= \zeta v_1^{(s)}(r, \theta) \\ \sigma_{ri}^{(s)} &= \zeta \sigma_{r1}^{(s)}(r, \theta), & \sigma_{\theta i}^{(s)} &= \zeta \sigma_{\theta 1}^{(s)}(r, \theta) \\ \tau_{r\theta i}^{(s)} &= \zeta \tau_{r\theta 1}^{(s)}(r, \theta), & \tau_{rzi}^{(s)} &= \zeta^2 \tau_{rz2}^{(s)}(r, \theta) + \tau_{rz0}^{(s)}(r, \theta) & (1.4) \\ \tau_{\theta zi}^{(s)} &= \zeta^2 \tau_{\theta z2}^{(s)}(r, \theta) + \tau_{\theta z0}^{(s)}(r, \theta), & \sigma_{zi}^{(s)} &= \zeta^3 \sigma_{z3}^{(s)}(r, \theta) + \zeta \sigma_{z1}^{(s)}(r, \theta) \end{aligned}$$

(здесь оставлены только те степени ζ , которые соответствуют задаче об изгибе).

Имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
 u_1^{(s)} &= -\frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial r}, & v_1^{(s)} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial \theta} \\
 \sigma_{r1}^{(s)} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial \theta^2} \right) \right] \\
 \sigma_{\theta 1}^{(s)} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial r^2} \right] \\
 \tau_{r\theta 1}^{(s)} &= -\frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial \theta} \right] \\
 \tau_{rz 2}^{(s)} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w_0^{(s)}), & \tau_{\theta z 2}^{(s)} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta w_0^{(s)}) \\
 \sigma_{z3}^{(s)} &= -\frac{E}{6(1-\nu^2)} \Delta \Delta w_0^{(s)}, & \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Величины $Q^{*(s)}$ выражаются элементарно при помощи квадратур по ζ : рекуррентные формулы для них аналогичны соответствующим формулам в декартовых координатах. Как и в декартовой системе, $Q^{*(s)} \equiv 0$ при $s = 1, 2$.

Используя граничные условия на верхней и нижней плоскостях пластинки

$$\sigma_z^{(1)} = \pm \frac{1}{2} p(r, \theta), \quad \sigma_z^{(s)} = 0 \quad (s \geq 2), \quad \tau_{rz}^{(s)} = \tau_{\theta z}^{(s)} = 0 \quad (s \geq 1) \quad \text{при } \zeta = \pm 1 \tag{1.6}$$

получаем

$$\begin{aligned}
 \sigma_{z3}^{(1)} &= -\frac{1}{4} p, \quad \sigma_{z1}^{(1)} = \frac{3}{4} p, \quad \sigma_{z3}^{(2)} = \sigma_{z1}^{(2)} = 0 \\
 \sigma_{z3}^{(s)} &= \frac{1}{2} \left[\sigma_z^{*(s)} - \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=1} \quad (s > 2) \\
 \sigma_{z1}^{(s)} &= -\frac{1}{2} \left[3\sigma_z^{*(s)} - \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=1} \quad (s > 2) \\
 \tau_{rz 0}^{(1)} &= -\tau_{rz 2}^{(1)}, \quad \tau_{rz 0}^{(2)} = -\tau_{rz 2}^{(2)}, \quad \tau_{rz 0}^{(s)} = -\tau_{rz 2}^{(s)} - \tau_{rz}^{*(s)} \Big|_{\zeta=1} \quad (s > 2) \\
 \tau_{\theta z 0}^{(1)} &= -\tau_{\theta z 2}^{(1)}, \quad \tau_{\theta z 0}^{(2)} = -\tau_{\theta z 2}^{(2)}, \quad \tau_{\theta z 0}^{(s)} = -\tau_{\theta z 2}^{(s)} - \tau_{\theta z}^{*(s)} \Big|_{\zeta=1} \quad (s > 2)
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Из формул (1.4) и (1.5) видно, что величины $Q_i^{(s)}$ выражаются через функцию $w_0^{(s)}$, которая удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w_0^{(s)} = -\frac{4h^3}{D} \sigma_{z3}^{(s)}, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \tag{1.8}$$

2. Напряженные состояния, сколь угодно быстро затухающие (при достаточно малом h) при удалении от края, определяются в работе [1] при помощи первого и второго вариантов вспомогательного итерационного процесса.

