К ЗАДАЧЕ О СТРУЙНОМ ОБТЕКАНИИ КОНТУРА, СОВЕРШАЮЩЕГО МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

А. В. Кузнецов

(Казань)

Дается уточнение граничного условия М. И. Гуревича [1] для потенциала скорости возмущенного течения на твердом контуре, обтекаемом потоком идеальной несжимаемой жидкости с отрывом струй и совершающем малые колебания.

1. Задача о струйном обтекании контура, совершающего малые колебания, была рассмотрена М. И. Гуревичем и М. Д. Хаскиндом [2] в 1953 г. Другой подход к ее решению был применен в 1955 г. Вудсом [3] и затем развит в последующих работах [4,5 и др.].

М. И. Гуревич и М. Д. Хаскинд представили комплексный потенциал W неустановившегося течения в виде $W = w_0 + w$, где w_0 — комплексный потенциал установившегося течения и w — комплексный потенциал возмущенного течения, и сформулировали граничную задачу для определения w. Используя интеграл Лагранжа и условие постоянства давления, они вывели граничное условие для w на свободных поверхностях. Предполагая затем известной нормальную скорость v_n возмущенного течения на колеблющемся контуре и считая, что функция $z(u)$, отображающая область течения на каноническую область, в качестве которой взята верхняя полуплоскость, не варьируется, они установили, что на контуре

$$\operatorname{Im}\frac{dw}{du} = -v_n\left|\frac{dz}{du}\right| \qquad (1.1)$$

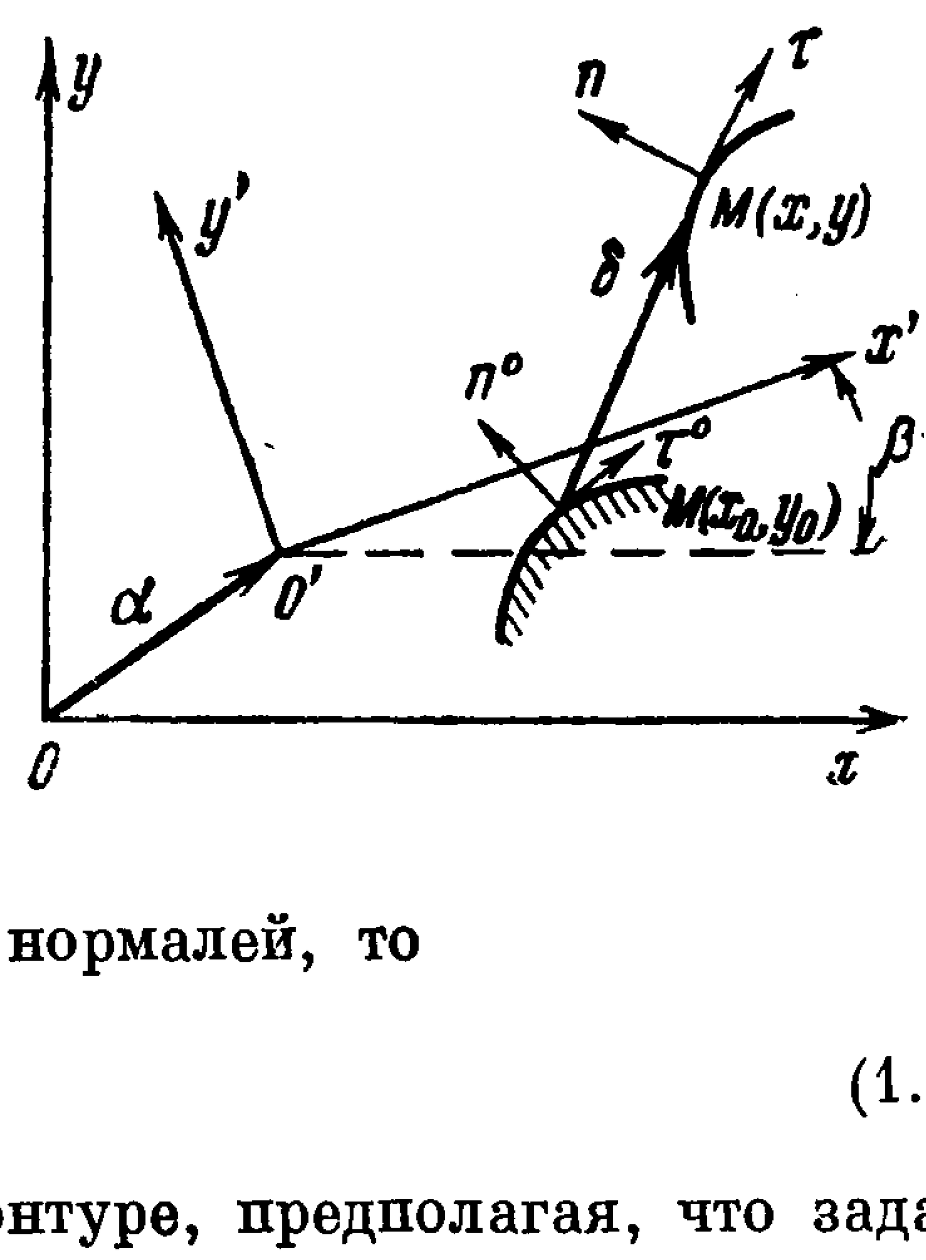
Если считать, как это принято в [2], что v_n — гармоническая функция от времени t, то задачу определения $w\ (u, t)$ можно привести к определению некоторой аналитической в верхней полуплоскости функции от u, определенным образом связанной с $w(u, t)$ по известным граничным значениям ее на вещественной оси плоскости u.

