ПЛОСКАЯ СЛАБОИСКРИВЛЕННАЯ СТРУЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. П. Фролов

(Москва)

Потенциальные установившиеся движения жидкости в тонких слоях, ограниченных криволинейными поверхностями, подробно изучались в работах [1,2] при условии, что вектор скорости течения не меняется вдоль кривых, нормальных к поверхностям, ограничивающим слой, и составляющие скорости по нормали к этим поверхностям равны нулю.

Ф. Франкль [3], изучая струйные потенциальные течения жидкости, распространяющиеся по поверхности твердого тела, получил приближенное уравнение для потенциала скоростей.

Ниже найдено решение в замкнутом виде задачи о плоскопараллельном струйном обтекании криволинейной поверхности малой кривизны.

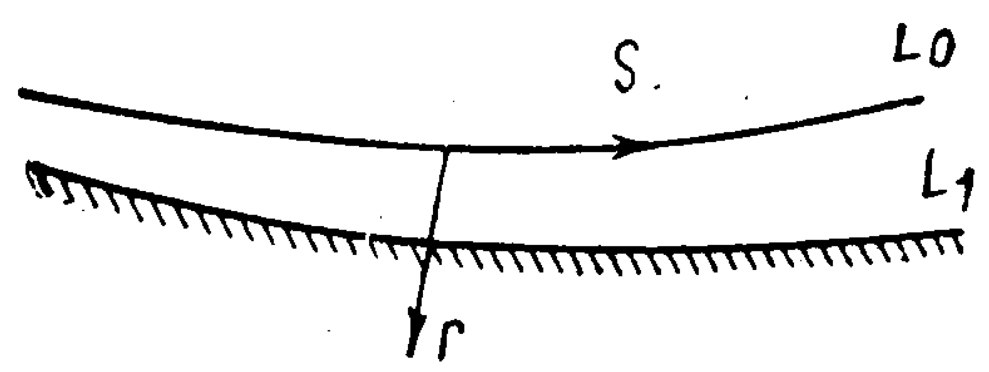
1. Рассмотрим струю идеальной несжимаемой жидкости, ограниченную слабоискривленной стенкой L_1 и областью постоянного давления $p = p_0$ (фиг. 1). Выберем вспомогательную ортогональную криволинейную систему координат, направив ось s по свободной линии тока L_0. Уравнения Эйлера и уравнение неразрывности в этой криволинейной системе координат имеют вид [4]

$$\frac{v_s}{H_s}\frac{\partial v_s}{\partial s}+\frac{v_r}{H_r}\frac{\partial v_s}{\partial r}+\frac{v_s v_r}{H_s H_r}\frac{\partial H_s}{\partial r}-\frac{v_r^2}{H_r H_s}\frac{\partial H_r}{\partial s}=-\frac{1}{\rho H_s}\frac{\partial p}{\partial s}$$

$$\frac{v_r}{H_r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_s}{H_s}\frac{\partial v_r}{\partial s}+\frac{v_r v_s}{H_r H_s}\frac{\partial H_r}{\partial s}-\frac{v_s^2}{H_s H_r}\frac{\partial H_s}{\partial r}=-\frac{1}{\rho H_r}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad (1.1)$$

$$\frac{1}{H_s}\frac{\partial v_s}{\partial s}+\frac{1}{H_r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{H_s H_r}\left(v_s\frac{\partial H_r}{\partial s}+v_r\frac{\partial H_s}{\partial r}\right)=0 \qquad \left(H_r=1,\ H_s=1+\frac{r}{R(s)}\right)$$

где H_r, H_s — параметры Лямэ, $R(s)$ — радиус кривизны струи. Предположим, что толщина струи $h(s) \ll R(s)$, и опустим в уравнениях (1.1) члены порядка $h(s) / R(s)$.



Фиг. 1

Тогда получим уравнения следующего вида:

$$v_s\frac{\partial v_s}{\partial s}+v_r\frac{\partial v_s}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}$$

$$-K(s)\,v_s^2=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\qquad \frac{\partial v_s}{\partial s}+\frac{\partial v_r}{\partial r}=0 \qquad (1.2)$$

Здесь $K(s)$ — кривизна струи. Предположим, что функция $K(s)$ непрерывно дифференцируема.

Используя уравнение неразрывности, введем функцию тока $\psi(r, s)$ и исключим из уравнений (1.2) давление $p(r, s)$. Для отыскания функции тока получим нелинейное уравнение третьего порядка в частных производных

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^3\psi}{\partial s\partial r^2}-\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}+\frac{dK}{ds}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2+2K(s)\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial s}=0 \qquad (1.3)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\psi(r, s)=\frac{\eta+f(\eta)}{K(s)} \qquad (1.4)$$

где безразмерная величина $\eta = rK(s)$.

