

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЖИМАЮЩЕ - СДВИГАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНО - УПРУГОЙ СРЕДЕ

В. С. Анциферов, Х. А. Рахматулин
(Москва)

1. Рассмотрим однородную покоящуюся среду, занимающую нижнее полупространство (фиг. 1), и введем прямоугольную систему лагранжевых координат $Oxyz$. Введем в рассмотрение тензоры напряжений и малых деформаций

$$\left\| \begin{array}{ccc} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ X_z & Y_z & Z_z \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} \varepsilon_{xx} & 1/2 \varepsilon_{xy} & 1/2 \varepsilon_{xz} \\ 1/2 \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 1/2 \varepsilon_{yz} \\ 1/2 \varepsilon_{xz} & 1/2 \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{array} \right\|$$

с первыми инвариантами

$$P = 1/3 (X_x + Y_y + Z_z), \quad \varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

и вторыми инвариантами соответственно

$$T = 1/2 \sqrt{2} \sqrt{(X_x - Y_y)^2 + (Y_y - Z_z)^2 + (Z_z - X_x)^2 + 6(X_y^2 + X_z^2 + Y_z^2)}$$

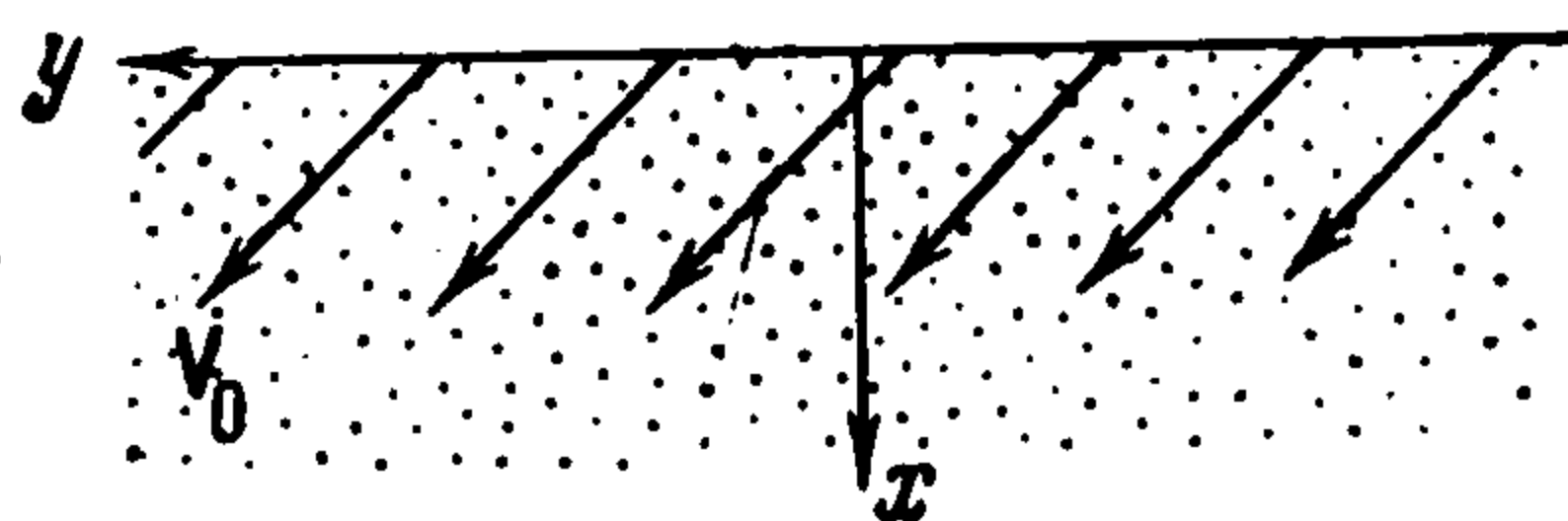
$$\Gamma = 1/2 \sqrt{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + 3/2(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2)}$$

Пусть изучаемая среда описывается моделью нелинейно-упругого тела со следующими свойствами:

$$P = \varphi(\varepsilon), \quad D_\sigma = 6QD_\varepsilon, \quad T = f(\Gamma), \quad Q(\Gamma) \equiv \frac{f(\Gamma)}{6\Gamma}$$

В этих формулах D_σ , D_ε — дивергенты напряжений и деформаций; $\varphi(\varepsilon)$ и $f(\Gamma)$ — известные функции.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ всем частицам, лежащим на поверхности среды ($x=0$), сообщается одна и та же скорость $V_0 (V_{x0}, V_{y0}, 0)$, остающаяся в дальнейшем постоянной (фиг. 1), причем $V_{y0} \geq 0$. В среде возникает плоское одномерное движение, так что все параметры движения зависят лишь от x и t . Введем вектор скорости частицы $V (V_x, V_y, 0)$ и вектор перемещения частицы $U (u, v, 0)$. В силу симметрии задачи



Фиг. 1

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx}, \quad \Gamma = \sqrt{\varepsilon^2 + 3/4 \varepsilon_{xy}^2} \quad (1.2)$$

Отсюда

$$X_x - \varphi(\varepsilon) = 4Q(\Gamma)\varepsilon, \quad X_y = 3Q(\Gamma)\varepsilon_{xy} \quad (1.3)$$

В силу соотношений $V_x = \partial u / \partial t$, $V_y = \partial v / \partial t$, из (1.1) получаем

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Уравнения движения имеют вид [1]:

$$\rho_0 \frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial X_x}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial X_y}{\partial x} \quad (1.5)$$