В задаче о гармонических колебаниях плоской пластинки было принято, что $v_n = U_n\ (t)$, где $U_n\ (t)$ — нормальная скорость точек колеблющейся пластинки.

М. И. Гуревич [1] предполагал известными U_n — нормальную скорость точек контура и $\beta\ (t)$ — малый угол поворота контура и установил, что

$$U_n = -\beta V_0 + \Delta V_{0n} + v_n \qquad (1.2)$$

где ΔV_{0n} — проекция на внешнюю нормаль к неподвижному контуру скорости установившегося течения, вызванная его перемещением, и V_0 — скорость на контуре в установившемся течении.



Если всюду

$$\Delta V_{0n} = \frac{\partial V_{0n}}{\partial n}\eta = \frac{\partial V_0}{\partial s}\eta \qquad \left(\eta = \int U_n dt\right)$$

где η — перемещения точек контура в направлении нормалей, то

$$v_n = U_n - \frac{\partial V_0}{\partial s}\eta + \beta V_0 \qquad (1.3)$$

2. Выведем граничное условие для $\partial\varphi / \partial n$ на контуре, предполагая, что задан закон колебания контура, т. е. предполагая заданными вектор поступательных колебаний $\alpha\ (t)$ и угол поворота контура относительно его главного положения $\beta\ (t)$.

Через $\mathbf{n}^\circ$ и $\boldsymbol{\tau}^\circ$ обозначим соответственно орты внешней (направленной внутрь жидкости) нормали и касательной к неподвижному контуру и через n и τ — к колеблющемуся контуру в рассматриваемый момент времени. Орты касательной и нормали образуют правую систему (см. фигуру). Если x_0, y_0 — координаты некоторой точки M контура при главном его положении, x, y — координаты той же точки в момент t

в неподвижной системе координат и x', y' — в системе координат, связанной с движущимся контуром, то

$$x' = x_0, \qquad x' = (x - \alpha_x)\cos\beta + (y - \alpha_y)\sin\beta$$
$$y' = y_0, \qquad y' = -(x - \alpha_x)\sin\beta + (y - \alpha_y)\cos\beta$$

Для малых α и β, отбрасывая малые величины высших порядков, кроме первого, получим

$$x' = x - \delta_x(x, t), \qquad y' = y - \delta_y(y, t) \tag{2.1}$$

Здесь $\delta_x = \alpha_x - y\beta$, $\delta_y = \alpha_y + x\beta$ — составляющие вектора перемещений $\boldsymbol{\delta}$ точек контура; так что $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma}$, где $\boldsymbol{\alpha}$ — смещения точек контура, вызванные поступательными колебаниями, и $\boldsymbol{\gamma}$ — смещения точек контура, вызванные его вращением. С точностью до малых величин первого порядка

$$x\beta = (x_0 + \alpha_x - y\beta)\beta \approx x_0\beta, \qquad y\beta = (y_0 + \alpha_y + x\beta)\beta \approx y_0\beta$$

$$\delta_x = \alpha_x - y_0\beta \quad \delta_y = \alpha_y + x_0\beta \tag{2.2}$$

Скорость возмущенного течения жидкости в точке (x, y), очевидно, равна $\mathbf{V}(x, y) + \nabla\varphi$, где $\mathbf{V}(x, y)$ — скорость в установившемся течении.

