

ОБ УДАРНЫХ ВОЛНАХ, ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ТОНКИХ ПРОФИЛЕЙ ВЯЗКИМ ГАЗОМ

В. В. Анисимов, Р. В. Хохлов

(Москва)

Рассматривается плоское установившееся сверхзвуковое обтекание тонкого профиля. Принимается, что газ обладает слабой вязкостью, а возникающие ударные волны имеют малую интенсивность. Предполагается, что характеристики потока являются функциями не только волнового параметра $\tau = x - \tau y$, а, кроме того, слабо зависят от одной из координат. В таком случае задача может быть сведена к решению квазилинейного параболического уравнения (2.1).

Полученное уравнение позволяет в принятом приближении составить полную картину поведения ударной волны на любых расстояниях от обтекаемого профиля. Существенное влияние на рассасывание фронта ударной волны оказывает взаимодействие ее с волной разрежения. Оценка ширины фронта скачка уплотнения, проведенная на основе параболического уравнения, показала, что, пока фронт ударной волны не входит в контакт с волной разрежения, его ширина имеет почти постоянную величину. Но как только наступает взаимодействие волн, начинается расплывание фронта пропорционально корню квадратному из расстояния до профиля. При этом меняется и положение ударной волны. Нарушается ее прямолинейность. В некоторых случаях решение поставленной задачи может быть сведено к упрощенным уравнениям: квазилинейному уравнению (3.1) и линейному уравнению (5.3). В работе указываются границы применимости этих уравнений.

1. Решается плоская задача об установившемся сверхзвуковом обтекании газом тонкого заостренного профиля, по направлению оси x . Предполагается, что возникающая на кромке профиля ударная волна имеет малую интенсивность. При этом характеристики потока — скорость v , давление p и плотность газа ρ испытывают возмущения одного порядка малости μ . Ради удобства за масштаб длины принята длина свободного пробега молекул газа L . Тогда ширина ударной волны будет по крайней мере порядка $1/\mu$ относительно выбранного масштаба. Поэтому естественно считать, что внутри скачка уплотнения дифференцирование по координатам x и y повышает порядки малости характеристик потока. В силу затухания возмущений такая оценка остается справедливой и за ударной волной, в том числе и в волне разрежения.

Предполагается, что процессы диссипации в газе весьма малы. Коэффициенты вязкости η , ζ и коэффициент теплопроводности κ натекающего потока газа меняются мало, во всяком случае в μ раз медленнее, чем основные характеристики потока.

В таком случае в координатах Эйлера исходная система уравнений имеет следующий вид:

$$\rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + (\zeta + \frac{1}{3} \eta) \nabla (\nabla \mathbf{v}) \quad (1.1)$$

$$\rho T \mathbf{v} \nabla S = \kappa \nabla^2 T + \sigma_{ik}' \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad (1.2)$$

$$\nabla (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.3)$$

Здесь S — энтропия, T — абсолютная температура, σ_{ik}' — вязкий тензор напряжений

$$\sigma_{ik}' = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad (1.4)$$

Систему уравнений (1.1) — (1.3) необходимо еще дополнить уравнением состояния газа и каким-либо соотношением, связывающим термодинамические величины. В дальнейшем ради простоты в качестве уравнения состояния используется уравнение для идеального газа $p = \rho RT$.

Не затрагивая процессов в пограничном слое, краевые условия естественно записать для внешней стороны пограничного слоя и считать, что на бесконечности все возмущения затухают.

Обратимся к уравнению переноса тепла (1.2). Из полного дифференциала температуры T , как функции давления и энтропии, для установившегося потока следует

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \nabla p + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p \nabla S \approx \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \nabla p \quad (1.5)$$

так как при малой интенсивности ударных волн изменение энтропии внутри волны имеет второй порядок малости по сравнению с приращением давления. Далее

$$\nabla(\nabla T) = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial p^2}\right)_S (\nabla p)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \nabla^2 p \approx \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \nabla^2 p \quad (1.6)$$

так как $(\nabla p)^2 \ll \nabla^2 p$. Таким образом, с точностью до членов третьего порядка малости включительно

$$\rho v \nabla S \approx \frac{1}{T} \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \nabla^2 p \quad (1.7)$$

С другой стороны, полный дифференциал давления, как функции объема V и энтропии, и известные термодинамические соотношения