Для первого варианта q в формуле (1.1) принимает следующие значения

$$\begin{aligned}
 q = \lambda & \text{ для } \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, & q = \lambda - 1 & \text{ для } \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{rz} \\
 q = \lambda - 2 & \text{ для } u, w, & q = \lambda - 1 & \text{ для } v
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Система уравнений для $Q_{(1)}^{(s)}$ в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_r^{(s)}}{\partial \rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(s)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\sigma_r^{(s-1)} - \sigma_\theta^{(s-1)}}{r} = 0, & \quad E \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \rho} = \sigma_r^{(s)} - \nu (\sigma_\theta^{(s)} + \sigma_z^{(s)}) \\
 \frac{\partial \tau_{rz}^{(s)}}{\partial \rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}^{(s)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\tau_{rz}^{(s-1)}}{r} = 0, & \quad E \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = \sigma_z^{(s)} - \nu (\sigma_r^{(s)} + \sigma_\theta^{(s)})
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \theta} + \frac{u^{(s-1)}}{r} \right) &= \sigma_{\theta}^{(s)} - \nu(\sigma_r^{(s)} + \sigma_z^{(s)}), & E \left(\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \rho} + \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} \right) &= 2(1 + \nu) \tau_{rz}^{(s)} \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}^{(s)}}{\partial \rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}^{(s-2)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{2\tau_{r\theta}^{(s-1)}}{r} &= 0, & E \left(\frac{\partial v^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial \theta} \right) &= 2(1 + \nu) \tau_{\theta z}^{(s)} \\
E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \theta} + \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \rho} - \frac{v^{(s-1)}}{r} \right) &= 2(1 + \nu) \tau_{r\theta}^{(s)} & & (2.3)
\end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем переменные ρ и ζ введены заменой

$$\frac{\partial}{\partial z} = h^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = h^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho}$$

Скорости изменения всех напряжений и перемещений по переменным ρ , θ и ζ считаются величинами одного порядка. Величина r , входящая в уравнения, определяется равенством $r = R - \delta h$, где $0 \leq \delta \leq 1$.

Решение системы (2.2) — (2.3) также полагаем в виде $Q_{(1)}^{(s)} = Q_{(1)}^{[s]} + Q_{(1)}^{*(s)}$, где $Q_{(1)}^{[s]}$ и $Q_{(1)}^{*(s)}$ имеют такой же смысл, как и для основного итерационного процесса.

Легко видеть, что в цилиндрических координатах будут равны нулю только $Q_{(1)}^{*(1)}$ (в декартовых координатах тождественно равны нулю $Q_{(1)}^{*(1)}$ и $Q_{(1)}^{*(2)}$).

Уравнения, которым удовлетворяют $Q_{(1)}^{[s]}$, распадаются на две системы, причем основной является однородная система, соответствующая (2.3). Уравнения этой основной системы совпадают с уравнениями кручения призматических стержней.

Легко показать, что величины $Q_{(1)}^{[s]}$ выражаются через гармоническую функцию $\Psi(\rho, \zeta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta(1)}^{[s]} &= \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \rho}, & \tau_{\theta z(1)}^{[s]} &= \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \zeta}, & E v_{(1)}^{[s]} &= 2(1 + \nu) \Psi_{\theta}^{(s)} \\
E u_{(1)}^{[s]} &= -2(1 + \nu) \int \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \theta} d\rho, & \tau_{rz(1)}^{[s]} &= -\int \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \zeta \partial \theta} d\rho & & (2.4) \\
\sigma_r^{[s]} &= -2 \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \theta}, & \sigma_{\theta(1)}^{[s]} &= 2 \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \theta}, & E w_{(1)}^{[s]} &= 0, \quad \sigma_z^{[s]} = 0
\end{aligned}$$

Для второго варианта вспомогательного итерационного процесса q в (1.1) принимает следующие значения

$$\begin{aligned}
q = \mu - 1 & \text{ для } \sigma_r, \sigma_{\theta}, \sigma_z, \tau_{rz}, & q = \mu - 2 & \text{ для } \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z} \\
q = \mu - 2 & \text{ для } u, w, & q = \mu - 3 & \text{ для } v
\end{aligned} \quad (2.5)$$

Система уравнений для $Q_{(2)}^{(s)}$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_r^{(s)}}{\partial \rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(s-2)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\sigma_z^{(s-1)} - \sigma_{\theta}^{(s-1)}}{r} &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{rz}^{(s)}}{\partial \rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}^{(s-2)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\tau_{rz}^{(s-1)}}{r} &= 0
\end{aligned} \quad (2.6)$$

$$E \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \rho} = \sigma_r^{(s)} - \nu(\sigma_{\theta}^{(s)} + \sigma_z^{(s)}), \quad E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v^{(s-2)}}{\partial \theta} + \frac{u^{(s-1)}}{r} \right) = \sigma_{\theta}^{(s)} - \nu(\sigma_r^{(s)} + \sigma_z^{(s)})$$

$$E \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = \sigma_z^{(s)} - \nu(\sigma_r^{(s)} + \sigma_{\theta}^{(s)}), \quad E \left(\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \rho} + \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} \right) = 2(1 + \nu) \tau_{rz}^{(s)}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}^{(s)}}{\partial \rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}^{(s)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{2\tau_{r\theta}^{(s-1)}}{r} = 0$$

$$E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \theta} + \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \rho} - \frac{v^{(s-1)}}{r} \right) = 2(1 + \nu) \tau_{r\theta}^{(s)}, \quad E \left(\frac{\partial v^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \theta} \right) = 2(1 + \nu) \tau_{\theta z}^{(s)} \quad (2.7)$$

Общее решение этой системы полагаем в виде $Q_{(2)}^{(s)} = Q_{(2)}^{[s]} + Q_{(2)}^{*(s)}$, и здесь $Q_{(2)}^{*(1)} \equiv 0$ и $Q_{(2)}^{*(s)}$ отлично от нуля при $s \geq 2$.