Пусть $F(x, y, t) = 0$ — уравнение твердого контура в неподвижной системе координат. Условие непротекания жидкости через контур имеет вид

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{V} + \nabla\varphi)\nabla F = 0$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y_0}\frac{\partial y'}{\partial t} + (\mathbf{V} + \nabla\varphi)\left[\mathbf{i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_0}\frac{\partial y'}{\partial y}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y_0}\frac{\partial y'}{\partial y}\right)\right] = 0$$

Последнее уравнение, используя (2.1), после несложных преобразований можно привести к виду

$$-\frac{\partial\boldsymbol{\delta}}{\partial t}\nabla F + (\mathbf{V} + \nabla\varphi)\left[\nabla F - \beta\left(\frac{\partial F}{\partial y_0}\mathbf{i} - \frac{\partial F}{\partial x_0}\mathbf{j}\right)\right] = 0 \qquad \left(\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x_0}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y_0}\mathbf{j}\right) \tag{2.3}$$

Граничное условие (2.3) выполняется на колеблющемся контуре в момент t, на котором $\mathbf{V}(x, y) = \mathbf{V}(x' + \delta_x, y' + \delta_y)$. Будем вначале предполагать, что функция $\mathbf{V}(x', y')$ всюду на контуре непрерывная и обладает непрерывными производными до вторых включительно. Тогда, считая перемещения контура малыми и ограничиваясь в разложении $\mathbf{V}(x, y)$ в ряд по степеням $\boldsymbol{\delta}$ членами первого порядка малости, получим

$$\mathbf{V}(x, y) = \mathbf{V}_0 + (\boldsymbol{\delta}\nabla)\mathbf{V}_0 \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{V}_0$ — скорость на контуре при $x = x'$, $y = y'$, т. е. при главном положении контура. Подставляя (2.4) в (2.3) и используя граничное условие $\mathbf{V}_0\nabla F = 0$, найдем

$$-\frac{\partial\boldsymbol{\delta}}{\partial t}\nabla F + [(\boldsymbol{\delta}\nabla)V_0 + \nabla\varphi]\left[\nabla F - \beta\left(\frac{\partial F}{\partial y_0}\mathbf{i} - \frac{\partial F}{\partial x_0}\mathbf{j}\right)\right] - \beta\mathbf{V}_0\left(\frac{\partial F}{\partial y_0}\mathbf{i} - \frac{\partial F}{\partial x_0}\mathbf{j}\right) = 0$$

Так как $\mathbf{V}_0(\nabla\boldsymbol{\delta}) = 0$, $(\mathbf{V}_0\nabla)\boldsymbol{\delta} = \beta(V_{0x}\mathbf{j} - V_{0y}\mathbf{i})$ и, согласно уравнению неразрывности, $\nabla V_0 = \operatorname{div} V_0 = 0$, то из векторного тождества

$$(\mathbf{V}_0\nabla)\boldsymbol{\delta} - (\boldsymbol{\delta}\nabla)\mathbf{V}_0 = \nabla\times(\boldsymbol{\delta}\times\mathbf{V}_0) - \boldsymbol{\delta}(\nabla\mathbf{V}_0) + \mathbf{V}_0(\nabla\boldsymbol{\delta})$$

имеем

$$(\boldsymbol{\delta}\nabla)\mathbf{V}_0 = -\nabla\times(\boldsymbol{\delta}\times\mathbf{V}_0) + \beta(V_{0x}\mathbf{j} - V_{0y}\mathbf{i})$$

И с точностью до малых величин первого порядка

$$\nabla\varphi\nabla F = \left(\frac{\partial\boldsymbol{\delta}}{\partial t} + \nabla\times(\boldsymbol{\delta}\times\mathbf{V}_0)\right)\nabla F \tag{2.5}$$

При выводе этой формулы использовалась идея Тиммана и Ньюмана [6], рассмотревших задачу о малых колебаниях тела, движущегося с постоянной скоростью.