где ρ_0 — плотность покоящейся среды. Уравнения (1.2) — (1.5) образуют замкнутую систему, которая должна быть решена при условиях:

$$V_x = V_{x0}, \quad V_y = V_{y0} \quad \text{при } x = 0, \quad (1.6)$$

$$V_x = 0, \quad V_y = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \varepsilon_{xy} = 0 \quad \text{при } x = \infty \quad (1.7)$$

Используя (1.3) и исключая X_x , X_y из (1.5), получим

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} - a \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - b \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V_y}{\partial t} - b \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - c \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

Здесь

$$a = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d\varphi}{dE} + 4Q(\Gamma) + \frac{4\varepsilon^2}{\Gamma} \frac{dQ}{d\Gamma} \right), \quad b = \frac{1}{\rho_0} \frac{3\varepsilon\varepsilon_{xy}}{\Gamma} \frac{dQ}{d\Gamma}$$

$$c = \frac{1}{\rho_0} \left(3Q(\Gamma) + \frac{9}{4} \frac{\varepsilon_{xy}^2}{\Gamma} \frac{dQ}{d\Gamma} \right) \quad (1.9)$$

Легко видеть, что характеристики системы (1.4), (1.8) находятся из уравнения

$$(dx/dt)^2 = 1/2 [a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}]$$

Для существования четырех семейств характеристик имеем следующее условие $a + c > \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}$, или

$$\left(Q + \frac{3\varepsilon_{xy}^2 Q'}{4\Gamma} \right) \varphi' + 4Q(Q + Q') > 0 \quad (1.10)$$

Так как $\varphi(\varepsilon)$, $Q(\Gamma)$ — принципиально независимые функции, то очевидно, что неравенство $Q + \Gamma Q' > 0$ является необходимым для справедливости (1.10). Можно показать, что оно будет и достаточным условием для (1.10), если $\varphi' > 0$ (что естественно). Сделаем предположение, что неравенство $Q + \Gamma Q' > 0$ выполняется всегда. Легко видеть, что необходимым и достаточным условием выполнения этого неравенства является монотонное возрастание функции $T(\Gamma)$.

В принятых предположениях система имеет четыре семейства характеристик:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_1^2 = \pm \frac{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}, \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_2^2 = \pm \frac{a + c - \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2} \quad (1.11)$$

Можно отметить, что для случая чистого сжатия (разрежения) без сдвига ($V_y = 0$, $\varepsilon_{xy} \equiv 0$) система (1.4), (1.8) имеет два семейства характеристик, даваемые формулой для $(dx/dt)_1$. Для случая чистого сдвига ($V_x \equiv 0$, $\varepsilon \equiv 0$) система (1.4), (1.8) имеет два семейства характеристик, даваемые формулой $(dx/dt)_2$.

Поэтому в дальнейшем характеристики $(dx/dt)_1$ условно называются характеристиками сжатия, а характеристики $(dx/dt)_2$ — характеристиками сдвига. Легко доказать, что

$$\left| \left(\frac{dx}{dt} \right)_1 \right|^2 > \left| \left(\frac{dx}{dt} \right)_2 \right|^2$$

2. Ввиду автономности поставленной задачи можно сделать вывод, что параметры $V_x, V_y, \varepsilon, \varepsilon_{xy}, X_x, X_y$ зависят лишь от переменной $\xi = x/t$. С учетом этого систему (1.4), (1.8) легко преобразовать к виду

$$\frac{dV_x}{d\xi} + \xi \frac{d\varepsilon}{d\xi} = 0, \quad \frac{dV_y}{d\xi} + \xi \frac{d\varepsilon_{xy}}{d\xi} = 0 \quad (2.1)$$

$$(\xi^2 - a) \frac{d\varepsilon}{d\xi} = b \frac{d\varepsilon_{xy}}{d\xi}, \quad (\xi^2 - c) \frac{d\varepsilon_{xy}}{d\xi} = b \frac{d\varepsilon}{d\xi}$$

Условия (1.6), (1.7) принимают вид

$$V_x = V_{x0}, \quad V_y = V_{y0} \quad \text{при } \xi = 0 \quad (2.2)$$

$$V_x = 0, \quad V_y = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \varepsilon_{xy} = 0 \quad \text{при } \xi = \infty$$

Движение в волне чистого сжатия (разрежения), примыкающей к зоне покоя описывается уравнениями, получаемыми из (2.1) при $V_y \equiv 0, \varepsilon_{xy} \equiv 0$

$$\frac{dV_x}{d\xi} + \xi \frac{d\varepsilon}{d\xi} = 0, \quad (\xi^2 - a_0) \frac{d\varepsilon}{d\xi} = 0 \quad \left(a_0 = a_0(\varepsilon) = \frac{1}{\rho_0} [\varphi' + 4Q(|\varepsilon|) Q'(|\varepsilon|)] \right) \quad (2.3)$$

Общее решение системы (2.3) описывает постоянное течение

$$V_x = V_{x1} = \text{const}, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 = \text{const}$$

зона которого может отделяться от зоны покоя ударной волной сжатия (разрежения). Условия на ударной волне [1] с учетом (1.3) запишутся в виде

$$\begin{aligned} V_{x1} + D\varepsilon_1 &= 0, & \rho_0 D V_{x1} &= -(X_{x1} - X_{x0}), \\ X_{x0} &= \varphi(0), & X_{x1} &= \varphi(\varepsilon_1) + 4Q(|\varepsilon_1|)\varepsilon_1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь D — скорость (постоянная) ударной волны, индексом 1 снабжены параметры в зоне постоянного течения за ударной волной. Особое решение системы (2.3) (центрированная волна)

$$\xi = V a_0(\varepsilon), \quad V_x = - \int_0^\varepsilon V a_0(\varepsilon) d\varepsilon$$

Если для деформаций сжатия (разрежения) $da_0/d|\varepsilon| < 0$, то по невозмущенной среде будет распространяться центрированная волна сжатия (разрежения). Если для деформаций сжатия (разрежения) $da_0/d|\varepsilon| > 0$, то впереди будет идти ударная волна сжатия (разрежения). При $a_0 \equiv \text{const}$ впереди идет ударная волна сжатия (разрежения). Для простоты случаи, когда $da_0/d|\varepsilon|$ меняет знак, не рассматриваются.