Так как L_0 есть линия тока, то можно положить при $r = 0$

$$\psi(0, s)=0, \qquad f(0)=0 \qquad (1.5)$$

Подставляя выражение (1.4) для функции тока в уравнение (1.3), получим для определения $f(\eta)$ обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$(\eta+f)f'''+(1+f')f''+2\eta(1+f')f''+(1+f')^2=0 \qquad (1.6)$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{d\eta}\left[(\eta + f) f'' + \eta(1 + f')^2\right] = 0$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$(\eta + f) f'' + \eta(1 + f')^2 = C_1 \tag{1.7}$$

Из условия (1.5) вытекает $C_1 = 0$. В этом случае уравнение (1.7) легко интегрируется, и для функции $f(\eta)$ получаем выражение

$$f(\eta) = \frac{c\eta}{\eta + 2} - \eta \qquad (C = \mathrm{const})$$

Следовательно, искомая функция тока имеет вид

$$\psi(r, s) = \frac{Cr}{rK(s) + 2} \tag{1.8}$$

Для определения постоянной C найдем составляющие скорости

$$v_s = \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{2C}{[rK(s) + 2]^2}, \qquad v_r = -\frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{Cr^2K'(s)}{[rK(s) + 2]^2} \tag{1.9}$$

При $r = 0$ скорость $v_r = 0$, а $v_s = v_0$, где скорость v_0 — постоянна вдоль свободной линии тока L_0 и определяется из уравнения Бернулли по известному давлению p_0. Из (1.9) следует, что постоянная $C = 2v_0$.

Наряду с линией тока L_0 криволинейная стенка L_1, уравнение которой в выбранной системе координат есть $r = h(s)$, также будет линией тока, т. е. $\psi[h(s), s] = Q$, где Q — расход жидкости в струе. Из этого соотношения, используя (1.8), находим

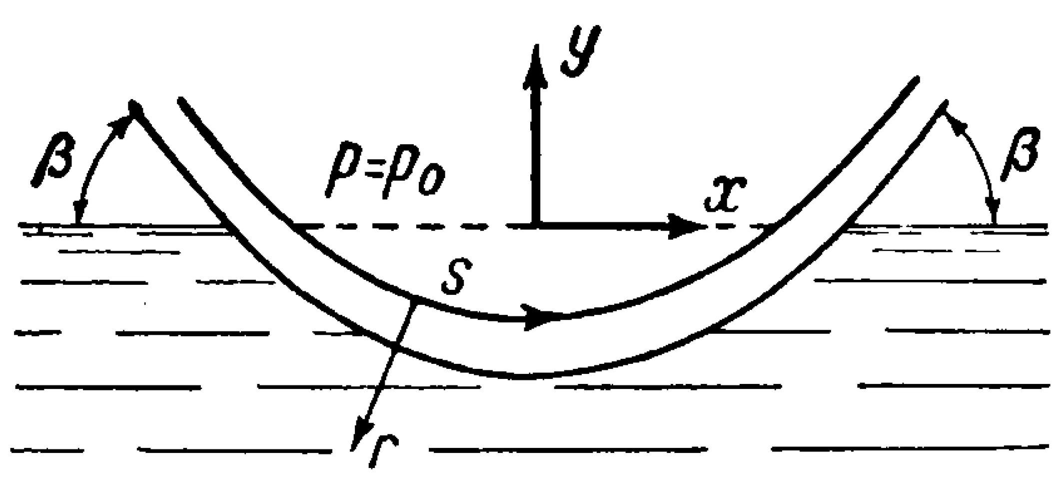
$$h(s) = \frac{2Q}{2v_0 - QK(s)} \tag{1.10}$$

Таким образом, течение полностью определяется, когда известна кривизна струи. Так для скорости $v_1(s)$ на стенке L_1 получаем из (1.9) при $r = h(s)$

$$v_1^2(s) = \frac{4v_0^2\,[4 + h^4(s)\,K'^2(s)]}{[h(s)\,K(s) + 2]^4}$$

или, заменяя $h(s)$ по (1.10), (1.11)

$$v_1^2(s) = \frac{4v_0^2}{(2v_0\,/\,Q)^4}\left[K'^2(s) + \frac{1}{4}\left(K - \frac{2v_0}{Q}\right)^4\right]$$



Фиг. 2

Отметим, что соотношение (1.11) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для кривизны струи $K(s)$, если считать известным распределение скоростей на стенке L_1.

2. Используем полученные результаты при решении задачи об ударе струи о поверхность тяжелой жидкости (фиг. 2). На границе соприкосновения струи и покоящейся тяжелой жидкости будет иметь место контактный разрыв скоростей. Давление на этой границе, которое не претерпевает разрыва, примем равным гидростатическому: $p_1 = p_0 - \gamma y(s)$. Указанное явление особенно четко наблюдается при ударе газовой струи о поверхность тяжелой жидкости. Здесь $x(s)$, $y(s)$ — уравнения границы L_1 в декартовых координатах (фиг. 2), γ — удельный вес тяжелой жидкости.