Правая часть формулы (2.5) является малой величиной порядка δ, если $\partial\delta / \partial t \sim O(\delta)$. Отбрасывая малые высшего порядка в левой части уравнения, можно считать, что $\nabla\varphi$ вычисляется при $x = x'$, $y = y'$, т. е. на контуре при главном его положении. Последнее заключение справедливо и в том случае, когда $\partial\delta / \partial t$ будет конечной величиной, так как при этом $\nabla\varphi$ будет иметь порядок $\partial\delta / \partial t$ и можно пренебречь малыми величинами как в правой, так и в левой части (2.5). Следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n^\circ} = \left(\frac{\partial\boldsymbol{\delta}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{V}_0)\right)\mathbf{n}^\circ \tag{2.6}$$

Имеем

$$\nabla \times (\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{V}_0) = \nabla \times [(\delta_{\tau^\circ}\boldsymbol{\tau}^\circ + \delta_{n^\circ}\mathbf{n}^\circ) \times V_{0\tau^\circ}\boldsymbol{\tau}^\circ] =$$

$$= -\nabla \times \delta_{n^\circ}V_{0\tau^\circ}\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial x}(\delta_{n^\circ}V_{0\tau^\circ})\,\mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial y}(\delta_{n^\circ}V_{0\tau^\circ})\,\mathbf{j}$$

Здесь $\mathbf{k}$ — орт, перпендикулярный плоскости xy. При установившемся течении вектор скорости на контуре направлен по касательной к контуру, поэтому индекс τ° у $V_{0\tau^\circ}$ в дальнейшем опустим. Далее

$$(\nabla \times (\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{V}_0))\,\mathbf{n}^\circ = \frac{\partial}{\partial x}(\delta_{n^\circ}V_0)\cos(n^\circ, y) - \frac{\partial}{\partial y}(\delta_{n^\circ}V_0)\cos(n^\circ, x) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial s}(\delta_{n^\circ}V_0) = -\delta_{n^\circ}\frac{\partial V_0}{\partial s} + V_0\beta + \frac{\delta_{\tau^\circ}V_0}{R}$$

Здесь R — радиус кривизны контура. Если подставить полученные соотношения в (2.6), то будем иметь

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n^\circ} = \frac{\partial\delta_{n^\circ}}{\partial t} - \delta_{n^\circ}\frac{\partial V_0}{\partial s} + V_0\beta + \frac{V_0\delta_{\tau^\circ}}{R} \tag{2.7}$$

Ввиду того что все величины в формуле (2.7) относятся к неподвижному контуру, в дальнейшем индекс, отмечающий это обстоятельство, также опустим.

Если радиус кривизны контура достаточно большой, так что $R^{-1} \sim O(\delta)$ и $R^{-1}V\delta_\tau \sim O(\delta^2)$, то последним членом в правой части уравнения (2.7) можно пренебречь, тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\delta_n}{\partial t} - \delta_n\frac{\partial V}{\partial s} + V\beta \tag{2.8}$$

Так как $\delta = \alpha + \gamma$, то

$$\delta_n = \alpha_n(t) - \frac{1}{2}\beta(t)\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial s}, \qquad \delta_\tau = \alpha_\tau(t) + \beta(t)\left(x\frac{\partial y}{\partial s} - y\frac{\partial x}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial\delta_n}{\partial t} = \frac{\partial\alpha_n}{\partial t} - \frac{1}{2}\beta^\cdot\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial s} \qquad \left(\beta^\cdot = \frac{\partial\beta}{\partial t}\right) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\alpha_n}{\partial t} - \alpha_n\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial s}\left(\beta\frac{\partial V}{\partial s} - \beta^\cdot\right) + \frac{V}{R}\left[\alpha_\tau + \beta\left(x\frac{\partial y}{\partial s} - y\frac{\partial x}{\partial s}\right)\right] + V\beta$$

Из этой формулы следует, что в случае чисто поступательных колебаний контура

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\alpha_n}{\partial t} - \alpha_n\frac{\partial V}{\partial s} + \alpha_\tau\frac{V}{R} \tag{2.10}$$