Исследуем теперь волну сдвига — сжатия (разрежения), распространяющуюся по области чистого сжатия (разрежения). Общее решение системы (2.1) описывает постоянное течение

$$V_x = V_{x2} = \text{const}, \quad V_y = V_{y2} = \text{const}, \quad \varepsilon = \varepsilon_2 = \text{const}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy2} = \text{const}$$

Область постоянного течения со сдвигом может отделяться ударной волной от области $\varepsilon_{xy} = 0, V_y = 0$. Выпишем условия на этой ударной волне, обозначая параметры перед и за волной соответственно индексами 1 и 2 ($V_{x2} = V_{x0}, V_{y2} = V_{y0}$). Пусть скорость волны относительно неподвижного пространства есть b , а уравнение волны

$$x = x^* = Ct$$

Тогда из соотношений

$$\int_0^t b dt = x^* + u_1(x^*, t), \quad \varepsilon = \frac{\rho_0}{\rho} - 1, \quad u_2(x^*, t) = u_1(x^*, t), \quad v_2(x^*, t) = 0$$

легко получить

$$(b - V_{x1})\rho_1 = \rho_0 C, \quad V_{y0} = -C\varepsilon_{xy2}, \quad V_{x0} + C\varepsilon_2 = V_{x1} + C\varepsilon_1 \quad (2.5)$$

а соотношения [1]

$$\rho_1(b - V_{x1})V_{y0} = -X_{y2}, \quad \rho_1(b - V_{x1})(V_{x0} - V_{x1}) = -(X_{x1} - X_{x2})$$

принимают вид

$$\rho_0 C V_{y0} = -X_{y2}, \quad \rho_0 C (V_{x0} - V_{x1}) = -(X_{x1} - X_{x2}) \quad (2.6)$$

К условиям (2.5), (2.6) нужно добавить уравнения (1.3)

$$X_{x2} = C(\varepsilon_2) + 4\varepsilon_2 Q(\Gamma_2), \quad X_{y2} = 3\varepsilon_{xy2} Q(\Gamma_2), \quad \Gamma_2 = \sqrt{\varepsilon_2^2 + 3/4 \varepsilon_{xy2}^2} \quad (2.7)$$

Для устойчивости ударной волны сдвига — сжатия (разрежения) необходимо [2], чтобы ее скорость была не меньше скорости малых возмущений сдвига перед волной и не больше скорости малых возмущений сжатия и сдвига за волной. Несложные выкладки показывают, что ударная волна будет устойчивой при выполнении неравенства

$$Q'(\Gamma_2) \geq 0 \quad (2.8)$$

Перейдем к исследованию особого решения системы (2.1). Перемножив последние уравнения (2.1) и сокращая на не равное по предположению нулю произведение $(d\varepsilon/d\xi)(d\varepsilon_{xy}/d\xi)$, получаем $(\xi^2 - a)(\xi^2 - c) = b^2$

Отсюда либо

$$\xi = [1/2 (a + c + \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2})]^{1/2} \quad (2.9)$$

либо

$$\xi = [1/2 (a + c - \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2})]^{1/2} \quad (2.10)$$

Легко показать, что (2.9) не может давать решения задачи. В самом деле, сравнение (2.9) с (1.11) показывает, что для идущих вперед характеристик сжатия $dx/dt = \xi = x/t$, т. е. в зоне решения (2.9) характеристики (2.9) есть (на диаграмме xt) лучи, выходящие из начала координат. Следовательно, луч, отделяющий на диаграмме xt области чистого сжатия и сдвига — сжатия, есть характеристика сжатия. Но это означает, что передний фронт волны сдвига — сжатия опережает волны малых возмущений сдвига, идущие от поверхности среды, так как

$$\left| \left(\frac{dx}{dt} \right)_1 \right| > \left| \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_2 \right|$$

Это невозможно.

Следовательно, особое решение дается формулой (2.10) в совокупности с тремя первыми уравнениями (2.1). Особое же решение (2.9) соответствует идущей впереди волне чистого сжатия. Аналогично вышесказанному можно сделать вывод, что

в зоне особого решения прямолинейными лучами являются на диаграмме xt характеристики сдвига, поэтому это решение назовем центрированной волной сдвига. Перед центрированной волной сдвига должна лежать область постоянного течения, так как соседство центрированных волн сжатия и сдвига требует совпадения на их границе характеристик сдвига и сжатия, что невозможно.

3. Как явствует из вышесказанного, вид решения зависит от вида функций $a_0(\varepsilon)$, $Q(\Gamma)$. Если не рассматривать случаи $a_0 = \text{const}$, $Q \equiv \text{const}$ ввиду их простоты, то всего может быть четыре варианта картин движения. Рассмотрим их, полагая для определенности $V_{x0} > 0$ (сжатие):