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{c_V}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V, \quad c_p - c_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (1.8)$$

позволяют аналогично связать градиенты давления, плотности и энтропии

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \nabla \rho + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S \left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p}\right) \nabla S \quad (1.9)$$

Подставляя в (1.9) выражение ∇S из (1.7), можно записать уравнение потока тепла в следующем виде:

$$v \nabla p = v \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \nabla \rho + \frac{\kappa}{\rho} \left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p}\right) \nabla^2 p \quad (1.10)$$

Если теперь подставить сюда ∇p из уравнения Навье — Стокса, то удастся исключить и другую переменную — давление p . Кроме того, в рамках принятой точности можно считать, что $(\partial p / \partial \rho)_S$ равно квадрату скорости звука — a^2 . При этом легко показать, что для идеального газа

$$a^2 = a_0^2 - \frac{1}{2} (\gamma - 1) (v^2 - v_0^2) + O(\mu^2) \quad (\gamma = c_p / c_V) \quad (1.11)$$

Здесь a_0 — скорость звука в невозмущенной среде, v_0 — скорость невозмущенного потока.

Члены второго порядка малости в (1.11) связаны с диссипацией. В уравнение (1.10) они не войдут из-за малого множителя $\nabla \rho$. В результате получится уравнение следующего вида:

$$\rho (v \nabla) v + a^2 \nabla \rho = \left[\left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) + \kappa \left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p} \right) \right] \Delta v + \left[\left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) + \kappa \left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p} \right) \right] \text{rot}(\text{rot } v) \quad (1.12)$$

Вихрь скорости v в рассматриваемой задаче имеет порядок μ^4 . Краткое доказательство такого утверждения сводится к следующему. Если применить операцию rot к уравнению Навье — Стокса (1.1) и выразить $\nabla \rho$ из (1.12), то получится уравнение следующего вида:

$$v \nabla \omega + \omega \nabla v - \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \omega = O(\mu^5) \quad \left(\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (1.13)$$

Теперь можно воспользоваться методом последовательных оценок. Второй и третий члены левой части (1.13) имеют по крайней мере порядок не ниже μ^4 . Так как $v \sim v_0$, то такого же порядка должен быть и $\nabla \omega$. Но дифференцирование по координатам повышает порядок. Следовательно, $\nabla^2 \omega \sim \mu^5$, $\omega \sim \mu^3$, т. е. и средний член $\omega \nabla v \sim \mu^5$. Последнее в свою очередь означает, что производные вихря должны иметь порядок μ^5 , а сам вихрь является величиной четвертого порядка малости.

Полученный результат нельзя считать неожиданным. Хотя процессы диссипации и нарушают изэнтропичность течения, но в то же самое время они являются и причиной выравнивания, сглаживания всех процессов. Вследствие этого в принятом приближении рассматриваемое течение квазипотенциально.

Таким образом, в уравнении (1.12) следует опустить последний член правой части. Кроме того, можно считать, что

$$v_y = \int_{-\infty}^x \frac{\partial v_x}{\partial y} dx + \int_{-\infty}^x \omega dx + f(y) \approx \int_{-\infty}^x \frac{\partial v_x}{\partial y} dx \quad (1.14)$$

Интеграл от вихря имеет порядок μ^3 ; так как $v_y(-\infty, y) \equiv 0$, то $f(y) = 0$. Окончательный учет порядков величин в (1.12), уравнение непрерывности (1.3), выражения (1.11) и (1.14) дадут квазилинейное уравнение процесса

$$\begin{aligned} & [m^2 + (\gamma + 1) M^2 u] \frac{\partial u}{\partial x} + 2M^2 \frac{\partial u}{\partial y} \int_{-\infty}^x \frac{\partial u}{\partial y} dx - \\ & - [1 - (\gamma - 1) M^2 u] \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-\infty}^x \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) = \nu M^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Уравнение записано в безразмерном виде: координаты x и y нормированы на длину свободного пробега $-L$, M — число Маха невозмущенного потока и

$$\begin{aligned} v_x &= v_0(1 + u), \quad v_y = v_0 v, \quad M = v_0 / a_0, \quad m^2 = M^2 - 1 \\ v &= \frac{1}{\rho_0 v_0 L} \left[\left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) - \kappa \left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Без правой части (1.15) представляет собой известное квазилинейное уравнение потенциального течения идеального газа. Правая часть — учет диссипации среды.