Если контур совершает только вращательные колебания, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{1}{2}\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial s}\left(\beta\frac{\partial V}{\partial s} - \beta^\cdot\right) + \frac{V\beta}{R}\left(R + x\frac{\partial y}{\partial s} - y\frac{\partial x}{\partial s}\right) \tag{2.11}$$

Так как при выводе граничного условия (2.9) было использовано предположение о непрерывности функции $V(x, y)$ и всех ее производных до вторых включительно, то условие (2.9) имеет место лишь для задач струйного обтекания некоторого определенного класса препятствий. К этому классу относятся плавные контуры с конечной кривизной струй в точках отрыва. Очевидно, что условие (2.9) справедливо также при малых колебаниях плавных замкнутых контуров, обтекаемых сплошным потоком жидкости. В этих случаях $V(x, y)$ будет аналитической функцией координат точек контура. Из формулы (2.11), в частности, следует очевидное граничное условие $\partial\varphi / \partial n = 0$ на окружности, вращающейся около своего центра.

3. В общем случае обтекания с отрывом струй препятствий произвольной формы теорему Тейлора для определения приращения функции $V(x, y)$ использовать нельзя. Например, в простейшей задаче симметричного струйного обтекания плоской пластинки функция $V(x, y)$ будет аналитической всюду, за исключением точек отрыва струй, где $\partial V / \partial S$ обращается в бесконечность. Поэтому в таких случаях вместо разложения (2.4) можно лишь написать

$$V(x, y) = V_0 + \triangle V_0$$

Проведя необходимые выкладки, аналогичные тем, которые были сделаны при выводе условия (2.7), получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\delta_n}{\partial t} - \Delta V_n - \beta V \qquad (3.1)$$

Для вычисления ΔV_n можно использовать следующий прием, рассмотренный для задачи симметричного струйного обтекания пластинки, совершающей малые поступательные перемещения в направлении, перпендикулярном к пластинке.

Имея [1] формулы

$$z = \frac{iQ}{V_\infty}\left[2u + u\sqrt{1-u^2} + \arc\sin u\right], \qquad V_\infty \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\chi} = i\,\frac{\sqrt{1-u^2}+1}{u}$$

найдем

$$z(\chi) = \frac{iQ}{V_\infty}\left[\frac{2i\chi(3-\chi^2)}{(1-\chi^2)^2} - i\ln\frac{1-\chi}{1+\chi}\right] \qquad (3.2)$$

Воспользуемся формулой Тейлора

$$z(\chi + \Delta\chi) = z + \Delta z = z(\chi) + \frac{\partial z}{\partial\chi}\Delta\chi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial\chi^2}(\Delta\chi)^2 + \ldots$$

в которой, считая $\Delta\chi$ малыми, ограничимся членами второго порядка малости. Получим

$$\Delta x + i\Delta y = -\frac{8Q}{V_\infty}\frac{1+\chi^2}{(1-\chi^2)^3}(\Delta V_x - i\Delta V_y) - \frac{16Q}{V_\infty}\frac{\chi(2+\chi^2)}{(1-\chi^2)^4}(\Delta V_x - i\Delta V_y)^2$$

На пластинке $V_x = 0$ и $\chi = -iV_y$, поэтому

$$\Delta x = -\frac{8Q}{V_\infty}\frac{1-V_y^2}{(1+V_y^2)^3}\Delta V_x + \frac{32Q}{V_\infty}\frac{V_y(2-V_y^2)}{(1+V_y^2)^4}\Delta V_x \Delta V_y \qquad (3.3)$$

$$\Delta y = \frac{8Q}{V_\infty}\frac{1-V_y^2}{(1+V_y^2)^3}\Delta V_y + \frac{16Q}{V_\infty}\frac{V_y(2-V_y^2)}{(1+V_y^2)^4}\left[(\Delta V_x)^2 - (\Delta V_y)^2\right] \qquad (3.4)$$

Полагая $\Delta y = 0$, из (3.4) найдем

$$\Delta V_y = \frac{1}{4}\frac{1-V_y^4}{V_y(2-V_y^2)} \pm \left[\frac{1}{16}\frac{(1-V_y^4)^2}{V_y^2(2-V_y^2)^2} + (\Delta V_x)^2\right]^{1/2}$$

и подставим в (3.3). Так как при $\Delta V_x = 0$ $\Delta V_y = 0$, то в последней формуле перед корнем нужно взять знак минус.