Однородная система, которую получим, если в уравнениях (2.6) — (2.7) положим равными нулю величины с верхними индексами $(s - 1)$ и $(s - 2)$, распадается на две, причем основной будет система, соответствующая (2.6). Уравнения основной системы совпадают с уравнениями задачи о плоской деформации.

Напряжения и перемещения $Q_{(2)}^{[s]}$ выражаются через бигармоническую функцию $\Phi^{(s)}(\rho, \zeta)$.

3. Построение напряженного состояния изгиба пластинки сводится к последовательному (в порядке возрастания s) построению функций $w_0^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$, $\Phi^{(s)}$.

Граничные условия для определения этих функций выведены в работе [1] в декартовых координатах; в цилиндрических координатах они будут отличаться только наличием членов с $Q_{(1)}^{*(2)}$ и $Q_{(2)}^{*(2)}$.

В формулах (2.1) и (2.5) в случае пластинки со свободным краем берется $\lambda = 2$, $\mu = 2$.

Для определения функций $w_0^{(s)}$ имеем уравнение (1.8), в котором $\sigma_{z3}^{(s)}$ в правой части определяется по формулам (1.7); в частности,

$$\sigma_{z3}^{(1)} = -1/4 P, \quad \sigma_{z3}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{z3}^{(3)} = \frac{8 - 3\nu}{40(1 - \nu)} \Delta p \quad (2.8)$$

Граничные условия для первых трех приближений имеют вид при $r = R$

$$\sigma_{r1}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{r1}^{(2)} = -\frac{3}{2} \int_{-1}^1 \zeta \sigma_{r(1)}^{[1]} d\zeta, \quad \sigma_{r1}^{(3)} = -\frac{3}{2} \int_{-1}^1 \zeta (\sigma_r^{*(3)} + \sigma_r^{[2]} + \sigma_r^{*(1)} + \sigma_r^{*(2)}) d\zeta$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta 1}^{(1)}}{\partial \theta} - 2\tau_{rz 2}^{(1)} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta 1}^{(2)}}{\partial \theta} - 2\tau_{rz 2}^{(2)} = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 d\zeta \int_{-1}^{\zeta} \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^{*(2)}}{\partial \theta} d\zeta - \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (\tau_{rz}^{*(1)} + \tau_{rz}^{*(2)}) d\zeta$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta 1}^{(3)}}{\partial \theta} - 2\tau_{rz 2}^{(3)} = & \frac{3}{2} \int_{-1}^1 d\zeta \int_{-1}^{\zeta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}^{*(3)} + \tau_{r\theta}^{*(1)} + \tau_{r\theta}^{[1]}) d\zeta - \\ & - \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (\tau_{rz}^{*(3)} + \tau_{rz}^{*(1)} + \tau_{rz}^{*(2)}) d\zeta \end{aligned}$$

Функция $\Psi^{(s)}$ — гармоническая, т. е. $\Delta \Psi^{(s)}(\rho, \zeta) = 0$ в полуполосе $\rho \leq R/h$, $\zeta = \pm 1$.

При $\rho \rightarrow 0$ функция $\Psi^{(s)}$ вместе с производными до второго порядка должна убывать до нуля, что обеспечивает затухание этого напряженного состояния при удалении от края внутрь пластинки.

Граничные условия для $\Psi^{(s)}$, в частности для $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$, имеют вид

$$\partial \Psi^{(s)} / \partial \zeta = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1$$

$$\tau_{r\theta}^{[1]} = -\zeta \tau_{r\theta 1}^{(1)}, \quad \tau_{r\theta}^{[2]} = -\zeta \tau_{r\theta 1}^{(2)} - \tau_{r\theta}^{*(2)} \quad \text{при } \rho = R/h \quad (2.10)$$

Функция $\Phi^{(s)}$ — бигармоническая, т. е. $\Delta \Delta \Phi^{(s)}(\rho, \zeta) = 0$ в полуполосе $\zeta = \pm 1$, $\rho \leq R/h$, она должна убывать до нуля вместе с производными до третьего порядка при $\rho \rightarrow 0$.