1 вариант

$$da_0/d|\varepsilon| > 0, \quad dQ/d\Gamma > 0$$

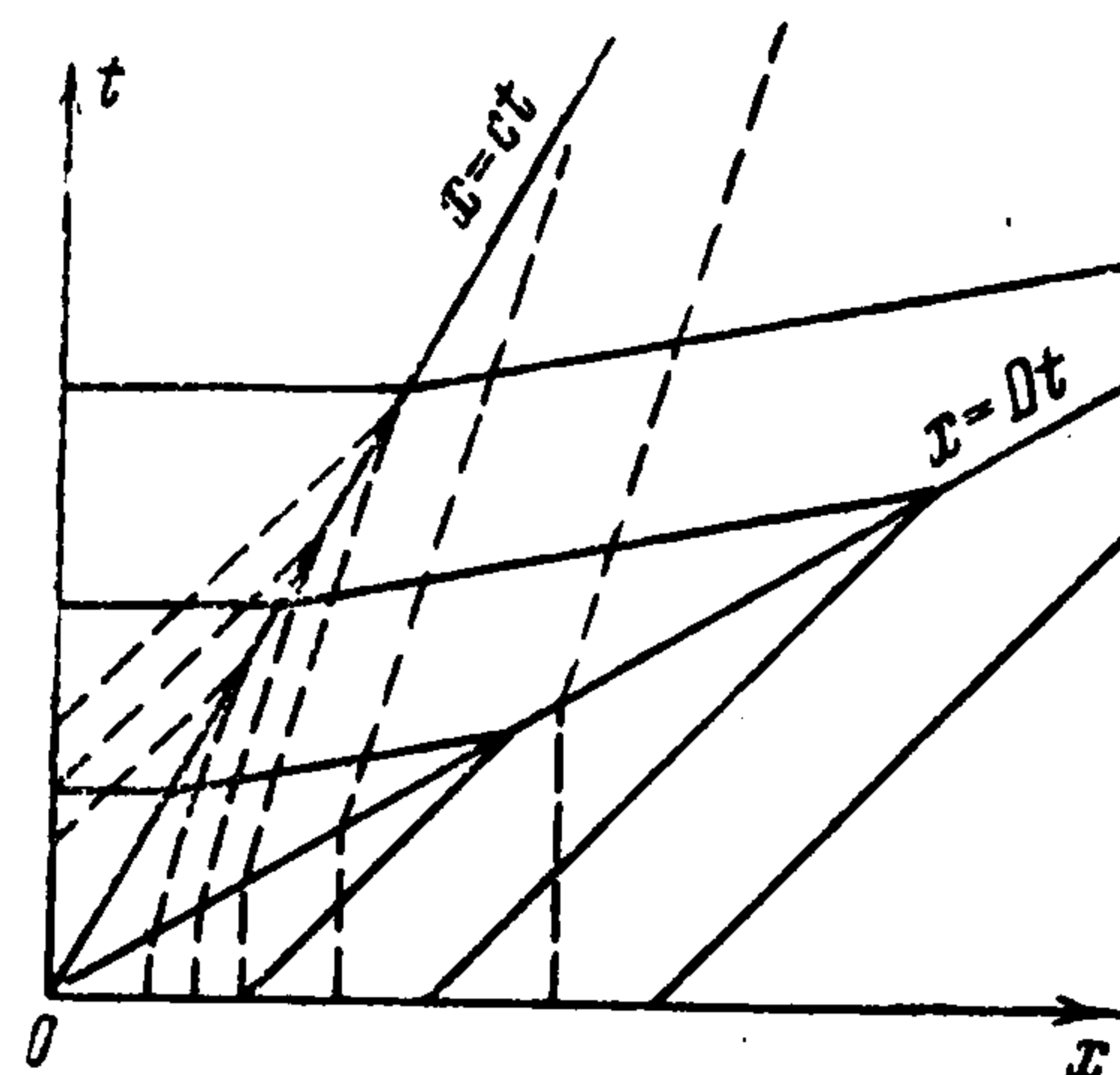
По невозмущенной среде распространяется ударная волна чистого сжатия; за ней зона постоянного течения, по которой идет ударная волна сжатия — сдвига [7,8]. Между второй ударной волной и поверхностью среды — зона постоянного течения. В плоскости xt картина движения имеет вид фиг. 2.

Решение имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0, & \varepsilon_{xy} &= 0, & V_x &= 0, & V_y &= 0, & \text{при } x > Dt \\ \varepsilon &= \varepsilon_1, & \varepsilon_{xy} &= 0, & V_x &= V_{x1}, & V_y &= 0, & \text{при } Dt > x > Ct \\ \varepsilon &= \varepsilon_2, & \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy2}, & V_x &= V_{x0}, & V_y &= V_{y0} & \text{при } Ct > x \geq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь V_{x0} , V_{y0} известны. Для определения постоянных ε_1 , ε_2 , ε_{xy2} , V_{x1} , D , C имеется система уравнений (2.4) — (2.7). Выписанное решение можно использовать для экспериментального определения функций $\varphi(\varepsilon)$, $Q(\Gamma)$. Из (2.4) — (2.7) легко получить

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon_2) &= X_{x2} - \frac{4}{3\rho_0} \frac{X_{y2}^2}{V_{y0}^2} E_2, & Q(\Gamma_2) &= \frac{1}{3\rho_0} \frac{X_{y2}^2}{V_{y0}^2}, & \Gamma_2 &= \sqrt{\varepsilon_2^2 + 3/4 \varepsilon_{xy2}^2} \\ \varepsilon_{xy2} &= \frac{\rho_0 V_{y0}^2}{X_{y2}}, & \varepsilon_2 &= \frac{\rho_0 V_{y0}^2 (X_{x2} - X_{x0} + \rho_0 D V_{x0}) - X_{y2}^2 V_{x0}^2 + V_{y0} V_{y2} (X_{x2} - X_{x0})}{X_{y2} (\rho_0 D V_{y2} + X_{y2})} \end{aligned} \quad (3.2)$$



