

## К РЕШЕНИЮ ОДНОГО ТИПА ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. Александров (Ростов-на-Дону)

Многие пространственные смешанные задачи теории упругости могут быть приведены к решению интегрального уравнения следующего вида (например, контактные задачи для упругого слоя)

$$\int_{\Omega} \varphi(P) K\left(\frac{R}{h}\right) dP = 2\pi h f(Q) \quad \left( \begin{array}{l} Q \in \Omega \\ h \in (0, \infty), \end{array} \quad R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right) \quad (1)$$

где  $Q$  — точка с координатами  $(x, y)$ , а  $P$  — точка с координатами  $(\xi, \eta)$ . Ядро уравнения (1) дается формулой

$$K(k) = \int_0^{\infty} L(u) J_0(uk) du \quad \left( k = \frac{R}{h} \right) \quad (J_0(x) — \text{функция Бесселя}) \quad (2)$$

причем  $L(u)$  — непрерывная функция и

$$L(u) \rightarrow 1 \quad \text{при } u \rightarrow \infty, \quad L(u) \rightarrow Au \quad \text{при } u \rightarrow 0 \quad (A = \text{const}) \quad (3)$$

Относительно области  $\Omega$  будем предполагать, что она односвязная, выпуклая и ограничена достаточно гладкой кривой  $L$ .

Введем в рассмотрение параметр  $\lambda = h/\rho$  (где  $\rho = 1/2 \max_{\Omega} R$ ). При значениях этого параметра  $\lambda > 1$  решение уравнения (1) может быть получено достаточно просто, если известно решение вспомогательного интегрального уравнения [1]

$$\int_{\Omega} \frac{\varphi(P)}{R} dP = 2\pi f(Q), \quad Q \in \Omega \quad (4)$$

Однако используемые при этом методы для значений  $\lambda < 1$  становятся либо мало эффективными, либо вовсе неприменимыми.

Выручает здесь только то, что при очень малых значениях  $\lambda$  может быть найдено [1] очень простое вырожденное решение уравнения (1)

$$\varphi(Q) = \frac{f(Q)}{Ah}, \quad Q \in \Omega \quad (5)$$

Это решение может практически использоваться в довольно широком диапазоне изменения параметра  $\lambda$ , а именно при  $\lambda \leq \lambda_0$  (об определении величины  $\lambda_0$  см. ниже).

Следует только отметить, что вырожденное решение (5) обладает одним существенным недостатком. Именно, можно показать, что решение уравнения (1) при любых значениях параметра  $\lambda \in (0, \infty)$  должно иметь на контуре  $L$  области  $\Omega$  особенность типа  $1/\sqrt{R}$ . Из этого следует, что вырожденное решение (5) при значениях  $Q$ , близких к  $L$ , будет давать неверные результаты. Исходя из всего вышесказанного зададимся целью получить практически удобное приближенное решение уравнения (1), пригодное для значений  $0 < \lambda \leq 1$  и имеющее на контуре  $L$  особенность вида  $1/\sqrt{R}$ .

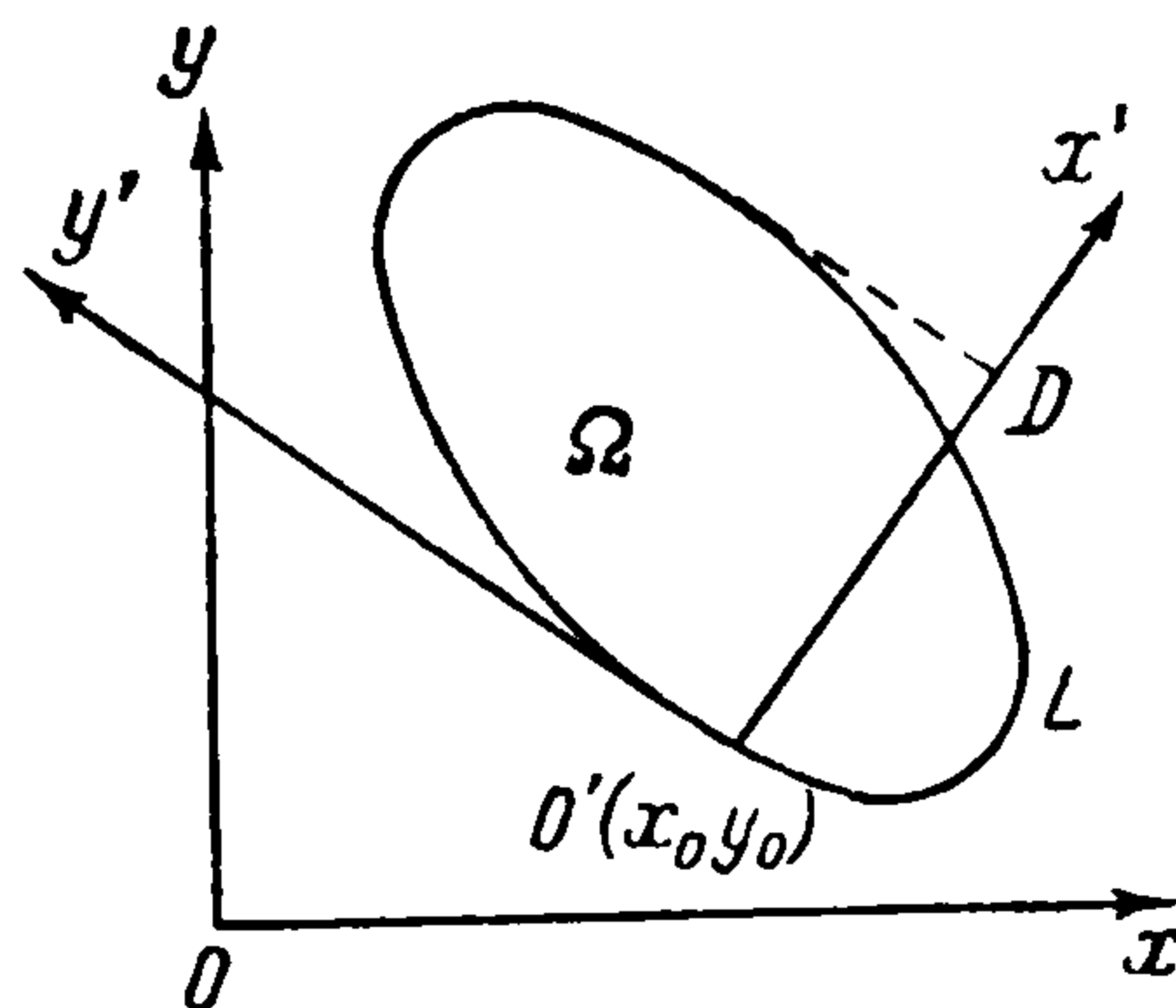
Имея в виду первую из формул (3.10) работы [2], будем стремиться получить указанное решение уравнения (1) для случая  $f(Q) \equiv \mu$  ( $\mu = \text{const}$ ). Это решение, очевидно, должно иметь вид