Граничные условия для $\Phi^{(s)}$, в частности для $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$, имеют вид

$$\text{при } \zeta = \pm 1 \quad \Phi^{(s)} = 0, \quad \partial\Phi^{(s)} / \partial\zeta = 0$$

$$\text{при } \rho = R/h \quad \sigma_r^{[1]} = -\sigma_r^{[1]} + \frac{3}{2} \zeta \int_{-1}^1 \zeta \sigma_r^{[1]} d\zeta, \quad \frac{d\tau_{rz}^{[1]}}{d\zeta} = 0$$

$$\sigma_r^{[2]} = -\sigma_r^{[1]} - \sigma_r^{*(2)} - \sigma_r^{*(2)} - \sigma_r^{*(3)} - \frac{3}{2} \zeta \int_{-1}^1 \zeta (\sigma_r^{*(3)} + \sigma_r^{[2]} + \sigma_r^{*(2)} + \sigma_r^{*(2)}) d\zeta$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}^{[2]}}{\partial\zeta} = -\frac{\partial\tau_{rz}^{*(2)}}{\partial\zeta} + \zeta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{r\theta}^{(2)}}{\partial\theta} - 2\tau_{rz}^{(2)} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{r\theta}^{*(2)}}{\partial\theta} - \frac{\partial\tau_{rz}^{*(2)}}{\partial\zeta}$$

Заметим, что в осесимметричном случае изгиба пластинки для определения функций $\Psi^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$, $w_0^{(2)}$, $\Psi^{(2)}$ будем иметь однородные уравнения с однородными граничными условиями; следовательно, в этом случае эти функции тождественно равны нулю.

4. Будем называть скорость возрастания или убывания (с убыванием h) напряжений и перемещений порядком их. Тогда порядок напряжений и перемещений, определяемых функцией $w^{(s)} = h^{s-4} w_0^{(s)}$, как вытекает из (1.2), будет

$$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta} \sim h^{s-3}, \quad \tau_{rz}, \tau_{\theta z} \sim h^{s-2}, \quad \sigma_z \sim h^{s-1}, \quad u, v \sim h^{s-3}, \quad w \sim h^{s-4} \quad (4.1)$$

для величин, связанных с $\Psi^{(s)}$, как следует из (2.1)

$$\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z} \sim h^{s-3}, \quad \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz} \sim h^{s-2}, \quad u, w \sim h^{s-1}, \quad v \sim h^{s-2} \quad (4.2)$$

для величин, связанных с $\Phi^{(s)}$, как видно из (2.5)

$$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz} \sim h^{s-2}, \quad \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z} \sim h^{s-1}, \quad u, w \sim h^{s-1}; \quad v \sim h^s \quad (4.3)$$

Проблему построения различных приближенных теорий изгиба пластинок можно трактовать как проблему построения того или иного числа приближений в основном и вспомогательных итерационных процессах. Так, классическую теорию можно рассматривать как задачу построения первого приближения основного итерационного процесса.

Основное напряженное состояние определяет с той или иной точностью напряжения вдали от краев пластинки. При $s = 1$ из (4.1) вытекает, что вдали от краев пластинки главными напряжениями будут напряжения σ_r, σ_θ и $\tau_{r\theta}$; напряжения $\tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ и особенно σ_z являются второстепенными.

У свободного края пластинки (здесь рассматривается только свободный край) на основное напряженное состояние накладываются вспомогательные, весьма быстро (при малом h) затухающие при удалении от края напряженные состояния. О порядке напряжений этих краевых напряженных состояний можно судить по формулам (4.2) и (4.3). При $s = 1$ из (4.2) вытекает, что поправки, которые при этом получают на краю главные напряжения основного напряженного состояния, для σ_r и σ_θ будут относительно малы, однако $\tau_{r\theta}$ получает поправку того же порядка, что и само $\tau_{r\theta}$ в основном напряженном состоянии. Кроме того, на краю добавляется напряжение $\tau_{\theta z}$, порядок которого совпадает с порядком главных напряжений в основном напряженном состоянии. (По классической теории на краю неправильно определяется даже порядок $\tau_{\theta z}$.) Заметим, что наличие на свободном краю напряжений $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{\theta z}$ того же порядка, что и главные напряжения, определяемые классической теорией, обуславливается напряженным состоянием краевого скручивания.

Из проведенного анализа, который относится только к случаю свободного края, вытекает, что с помощью классической теории пластинок можно построить в первом приближении напряженное состояние как вдали от края, так и на краю только в осесимметричном случае изгиба, когда напряженное состояние краевого скручивания отсутствует. В неосесимметричном случае для построения в первом приближении напряженного состояния и вдали от края, и на краю необходимо построить функции $w_0^{(1)}$ и $\Psi^{(1)}$. При этом напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ и $\tau_{\theta z}$ будут величинами порядка h^{-2} , $\tau_{rz} \sim h^{-1}, \sigma_z \sim h^0$.