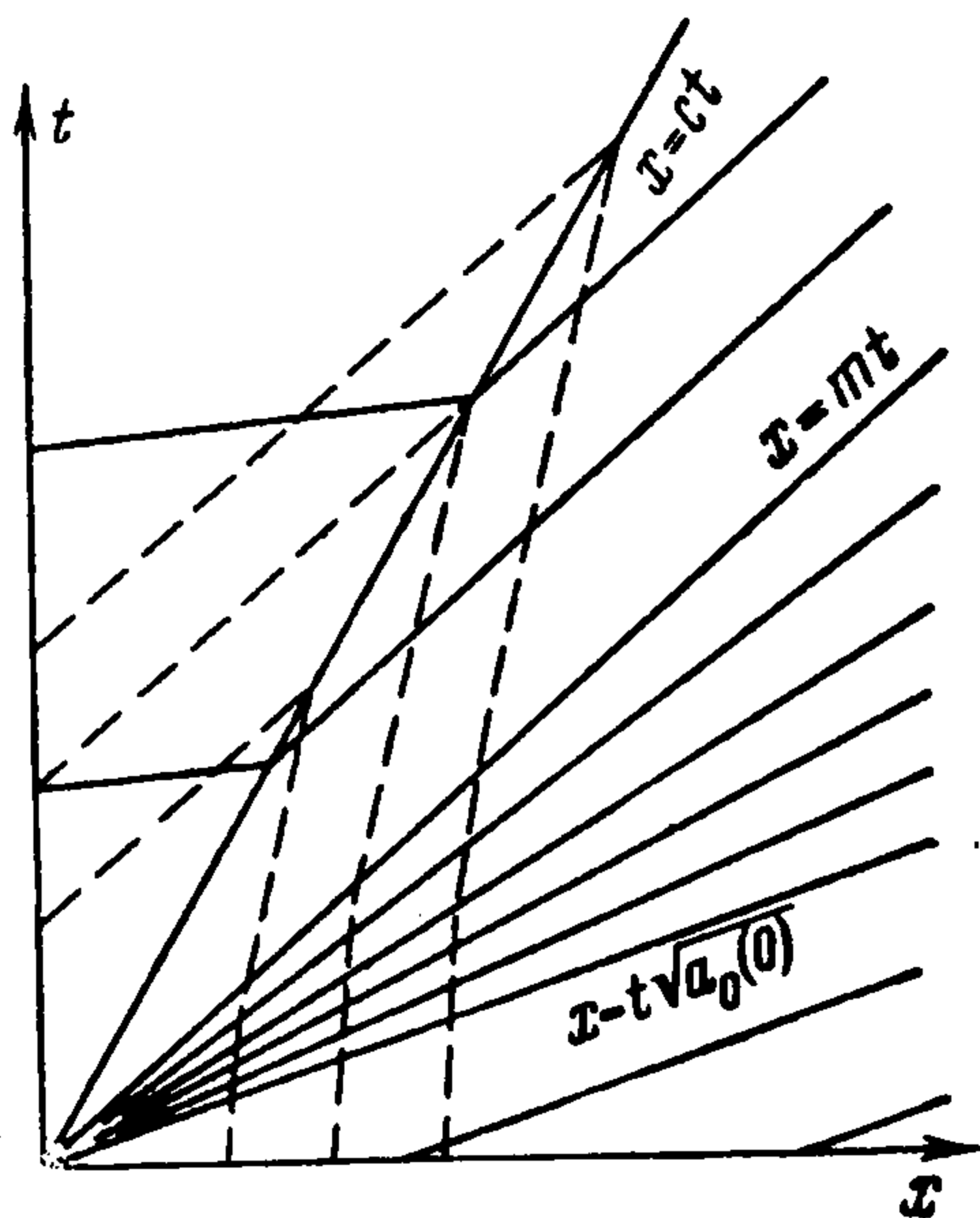
Фиг. 2

Из формул (3.2) видно, что, измеряя скорость передней ударной волны D , а также четыре величины на поверхности среды ($V_{x0}, V_{y0}, X_{x2}, X_{y2}$), можно экспериментально построить функции $\varphi(\varepsilon), Q(\Gamma)$. Для этого необходимо варьировать V_{x0}, V_{y0} .