$$\varphi(Q) = \frac{\mu}{Ah} [1 + \Phi(Q)] \quad (6)$$

где функция  $\Phi(Q)$  имеет особенность типа  $1/\sqrt{R}$  на  $L$  и быстро стремится к нулю, когда точка  $Q$  удаляется от контура  $L$ .

Итак, дело сводится к нахождению функции  $\Phi(Q)$  с указанными свойствами.

Пусть  $y = \omega(x)$  — уравнение контура  $L$  области  $\Omega$ , и пусть  $O'$  — точка на  $L$  с координатами  $x_0, y_0$ . Перейдем к новой декартовой системе координат с началом в точке  $O'$ , причем ось  $O'y'$  направим по касательной к контуру  $L$ , ось  $O'x'$  — внутрь области  $\Omega$ .



Переход от старых координат  $x, y$  к новой  $x'$  может быть осуществлен по формуле

$$x' = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \omega'^2(x_0)}} [(x - x_0) \omega'(x_0) \mp \omega(x_0) - y] \quad (7)$$

Формула перехода от  $x, y$  к  $y'$  в дальнейшем не понадобится. Пусть  $d$  — длина прямой  $O'D$ , а уравнение контура в новой системе координат имеет вид

$$y' = \begin{cases} \psi_1(x') & (y' < 0) \\ \psi_2(x') & (y' > 0) \end{cases} \quad (8)$$

тогда в безразмерных переменных

$$a = \frac{x'}{h}, \quad b = \frac{y'}{h}, \quad \alpha = \frac{\xi'}{h}, \quad \beta = \frac{\eta'}{h} \quad (9)$$

уравнение (1) может быть представлено в форме

$$\int_0^{d/h} d\alpha \int_{\psi_1/h}^{\psi_2/h} \varphi_*(\alpha, \beta) K(\sqrt{(a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2}) d\beta = \frac{2\pi\mu}{h} \quad ((a, b) \in \Omega_*) \quad (10)$$

Следуя работе [3], перепишем уравнение (10) в виде

$$\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty \varphi_*(\alpha, \beta) K(\sqrt{(a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2}) d\beta = \frac{2\pi\mu}{h} + F(\varphi_*, h) \quad (11)$$

где через  $F(\varphi_*, h)$  обозначен некоторый интегральный оператор от  $\varphi_*$ , выражение которого в дальнейшем не понадобится; заметим только, что  $F(\varphi_*, 0) \equiv 0$ .

Решая при малых значениях  $\lambda$  интегральное уравнение (11) методом последовательных приближений, можно с достаточной точностью ограничиться нулевым приближением, которое определяется из уравнения

$$\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty \varphi_*(\alpha, \beta) K(\sqrt{(a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2}) d\beta = \frac{2\pi\mu}{h} \quad (12)$$

Легко показать, что решение уравнения (12) будет функцией только от  $\alpha$ , т. е.  $\varphi_*(\alpha, \beta) \equiv \varphi_*(\alpha)$ ; не нарушая общности, уравнение (12) можно переписать в виде

$$\int_0^\infty \varphi_*(\alpha) K_*(a-\alpha) d\alpha = \frac{\pi\mu}{h}, \quad a > 0 \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_*(a-\alpha) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty K(\sqrt{(a-\alpha)^2 + \beta^2}) d\beta = \\ &= \int_0^\infty L(u) du \int_0^\infty J_0(u \sqrt{(a-\alpha)^2 + \beta^2}) d\beta = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos(a-\alpha)u du \end{aligned} \quad (14)$$

Решение уравнения (13) может быть получено в замкнутом виде методом Винера — Хопфа; однако можно указать приближенное решение, удобное для вычислений.