Первое уточнение, т. е. уточнение в членах порядка h по сравнению с членами порядка h^0 , вдали от края определяется функцией $w_0^{(2)}$; чтобы получить уточнение такого же порядка для краевых напряжений, надо строить еще и функции $\Phi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$.

В осесимметричном случае изгиба $w_0^{(2)} \equiv 0$, поэтому первое уточнение напряжений вдали от края определяется функцией $w_0^{(3)}$ и для σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ будет порядка h^0 .

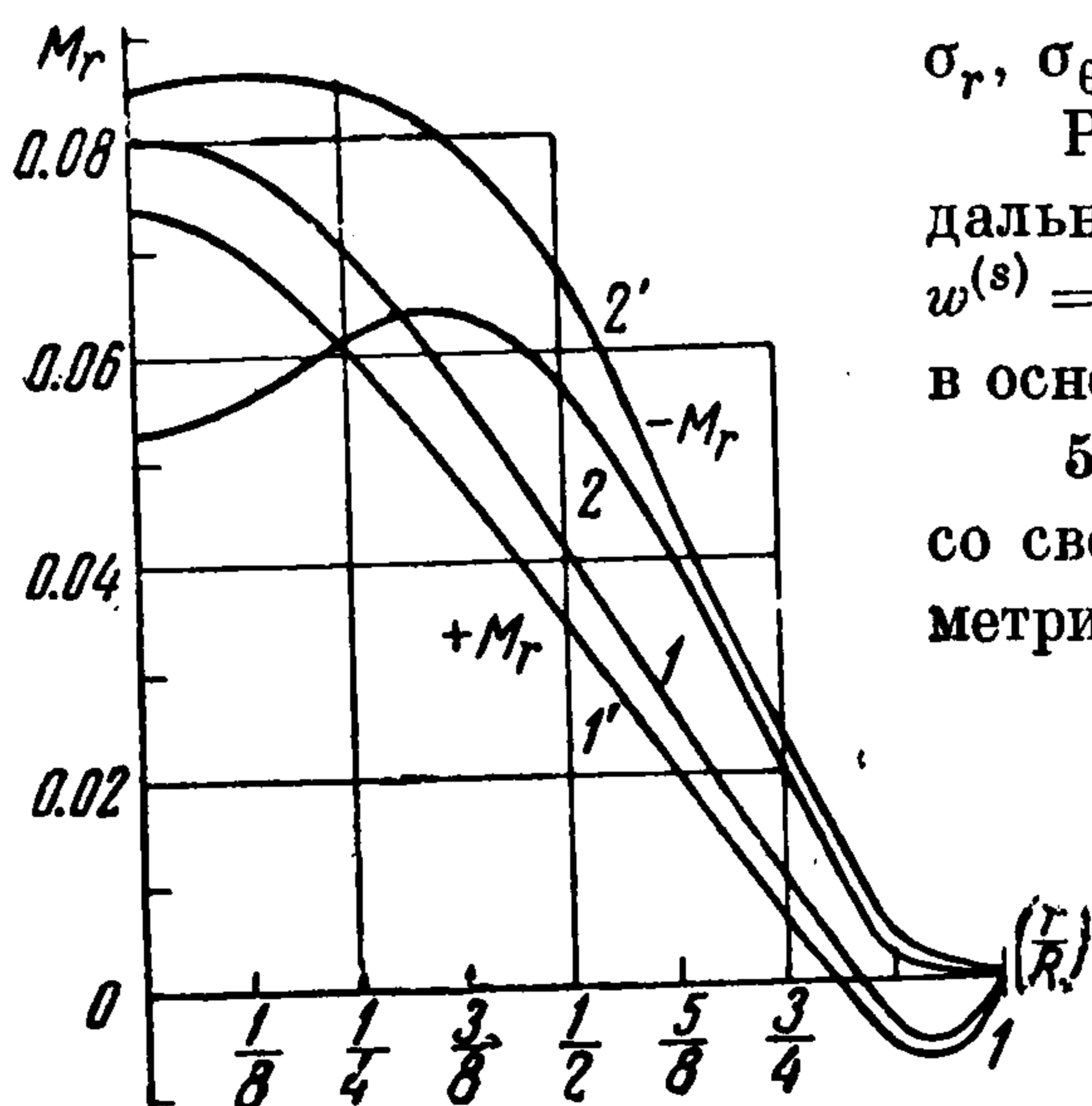
Рассмотрим несколько примеров, причем везде в дальнейшем вместо $w_0^{(s)}$ будем пользоваться функцией $w^{(s)} = h^{s-4} w_0^{(s)}$, смысл которой ясен из ряда (1.1) для w в основном итерационном процессе.

5. Круглая пластинка радиуса R и толщиной $2h$ со свободным краем изгибается под действием осесимметричной нагрузки интенсивности

$$p = p_0 \cos nr$$

Нагрузка будет самоуравновешенной, если n удовлетворяет уравнению (5.1)

$$n = \frac{2k\pi}{R} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \frac{nR}{2} = nR \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$



Будем уточнять значения напряжений только вдали от края, для чего построим только функции $w^{(1)}$ и $w^{(3)}$.