Скорость $v_1(s)$ на границе определится из уравнения Бернулли

$$v_1^2(s) = v_0^2 + 2\gamma y(s) \tag{2.1}$$

и затем кривизна струи по (1.11).

Производная $dh\,/\,ds$ есть величина малая порядка $h(s)\,/\,R(s)$, и поэтому в точном условии $v_r = v_1 \sin\theta$ можно положить $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta = dh\,/\,ds$ (где θ — угол наклона скорости к оси s).

Поэтому при обусловленной малости отношения $h(s)\,/\,R(s)$, пользуясь приближенным соотношением

$$v_r = v_1\frac{dh}{ds} \tag{2.2}$$

вместо уравнения (1.11) получаем

$$\frac{4v_0}{[h\,(s)\,K\,(s)+2]^2}=v_1\,(s),\quad h\,(s)=\frac{Q}{\sqrt{v_0v_1\,(s)}}\tag{2.3}$$

и по (1.10) кривизна струи

$$K(s)=\frac{2v_0}{Q}\left[1-\left(\frac{v_1\,(s)}{v_0}\right)^{1/2}\right]\tag{2.4}$$

Подставляя в (2.4) значение $v_1(s)$ из (2.1), получаем зависимость вида

$$K(s)=\frac{2}{Q}\left(v_0-\sqrt{v_0\sqrt{v_0^2+2\gamma y\,(s)}}\right)\tag{2.5}$$

Ввиду тонкости струи с точностью до малых второго порядка примем кривизну струи равной кривизне линии L_1. Тогда если считать кривизну кривой L_1 известной по (2.5), то уравнения кривой имеют следующий вид [5]

$$y\,(s)=\int_0^s\sin\left[\int_0^s K\,(s)\,ds+\alpha_0\right]ds+y\,(0)\tag{2.6}$$

$$(\alpha_0=\mathrm{const})$$

$$x\,(s)=\int_0^s\cos\left[\int_0^s K\,(s)\,ds+\alpha_0\right]ds+x\,(0)\tag{2.7}$$

Исключая из (2.5) и (2.6) кривизну $K\,(s)$, получаем

$$\frac{d^2y\,/\,ds^2}{\sqrt{1-(dy\,/\,ds)^2}}=\frac{2}{Q}\left(v_0-\sqrt{v_0\sqrt{v_0^2+2\gamma y\,(s)}}\right)\tag{2.8}$$

Это уравнение решается элементарно подстановкой $dy\,/\,ds=B\,(y)$. Окончательно задача об определении формы струи сводится к квадратуре

$$s=\pm\int\left\{1-\left[\frac{2}{Q}\left(v_0y-\frac{2\sqrt{v_0}}{5\gamma}\,(v_0^2+2\gamma y)^{5/4}\right)+C_2\right)\right]^2\right\}^{-1/2}dy\tag{2.9}$$

По известной функции $y(s)$ определяется кривизна $K(s)$ и затем по (2.7) находим $x\,(s)$. Однако, используя соотношение $dx^2+dy^2=ds^2$, можно исключить параметр s

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\{1-[2Q^{-1}\,(v_0y-{}^2/_5v_0^{1/2}\gamma^{-1}\,(v_0^2+2\gamma y)^{5/4})+C_2]^2\}^{1/2}}{\{2Q^{-1}\,[v_0y-{}^2/_5v_0^{1/2}\gamma^{-1}\,(v_0^2+2\gamma y)^{5/4}]+C_2\}^{-1}}\tag{2.10}$$

Постоянная C_2 определяется по известному углу входа струи. Если положить угол входа струи (фиг. 2) равным β, то получим

$$C_2=\frac{4v_0^3}{5\gamma Q}+\cos\beta$$

Из уравнения (2.10) можно непосредственно определить максимальную глубину проникновения струи в жидкость (положив $dy\,/\,dx=0$), а также угол выхода струи. Оказывается, что угол выхода струи равен углу входа.

Поступила 2 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубева О. В. Исследование движений жидкости по криволинейным поверхностям. Уч. зап. МОПИ, 1951, т. 18, вып. 2.
2. Голубева О. В. Уравнение установившихся потенциальных движений идеальной несжимаемой жидкости в пленке переменной толщины, расположенной на криволинейной поверхности. Уч. зап. МОПИ, 1955, т. 33.
3. Франкль Ф. И. Приближенный расчет струйного потенциального течения жидкости, распространяющегося по поверхности твердого тела тонким слоем. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1 и 2. Физматгиз, 1963.
5. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии, Гостехтеоретиздат, 1950.