Пользуясь свойствами (3) функции  $L(u)$ , аппроксимируем с достаточной степенью точности (как показывают примеры) ядро (14) уравнения (13) выражением [4]

$$K_*(a-\alpha) = \int_0^\infty \frac{\cos(a-\alpha)u}{\sqrt{u^2 + A^{-2}}} du \quad (15)$$

Тогда решение уравнения (13), соответствующее приближенному решению уравнения (1) при малых  $\lambda$ , может быть достаточно просто найдено методом Винера —

<sup>1</sup> Заметим, что в формулах (14) и (15) работы [3] вместо  $\Phi(D)$  должно быть  $\Phi(D\sqrt{2})$ ; при этом некоторые значения в табл. 1 этой работы изменятся.

Хопфа и имеет вид [3] (здесь  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности)

$$\Phi_*(a) = \varphi(x, y) = \frac{\mu}{Ah} \left[ \Phi \left( \sqrt{\frac{2a}{A}} \right) + \sqrt{\frac{A}{\pi a}} \exp \frac{-a}{A} \right] \quad (16)$$

$$a = \frac{x'}{h} = \pm \frac{1}{h \sqrt{1 + \omega'^2(x_0)}} [(x - x_0) \omega'(x_0) + \omega(x_0) - y] \quad (17)$$

Итак, приближенное решение уравнения (1) вида (6) дается формулами (16) — (17). Если область  $\Omega$  — круг радиуса  $\rho$ , то формула (17) примет вид

$$a = (\rho - r) / h \quad (18)$$

Подставив (18) в (16), получим приближенное решение для этого случая в форме

$$\varphi(r) = \frac{\mu}{Ah} \left[ \Phi \left( \sqrt{\frac{2(\rho - r)}{Ah}} \right) + \sqrt{\frac{Ah}{\pi(\rho - r)}} \exp \frac{-(\rho - r)}{Ah} \right] \quad (19)$$

Определим еще величину

$$P = 2\pi \int_0^{\rho} \varphi(r) r dr = 4\mu\rho\kappa = \frac{\pi\mu\rho}{A\lambda} \left\{ \Phi \left( \sqrt{\frac{2}{A\lambda}} \right) \left[ \left( 1 + \frac{A\lambda}{2} \right)^2 - \frac{A^2\lambda^2}{2} \right] + \sqrt{\frac{A\lambda}{\pi}} \left( 1 + \frac{A\lambda}{2} \right) \exp \frac{-1}{A\lambda} \right\} \quad (20)$$

Для границы применимости вырожденного решения (5) имеем

$$\frac{P - P_b}{P_b} 100\% \leq 5\% \left( P_b = \frac{\pi\mu\rho}{A\lambda} \right), \quad \lambda_0 = 0.05A^{-1} \quad (21)$$

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу о действии круглого плоского штампа на упругий слой, лежащий без трения на жестком основании. Силы трения между штампом и слоем предполагаем отсутствующими.

Эту задачу можно привести к решению интегрального уравнения типа (1), в котором  $\varphi(P)$  — контактное давление между штампом и слоем,  $h$  — толщина слоя. [1]

$$f(Q) = \Delta\delta, \quad \Delta = \frac{E}{2(1 - \sigma^2)}, \quad L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \quad (22)$$

причем  $\delta$  — осадка границы слоя. Замечая, что  $A = 1/2$ , по формуле (21) имеем  $\lambda_0 = 0.1$ , т. е. вырожденное решение (5) можно использовать при  $\lambda \leq 0.1$

Более точное решение, определяемое формулами (19), (20), дает практически верные результаты при  $\lambda \leq 1$ , как это показали проведенные вычисления. Приводим некоторые результаты вычислений  $\kappa$ , а для сравнения — значение этой величины, полученной в работе [5] иным методом (разница не превосходит 4.5%).

$1/\lambda =$	1	1.5	2	2.5	3
$\kappa =$	2.26	3.08	3.88	4.67	5.46
$\kappa_{[5]} =$	2.20	2.95	3.72	4.49	5.26

Отметим, что идея применения метода работы [3] к решению пространственных смешанных задач для упругого слоя была высказана И. И. Воровичем.

Поступила 5 X 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Некоторые контактные задачи для упругого слоя. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 4.
2. Александров В. М., Ворович И. И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.
3. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости, ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 5.
4. Koiter W. T. Approximate solution of Wiener — Hopf type integral equations with applications. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc., 1954, B-57, 558—579.
5. Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. ПММ, 1958, т. XXI, вып. 3.