Получим

$$\Delta x = -\frac{32Q}{V_\infty}\frac{V_y(2-V_y^2)}{(1+V_y^2)^4}\left[\frac{1}{16}\frac{(1-V_y^4)^2}{V_y(2-V_y^2)^2}+(\Delta V_x)^2\right]^{1/2}\Delta V_x \qquad (3.5)$$

Разрешая (3.5) относительно ΔV_x, находим

$$(\Delta V_x)^2 = -\frac{B}{2}\pm\left[\frac{B^2A^2+4(\Delta x)^2}{4A^2}\right]^{1/2} \qquad (3.6)$$

Здесь

$$A = \frac{32Q}{V_\infty}\frac{V_y(2-V_y^2)}{(1+V_y^2)^4}, \qquad B = \frac{1}{16}\frac{(1-V_y^4)^2}{V_y^2(2-V_y^2)^2}$$

Перед корнем в (3.6), очевидно, нужно взять знак плюс. Тогда

$$\Delta V_x = \pm\frac{2\Delta x}{\sqrt{2A\left(AB+\sqrt{A^2B^2+4(\Delta x)^2}\right)}} = \pm\left[\frac{-BA+\sqrt{B^2A^2+4(\Delta x)^2}}{2A}\right]^{1/2} \qquad (3.7)$$

Так как знаки Δx и ΔV_x должны быть противоположными, то перед корнем в (3.7) нужно взять знак минус, и, следовательно, (3.8)

$$\Delta V_x = -\frac{V_\infty}{4\sqrt{2}Q}\frac{(1+V_y^2)^3}{1-V_y^2}\left\{1+\left[1+\left(\frac{V_\infty}{Q}\frac{V_y(1+V_y^2)^2(2-V_y^2)}{(1-V_y^2)^2}\Delta x\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{-1/2}\Delta x$$

При малых значениях V_y из (3.8) следует

$$\Delta V_x = \frac{-V_\infty(1+V_y^2)^3\Delta x}{8Q(1-V_y^2)} \qquad \left(\Delta V_x = \frac{-\Delta x}{\sqrt{2|\Delta x|Q/V_\infty}} \text{ при } V_y = 1\right)$$

Подставим $V_y = u/(1+\sqrt{1-u^2})$ в (3.8); учитывая, что внешняя нормаль к пластинке совпадает с отрицательным направлением оси x, найдем

$$\Delta V_n = -\Delta V_x = \frac{V_\infty}{Q}\frac{1}{\sqrt{2(1-u^2)}\,(1+\sqrt{1-u^2})^2}\times$$

$$\times\left\{1+\left[1+\left(\frac{V_\infty}{Q}\frac{u(1+3\sqrt{1-u^2})\Delta x}{(1-u^2)(1+\sqrt{1-u^2})^2}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{-1/2}\Delta x \qquad (3.9)$$

Из граничного условия (3.1) и формулы (3.9) следует, что при гармонических колебаниях пластинки изменение возмущенной скорости во времени не подчиняется гармоническому закону. Однако при гармонических колебаниях с большой частотой и малой амплитудой ΔV_n может оказаться величиной малой более высокого порядка, чем $\partial\delta_n/\partial t$, и тогда этим членом в граничном условии (3.1) можно пренебречь. Отсюда следует, что при таких колебаниях изменение возмущенной скорости на пластинке с достаточной степенью точности подчиняется гармоническому закону.

Поступила 16 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1 Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, 1961
2. Гуревич М. И., Хаскинд М. Д. Струйное обтекание контура, совершающего малые колебания. ПММ, 1953, т. XVII, вып. 5.
3. Woods L. C. Unsteady plane flow past curved obstacles with infinite wakes. Proc. Roy. Soc., 1955, A, 229, № 1177.
4. Woods L. C. Aerodinamic forces on an oscillating aerofoil fitted with a spoiler. Proc. Roy. Soc., 1957, A, 239, № 1218.
5. Parkin P. R. Numerical data on hydrofoil response to nonsteady motions at zero cavitation number. J. Ship. Res., 1962, 6, № 3.
6. Timman R. and Newman J. N. The coupled Damping Coefficients of a Symmetric Ship. J. Ship. Res., 1962, 5, № 4.