2. В линейном приближении (1.15) сводится к одномерному волновому уравнению. В пространстве над обтекаемой поверхностью ($y > 0$) решение такого уравнения имеет вид волны с параметром $\tau = x - my$. Это дает право предположить, что общее решение уравнения (1.15) также является функцией волнового параметра τ , но, кроме того, оно еще как-то слабо зависит от одной из координат x или y . Последнее означает, что производные u по этой переменной на порядок μ выше производных по τ . Для определенности принято, что $u = u(\tau, \mu y)$.

Из этого следует, что скорость u не постоянна на характеристике $\tau = x - my$, а как-то, в соответствии с конкретной задачей, медленно меняется на характеристике от точки к точке. Следует заметить, что аналогичным методом уже изучались вопросы распространения волн [1]. Тогда в силу сказанного с учетом порядка малости производных уравнение (1.15) примет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + 2\alpha u \frac{\partial u}{\partial \tau} = \delta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad \left(\alpha = \frac{1}{4} (\gamma + 1) \frac{M^4}{m}, \quad \delta = \frac{1}{2} \nu \frac{M^4}{m} \right) \quad (2.1)$$

Полученное уравнение можно записать и в другой форме

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \delta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} \quad \left(u = -\frac{\delta}{\alpha} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \right) \quad (2.2)$$

В тонком пограничном слое тангенциальная составляющая скорости меняется значительно быстрее, чем ее нормальная составляющая. Поэтому краевое условие для уравнений (2.1) или (2.2) естественно записать для внешней стороны пограничного слоя в виде

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\mathbf{n} - \text{нормаль к профилю}) \quad (2.3)$$

Итак, окончательно задача может быть сформулирована следующим образом. Найти ограниченную функцию u или Θ ($y \geq 0$, $-\infty < \tau < \infty$), удовлетворяющую уравнению (2.1) или (2.2) и краевому условию (2.3), заданному на обтекаемом профиле. Для тонкого тела с углом атаки, равным нулю, условие (2.3) можно задать при $y = 0$ как $v \approx df/dx$, где $f(x)$ — функция профиля. И так как $v \approx -m u$, то краевое условие для уравнений (2.1) и (2.2) соответственно примет вид:

$$u_{y=0} = -\frac{1}{m} \frac{df}{dx} \Big|_{x=\tau}, \quad \Theta_{y=0} = \exp \left(\frac{\alpha}{m\delta} \frac{df}{d\tau} \right)_{x=\tau} \quad (2.4)$$

Выражения (2.4) записаны для верхней полуплоскости.