Для $w^{(1)}$ в осесимметричном случае имеем

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^2 w^{(1)} = \frac{P_0}{D} \cos nr, \quad \sigma_{r1}^{(1)} = 0, \quad \tau_{rz2}^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad r = R$$

При этом

$$w^{(1)} = -\frac{P_0 r^2}{8Dn^2(1+\nu)} \left[-4 \cos nR - (3+\nu) + \frac{6(1-\nu)}{nR} \sin nR - \frac{6(1-\nu)}{n^2 R^2} (1 - \cos nR) - 2(1+\nu) F(R) \right] + \frac{P_0}{4Dn^2} \left[-\frac{r}{n} \sin nr + \frac{5}{n^2} \cos nr + \left(\frac{6}{n^2} - r^2\right) F(r) \right] \left(F(r) = \int \frac{1 - \cos nr}{r} dr \right)$$

Для $w^{(3)}$ получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^2 w^{(3)} = \frac{1}{D} \frac{(8-3\nu) P_0 h^2}{10(1-\nu)} \left(n^2 \cos nr + \frac{n \sin nr}{r} \right)$$

$$\sigma_{r1}^{(3)} = \frac{3(8-3\nu) P_0}{20(1-\nu)} \cos nR - \frac{3(8+\nu) P_0}{20} \left[\frac{1}{nR} \sin nR - \frac{1 - \cos nR}{n^2 R^2} \right] \quad \text{при} \quad r = R$$

Отсюда

$$w^{(3)} = -\frac{P_0 h^2 r^2}{40D(1-\nu^2)} \left[-(3+\nu)(8-3\nu) - 2(1+\nu)(8-3\nu) F(R) + \frac{2(1-\nu)(8-7\nu)}{nR} \sin nR - \frac{2(1-\nu)(8-7\nu)}{n^2 R^2} (1 - \cos nR) \right] + \frac{P_0 h^2 (8-3\nu)}{40D(1-\nu)} \left[\frac{2r}{n} \sin nr + \frac{6}{n^2} \cos nr - \left(2r^2 - \frac{8}{n^2} \right) F(r) \right]$$

Из приведенных графиков (фигура) изгибающих моментов $M_r^{(1)}$ (1 и 2) и $M_r^{(1)} + M_r^{(3)}$ (1' и 2') для случаев наименьших корней уравнений (5.1) и $h/R = 0,1$ видно, что для $n_1 = 2.332 R^{-1}$, когда скорость изменения нагрузки вдоль радиуса не очень велика, поправки, определяемые функцией $w^{(3)}$, будут не очень значительными. В случае $n_2 = 2\pi/R$ эти поправки оказываются весьма значительными: уже для $h/R = 0.1$ они соизмеримы с величинами, получающимися по классической теории.

Следует отметить, что для некоторых видов нагрузки поправки, определяемые функцией $w^{(3)}$, будут очень малы. Так, в частности, для самоуравновешенной параболической нагрузки поправки не превышают 1%. Из этого можно сделать вывод, что существуют нагрузки, для которых классическая теория будет достаточно точной.

В качестве примера неосесимметричного изгиба рассмотрим задачу, связанную с концентрацией напряжений.

Будем рассматривать цилиндрический изгиб бесконечной пластинки с круговым отверстием радиуса R .

Напряжения в пластинке будем представлять в виде $Q = Q^{(0)} + Q^{(c)}$, где $Q^{(c)}$ — напряжения в сплошной пластинке под действием изгибающих моментов $M_x = M$ и $M_y = 0$, приложенных на бесконечности, $Q^{(0)}$ — напряжения в пластинке с отверстием, находящейся под действием системы сил, приложенных к контуру.

Как известно [2, 3], в сплошной бесконечной пластинке при цилиндрическом изгибе в сечении, соответствующем контуру отверстия, имеем напряженное состояние

$$M_r^{(c)} = +1/2 M (1 + \cos 2\theta), \quad M_\theta^{(c)} = 1/2 M (1 - \cos 2\theta), \quad H_{r\theta}^{(c)} = -1/2 M \sin 2\theta$$

$$V_r^{(c)} = Q_r^{(c)} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{r\theta}^{(c)}}{\partial \theta} = -MR^{-1} \cos 2\theta, \quad Q_r^{(c)} = 0, \quad Q_\theta^{(c)} = 0 \quad (4.4)$$

Величины $Q^{(0)}$ будем определять изложенным выше методом. Так как рассматривается задача о перераспределении напряжений на контуре отверстия, будем строить только функции $w^{(1)}$ и $\Psi^{(1)}$. В рассматриваемом случае напряжения, приложенные к контуру отверстия, имеют вид

$$\sigma_r = -3/4 M h^{-2} \zeta (1 + \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = 3/4 M h^{-2} \zeta \sin 2\theta, \quad \tau_{rz} = 0$$