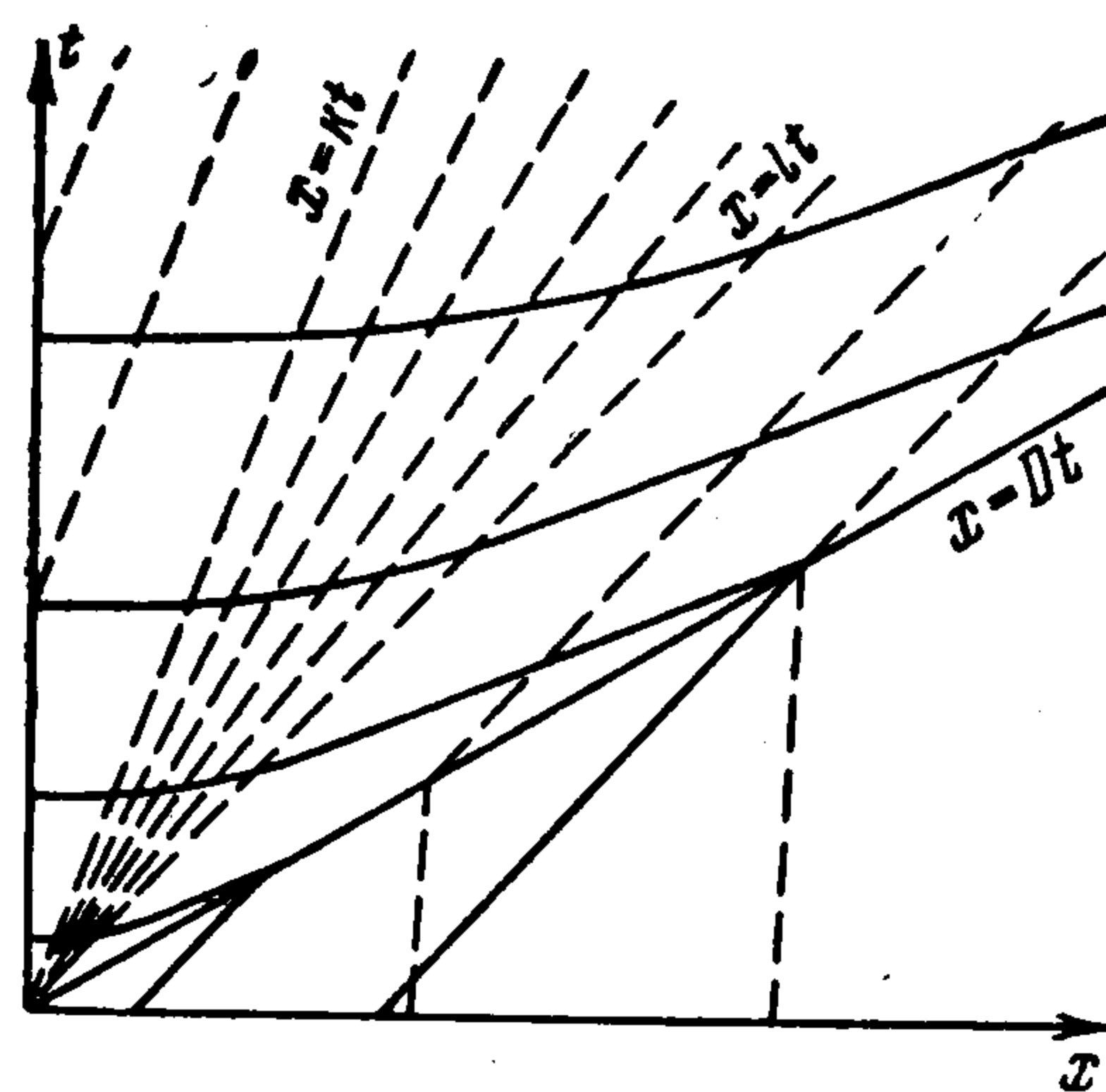
2 вариант

$$da_0 / d\varepsilon < 0, \quad dQ / d\Gamma > 0$$

По невозмущенной среде распространяется центрированная волна чистого сжатия; за ней зона постоянного течения, по которой идет ударная волна сжатия — сдвига. Между ударной волной и поверхностью — зона постоянного течения. Этот случай рас-



Фиг. 3



Фиг. 4

смотрен в работе [6]. В плоскости xt картина движения имеет вид фиг. 3. Решение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad V_x = 0, \quad V_y = 0 & \quad \text{при } x \geq \sqrt{a_0(0)} t \\ x/t = \sqrt{a_0(\varepsilon)}, \quad V_x = -J_1(\varepsilon), \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad V_y = 0 & \quad \text{при } \sqrt{a_0(0)} t \geq x \geq mt \\ \varepsilon = \varepsilon_1, \quad V_x = V_{x1}, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad V_y = 0 & \quad \text{при } mt \geq x > Ct \\ \varepsilon = \varepsilon_2, \quad V_x = V_{x0}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy2}, \quad V_y = V_{y0} & \quad \text{при } Ct > x \geq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь

$$J_1(\varepsilon, 0) = \int_0^\varepsilon \sqrt{a_0(\varepsilon)} d\varepsilon \quad (3.4)$$

Для определения постоянных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{xy2}, V_{x1}, m, C$ имеется система уравнений (2.5) — (2.7), к которым нужно присоединить:

$$m = \sqrt{a_0(\varepsilon_1)}, \quad V_{x1} = -J_1(\varepsilon_1), \quad X_{x1} = \varphi(\varepsilon_1) + 4Q(|\varepsilon_1|)\varepsilon_1$$

3 вариант

$$da_0 / d|\varepsilon| > 0, \quad dQ / d\Gamma < 0$$

По невозмущенной среде распространяется ударная волна чистого сжатия; за ней зона постоянного течения. Следом идет центрированная волна сдвига; между ней и поверхностью — постоянное течение (фиг. 4). Точное решение выписать не представляется возможным, так как уравнения центрированной волны сдвига (2.10), (2.1) не интегрируются. Одно из приближенных решений легко можно написать, если удар по поверхности среды близок к вертикальному, т. е. если

$$|V_{y0} / V_{x0}| \ll 1 \quad (3.4)$$

Сделав предположение, что порядок φ' больше (или равен) порядка Q , после

оценки членов в уравнениях волны сдвига можно получить приближенное решение задачи

$$\varepsilon = 0, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad V_x = 0, \quad V_y = 0 \quad \text{при } x > Dt \quad (3.5)$$

$$\varepsilon = \varepsilon, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad V_x = V_{x1}, \quad V_y = 0 \quad \text{при } Dt > x \geq lt$$

$$x/t = \sqrt{C_0(|\varepsilon|)}, \quad V_x = -J_2(\varepsilon, \varepsilon_1), \quad \varepsilon_{xy} = -\sqrt{2J_3(\varepsilon, \varepsilon_1)}$$

$$V_y = J_4(\varepsilon, \varepsilon_1) \quad \text{при } lt \geq x \geq kt$$

$$\varepsilon = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy2}, \quad V_x = V_{x0}, \quad V_y = V_{y0} \quad \text{при } kt \geq x \geq 0$$

$$J_2(\varepsilon, \varepsilon_1) = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} \sqrt{C_0(|\delta|)} d\varepsilon + V_{x1}, \quad C_0(|\varepsilon|) = \frac{3Q(|\varepsilon|)}{\rho_0} \equiv C \Big|_{\varepsilon_{xy}=0}$$

$$J_3(\varepsilon, \varepsilon_1) = \int_{\varepsilon_1}^{|\varepsilon|} \frac{d\varphi/d\varepsilon + Q(|\varepsilon|) + 4|\varepsilon|Q'(|\varepsilon|)}{Q'(|\varepsilon|)} d\varepsilon \quad (3.6)$$

$$J_4(\varepsilon, \varepsilon_1) = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} \frac{\sqrt{C_0(|\varepsilon|)}}{Q'(|\varepsilon|) \sqrt{2J_3(\varepsilon, \varepsilon_1)}} \left(\frac{d\varphi}{d\varepsilon} + Q(|\varepsilon|) + 4|\varepsilon|Q'(|\varepsilon|) \right) d\varepsilon$$