При этом для функции $w^{(1)}$ будем иметь однородное уравнение $\Delta \Delta w^{(1)} = 0$ с неоднородными граничными условиями

$$\sigma_{r1}^{(1)} = -3/4 M (1 + \cos 2\theta), \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta 1}^{(1)}}{\partial \theta} - 2\tau_{rz 2}^{(1)} = MR^{-1} \cos 2\theta \quad \text{при } r = R$$

При этом

$$w^{(1)} = -\frac{MR^2}{2D} \left[\frac{1}{1-\nu} \ln r + \frac{1}{3+\nu} \left(1 - \frac{R^2}{2r^2} \right) \cos 2\theta \right]$$

На контуре отверстия

$$M_\theta^{(1)} = \frac{M}{2} \left[1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \cos 2\theta \right], \quad H_{r\theta}^{(1)} = -\frac{M(1-\nu)}{2(3+\nu)} \sin 2\theta$$

$$Q_\theta^{(1)} = \frac{4M}{(3+\nu)R} \sin 2\theta$$

Для функции $\Psi^{(1)}$ имеем гармоническое уравнение $\Delta \Psi^{(1)}(\rho, \zeta) = 0$ с граничными условиями

$$\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1, \quad \tau_{r\theta(1)}^{(1)} = \zeta \left[\frac{3M}{4} + \frac{3M(1-\nu)}{4(3+\nu)} \right] \sin 2\theta \quad \text{при } \rho = R/h$$

При этом $\Psi^{(1)}$ получаем в виде

$$\Psi^{(1)} = \frac{48M \sin 2\theta}{(3+\nu)\pi^3} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s-1)^3} \exp \left[\frac{(2s-1)\pi}{2} \left(\frac{R}{h} - \rho \right) \right] \sin \frac{(2s-1)\pi}{2} \zeta$$

На контуре отверстия

$$M_\theta^{(1)} = -\frac{5.07M \cos 2\theta}{3+\nu} \frac{h}{R}, \quad H_{r\theta(1)}^{(1)} = \frac{2M \sin 2\theta}{3+\nu}, \quad Q_\theta^{(1)} = -\frac{3.38 M h^{-1}}{3+\nu} \sin 2\theta$$

Таким образом, на контуре отверстия получаем

$$M_\theta = M_\theta^{(c)} + M_\theta^{(1)} + M_\theta^{(1)} = M \left\{ 1 - \frac{1}{3+\nu} \left[2(1+\nu) + 5.07 \frac{h}{R} \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$H_{r\theta} = H_{r\theta}^{(c)} + H_{r\theta}^{(1)} + H_{r\theta(1)}^{(1)} = 0$$

$$Q_\theta = Q_\theta^{(c)} + Q_\theta^{(1)} + Q_\theta^{(1)} = \frac{M h^{-1}}{3+\nu} \left[4 \frac{h}{R} - 3.38 \right] \sin 2\theta$$

При $\nu = 0.3$, $R/h = 10$, $\theta = 1/2 \pi$ получим $\max M_\theta = 1.94 M$, $k = 1.94$.

При $\nu = 0.3$, $R/h = 3$, $\theta = 1/2 \pi$ получим $\max M_\theta = 2.3 M$, $k = 2.3$.

По классической теории коэффициент концентрации в этом случае $k = 1.79$, независимо от R/h . Следовательно, если концентрацию напряжений определять только по M_θ , можно утверждать, что данные классической теории будут относительно верными только для $R/h > 10$. Однако при этом, как видно из выражения для Q_θ , поперечные касательные напряжения $\tau_{\theta z}$ не будут пренебрежимо малыми и их нельзя не учитывать.

При малых R/h коэффициент концентрации возрастает и данные классической теории становятся весьма неточными. Так, уже для $R/h = 3$ погрешность при определении коэффициента концентрации составляет около 25% (по теории Рейсснера — свыше 10%) [4]. Однако, при весьма малых R/h ($R/h < 1$) задача становится существенно трехмерной и к ней нельзя применить какие-либо приближенные методы, в том числе и метод, применявшийся в настоящей статье.

Поступила 29 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
2. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1951.
3. Лехницкий С. Г. О некоторых случаях изгиба изотропной пластинки, ослабленной круговым отверстием. Вестник инженеров и техников, 1936, № 12.
4. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Физматгиз, 1963.

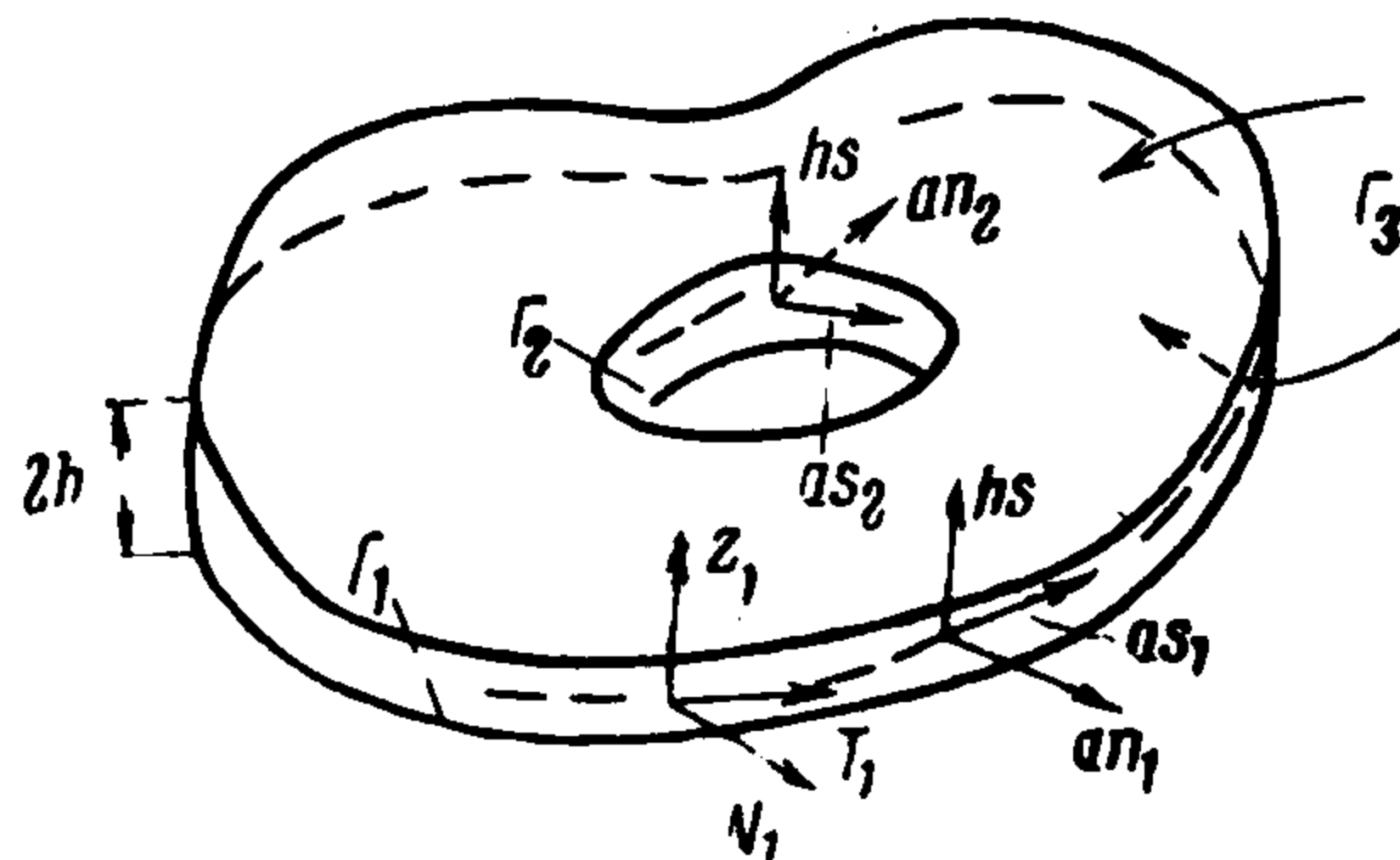
ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ

О. К. Аксентян, И. И. Ворович

(Ростов-на-Дону)

В работе изучается возможность применения уравнений прикладной теории изгиба плит для расчета концентраций напряжений. Используются асимптотические разложения решений соответствующих задач теории упругости для плиты, полученные в [1]. Показывается, что в ряде случаев расчет концентрации напряжений на основе прикладной теории возможен.

§ 1. Рассмотрим тонкую плиту толщиной $2h$, ограниченную цилиндрической поверхностью Γ_1 . Допустим, что плита имеет отверстие, ограниченное цилиндрической поверхностью Γ_2 (см. фигуру). Будем считать, что расстояние между Γ_1 и Γ_2 достаточно велико по сравнению с толщиной плиты. Вместе с тем будем считать, что диаметр a отверстия также значительно превосходит толщину плиты. Примем, что поверхность плиты Γ_1 загружена некоторой системой усилий, статически эквивалентной нулю, а плоские грани плиты Γ_3 свободны от напряжений. В этом случае, как известно, на Γ_2 возникает концентрация напряжений.



Методы расчета концентрации напряжений в таких задачах на основе прикладной теории рассматривались в ряде работ. Изложение результатов можно найти в [2].

Основная цель, преследуемая в работе, заключается в выяснении связи между соотношениями прикладной теории и точным решением соответствующей задачи теории упругости.