Постоянные $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{xy2}, V_{x1}, D, l, k$ находятся из уравнений (2.4), к которым присоединяются соотношения

$$l = C_0 \sqrt{|\varepsilon_1|}, \quad k = \sqrt{C_0(|\varepsilon_2|)}, \quad -J_2(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = V_{x0}, \quad J_4(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = V_{y0}$$

$$\varepsilon_{xy2} = -\sqrt{2J_3(\varepsilon_2, \varepsilon_1)} \quad (3.7)$$

4 вариант

$$da_0/d|\varepsilon| < 0, \quad dQ/d\Gamma < 0$$

По невозмущенной среде распространяется центрированная волна чистого сжатия; за ней зона постоянного течения. Следом идет центрированная волна сдвига, между ней и поверхностью — зона постоянного течения (фиг. 5). Решение при выполнении условия (3.4) имеет вид

$$\varepsilon = 0, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad V_x = 0, \quad V_y = 0 \quad \text{при } x \geq \sqrt{a_0(0)} t \quad (3.8)$$

$$x/t = \sqrt{a_0(\varepsilon)}, \quad V_x = -J_1(\varepsilon), \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad V_y = 0 \quad \text{при } \sqrt{a_0(0)} t \geq x \geq mt$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1, \quad V_x = V_{x1}, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad V_y = 0 \quad \text{при } mt \geq x \geq lt$$

$$x/t = \sqrt{C_0(|\varepsilon|)}, \quad V_x = -J_2(\varepsilon, \varepsilon_1), \quad V_y = J_4(\varepsilon, \varepsilon_1)$$

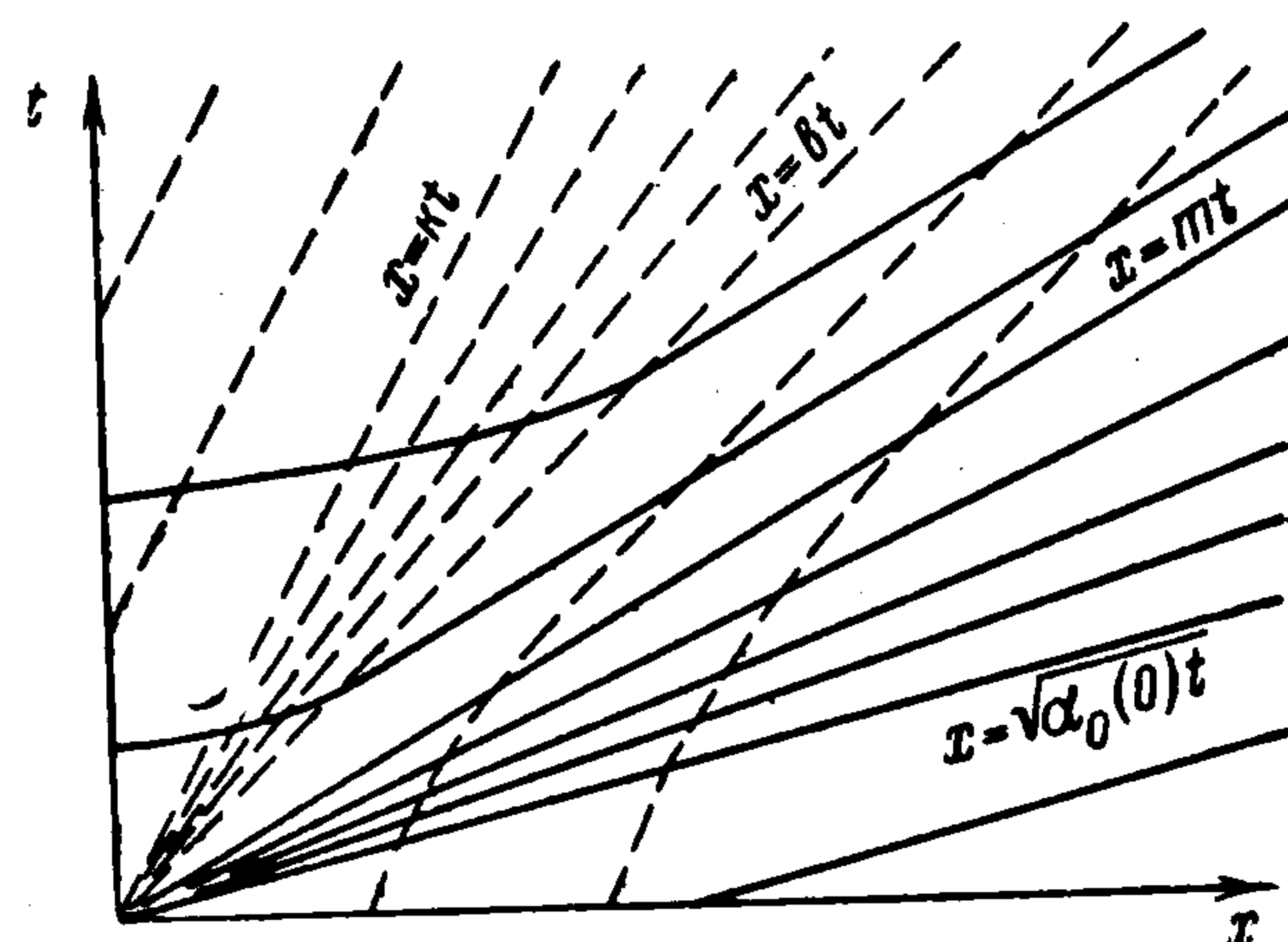
$$\varepsilon_{xy} = -\sqrt{2J_3(\varepsilon, \varepsilon_1)} \quad \text{при } lt \geq x \geq kt$$

$$\varepsilon = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy2}, \quad V_x = V_{x0}, \quad V_y = V_{y0} \quad \text{при } kt \geq x \geq 0$$

Постоянные $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{xy2}, V_{x1}, m, l, k$ находятся из уравнений (3.6), к которым нужно присоединить соотношения

$$m = \sqrt{a_0(\varepsilon_1)}, \quad V_{x1} = -J_1(\varepsilon_1) \quad (3.9)$$

4. Остановимся на экспериментальном определении функций $\varphi(\varepsilon)$ и $Q(\Gamma)$. Как уже указывалось, возможно существование среды, для которой при малых деформациях $da_0/d|\varepsilon| > 0, dQ/d\Gamma > 0$. Для такой среды по формулам (3.2) можно построить экспериментальные зависимости $\varphi(\varepsilon), Q(\Gamma)$, если осуществить эксперимент с косым ударом по поверхности среды (например, грунта). Однако в то время как



Фиг. 5

ограничение $da_0/d|\epsilon| > 0$ будет реальным (например, при экспериментах с чистым сжатием в грунте фиксируется ударная волна [3, 4]), предположение $dQ/d\Gamma > 0$ не будет бесспорным. К настоящему времени нет экспериментов со сжатием — сдвигом в материалах, в частности, в грунтах; поэтому нет экспериментального ответа на вопрос, будет ли волна сжатия — сдвига ударной ($Q' \geq 0$) или непрерывной ($Q' < 0$). Поэтому экспериментальные кривые, построенные по формулам (3.2), должны быть проверены. Сделано это может быть при эксперименте на чистое сжатие ($V_y \equiv 0$)

Решение при $da_0/d|\epsilon| > 0$ (впереди ударная волна, за ней постоянное течение) имеет при чистом сжатии вид:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 0, & V_x &= 0, & X_x &= X_{x0} & \text{при } x > Dt \\ \epsilon &= \epsilon_1, & V_x &= V_{x0}, & X_x &= X_{x1} & \text{при } Dt > x \geq 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Если задать V_{x0} , то ϵ_1 и D (скорость ударной волны) находятся из уравнений (2.4), в которых нужно положить $V_{x1} = V_{x0}$. Помня, что в этом случае $Y_y = Z_z$, и поэтому $\varphi = 1/3 (X_x + 2Y_y)$, можно прийти к выводу, что экспериментальные кривые $\varphi(\epsilon)$, $Q(\Gamma)$ могут быть построены, если при эксперименте на чистое сжатие ($V_y \equiv 0$) измерять V_{x0} , D , Y_{y1} (Y_{y1} — значение Y_y у поверхности грунта). Выписанные формулы решают эту задачу

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= -\frac{V_{x0}}{D}, & \varphi(\epsilon_1) &= \frac{1}{3} (X_{x0} + 2Y_{y1} - \rho_0 DV_{x0}) \\ Q(|\epsilon_1|) &= \frac{1}{6} \frac{\rho_0 DV_{x0} - X_{x0} + Y_{y1}}{V_{x0}} D \end{aligned} \quad (4.2)$$

Вторым контролем правильности найденных кривых может служить сравнение зависимостей $\varphi(\epsilon)$, полученных указанным способом по формулам (3.2) и хорошо известным экспериментом на всестороннее сжатие, описанным в [5].

Если функция $Q(\Gamma)$, построенная по формулам (4.2), окажется убывающей ($Q' < 0$), то решение (3.1) и формулы (3.2) не приложимы к расчету сжимающе — сдвигающего удара. Контролем правильности полученных по (4.2) экспериментальных кривых $\varphi(\epsilon)$, $Q(\Gamma)$ может служить в этом случае сравнение решения задачи о сжимающе-сдвигающем ударе по формулам варианта 3 с экспериментально замеренными параметрами (например, скорости ударной волны D , напряжений X_x , X_y у поверхности грунта). Решение задачи проводится на базе экспериментальных функций $\varphi(\epsilon)$, $Q(\Gamma)$.

Поступила 26 X 1963.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Механика жидкости и газа. Гостехиздат, 1957.
2. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
3. Г р и м з а Ю. М. Прямой экспериментальный метод построения ударных диаграмм сжатия грунтов. Применение вибрации в строительстве. Сб. № 51, 1962.
4. Г р и м з а Ю. И. Некоторые результаты экспериментальных исследований по определению скорости распространения продольных волн в образцах грунта. Динамика грунтов, Сб. № 44, М., 1961.
5. Г р и г о р я н С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
6. Р а х м а т у л и н Х. А. О распространении волны сложного нагружения. ПММ 1958, т. 22, вып. 6.
7. Ж у б а е в Н. О распространении ударных волн нагрузки и нагрузка — разгрузка в деформационной модели грунта. Вестн. АН Казах.ССР, 1963, № 9.
8. Ж у б а е в Н. Исследование распространения ударных волн в грунтах. Вестн. АН Казах.ССР, 1964, № 3.