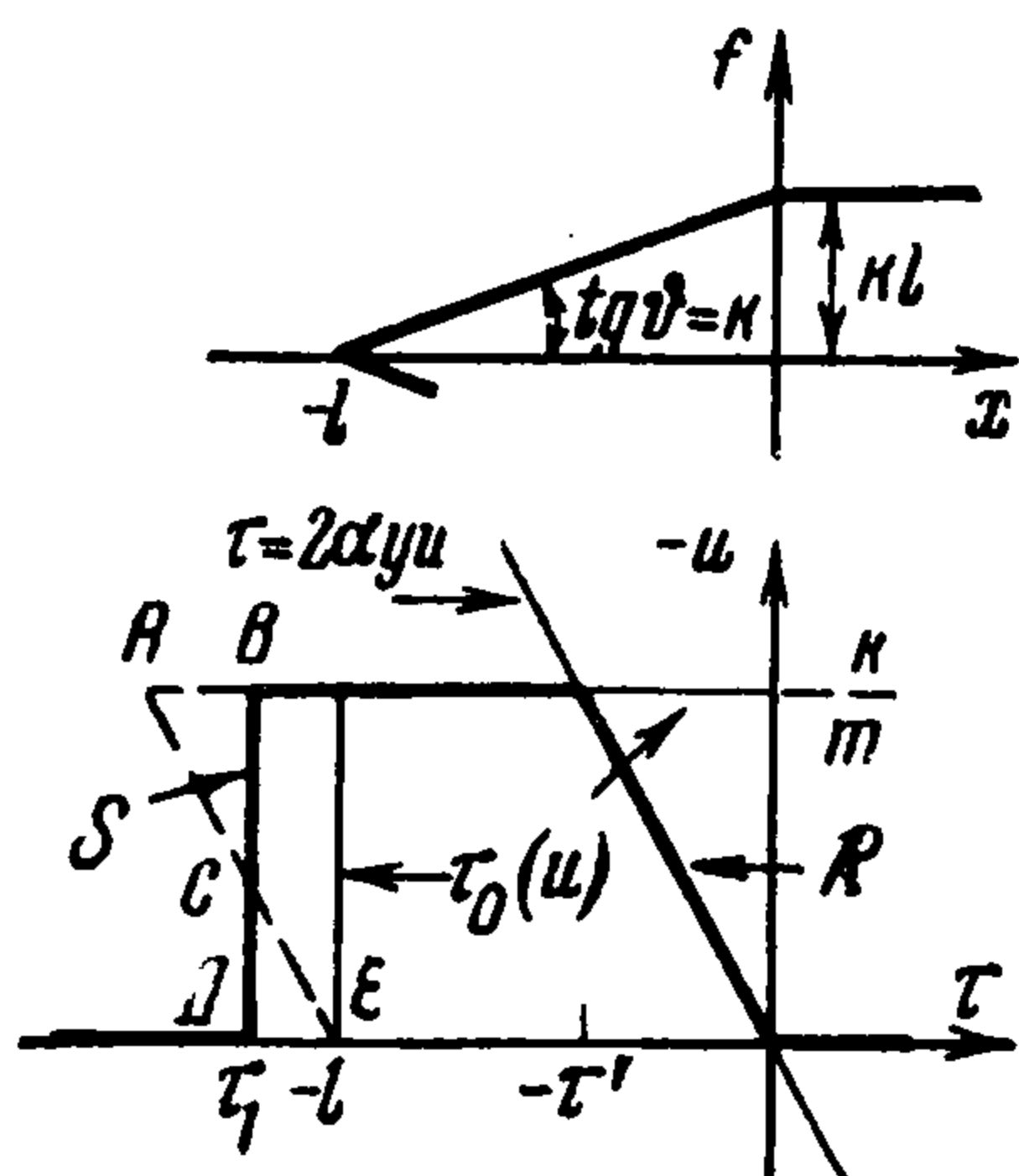
Следует заметить, что квазилинейное параболическое уравнение (2.1) в аэродинамике встречалось [3, 4]. Известно, что к нему можно прийти в двух задачах в приближенной теории слабых неустановившихся ударных волн в реальной жидкости и в теории турбулентности. Однако до сих пор вывода уравнения (2.1) дано не было. Не рассматривался и случай установившегося сверхзвукового обтекания.

3. Рассмотрим частный случай, когда диссипативные процессы бесконечно малы. Обратимся к квазилинейному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial y} + 2\alpha u \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad (3.1)$$

Легко показать, что его решение записывается в виде

$$\tau = 2\alpha u y + \tau_0(u) \quad (3.2)$$



Фиг. 1

Здесь $\tau_0(u)$ — функция, определяемая условием (2.4), а первый член правой части существует лишь в области задания τ_0 .

Для плоского клина с нулевым углом атаки функция профиля

$$f = \begin{cases} 0 & (x < -l) \\ k(x+l) & (-l < x < 0) \quad (k \sim \mu) \\ kl & (x > 0) \end{cases} \quad (3.3)$$

Поэтому

$$\tau_0 = \begin{cases} -l & (0 > u > -k/m) \\ 0 & (u < -k/m) \end{cases} \quad (3.4)$$

На фиг. 1 показаны график профиля и решение u для определенного значения y . Из физических соображений левый край волны обрывается в точке B , соответствующей средней величине скачка возмущения скорости u . Иными словами, площади треугольников ABC и DEC должны быть равны. Точке D соответствует значение

$$\tau_1 = -l - \alpha k m^{-1} y = -l - 1/2 \tau' \quad (3.5)$$

которое определяет угол наклона скачка уплотнения S к направлению натекающего потока:

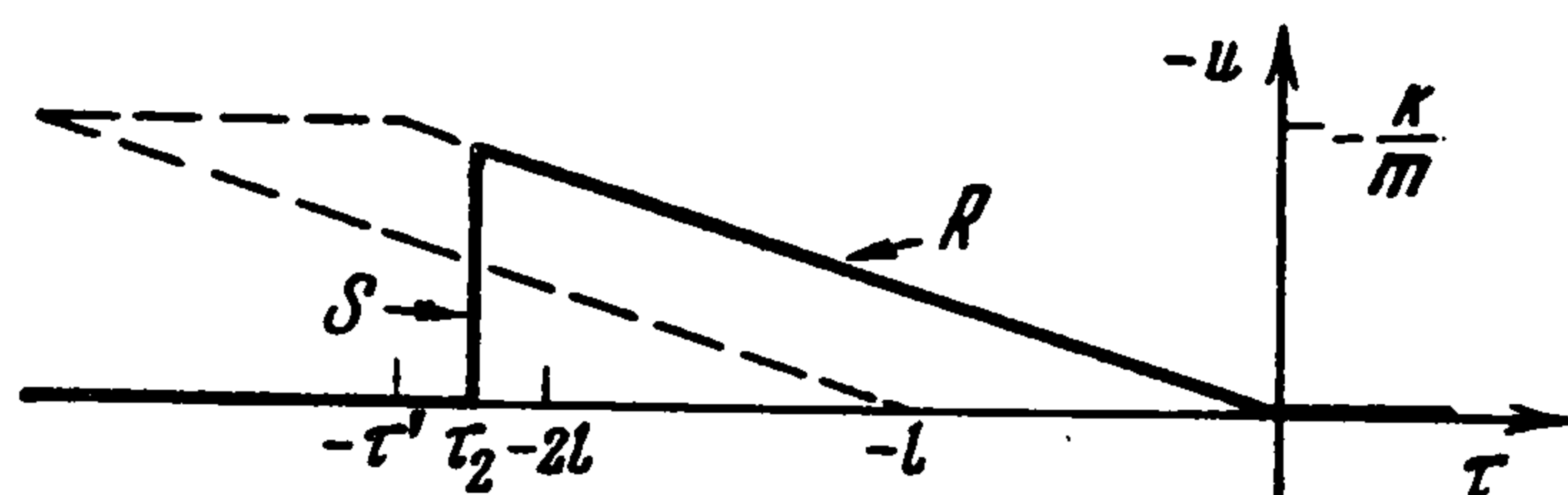
$$\operatorname{tg} \varphi = [m - 1/4 (\gamma + 1) M^4 m^{-2} k]^{-1} \quad (3.6)$$

Правый склон трапецевидного импульса относится к волне разрежения R . С увеличением расстояния y ширина этой волны растет и в конце концов при

$$y_* = \frac{lm}{\alpha k} = \frac{4}{\gamma + 1} \frac{m^2 l}{M^4 k} \quad (3.7)$$

ее левый край обязательно пересечется с ударной волной. С этого момента форма u вырождается в треугольную (фиг. 2), а величина скачка скорости начнет падать по закону:

$$u = -\frac{k}{m} \left(\frac{y_*}{y} \right)^{1/2} \quad (3.8)$$



Фиг. 2

Положение ударной волны теперь будет определяться из равенства

$$\tau_2^2 = 4lkm^{-1}\alpha y = 2\tau' l \quad (3.9)$$

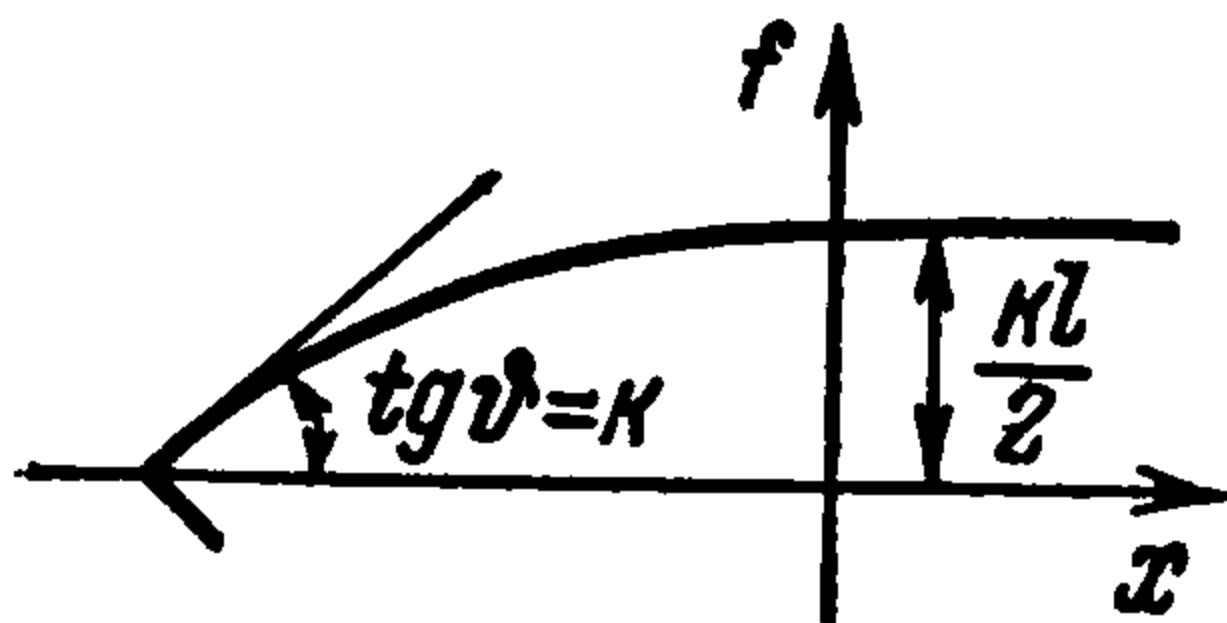
Таким образом, если до $y = y_*$ наклон ударной волны постоянен, то при $y > y_*$ с увеличением расстояния от клина этот наклон уменьшается и стремится к $1/m$, согласно

$$\frac{dy}{dx} = \left[m - \left(\frac{lka}{my} \right)^{1/2} \right]^{-1} \quad (3.10)$$

Физическая картина ясна. Взаимодействие ударной волны S с волной разрежения R неминуемо приводит к ослаблению интенсивности скачка уплотнения и тем

Так как $|2\tau'(\tau + \tau_1)| \gg b^2$, то экспонента определяет положение крутого ударного фронта так же, как и (3.5).

Выражение (4.7) позволяет оценить ширину фронта ударной волны (по направлению натекающего потока)



Фиг. 5

$$\Delta \tau = \Delta x \approx \frac{b^2}{\tau'} = \frac{4}{\gamma + 1} \frac{vm}{v_0 k} \quad (4.8)$$

Выражение ширины фронта ударной волны согласуется с ранее выведенными формулами [5, 8]. Так, например, показано [5], что для скачка уплотнения при малой интенсивности ударной волны ширина скачка

$$\Delta = \frac{4vV^2}{(p_2 - p_1) (\partial^2 V / \partial p^2)_S a^2} \quad (4.9)$$

где p_1 и p_2 — соответственно значения давления до и после скачка.

Пользуясь соотношениями

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} \approx \frac{\gamma M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \vartheta, \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_S = \frac{\gamma + 1}{\gamma^2} \frac{V}{p^2}, \quad \gamma p V = a^2$$

где ϑ — угол клина, можно получить из (4.9) формулу (4.8).

Когда $\tau' > 2l$, то до $|\tau| = 2l$ справедливы прежние рассуждения, т. е. на этом участке снова $u \approx k\tau/m\tau'$. Для $\tau' > |\tau| > l$

$$u \approx \frac{k\tau}{m\tau'} \left[1 - \frac{2\sqrt{\pi}\tau(\tau + \tau')}{b\tau'} \exp \frac{\tau^2 - 2\tau'l}{b^2} \right]^{-1} \quad (4.10)$$

В этом выражении экспоненциальный член существен в образовании ударного фронта, второй член задает волну разрежения. В окрестности $\tau_2^2 = 2\tau'l$ u убывает в b раз относительно значения в максимуме. Здесь τ_2 — то же самое, что и (3.9), и определяет переднюю границу скачка уплотнения. Оценка ширины фронта ударной волны теперь дает

$$\Delta \tau = \Delta x \approx \frac{b^2}{\sqrt{2\tau'l}} = \frac{2}{\sqrt{\gamma + 1}} M^2 \frac{v}{v_0} \left(\frac{y}{kl}\right)^{1/2} \quad (4.11)$$

Итак, взаимодействие волны разрежения с ударной волной вызывает не только уменьшение интенсивности скачка параметров. Вместе с этим возникает рассасывание, сглаживание переднего фронта. Может быть, лучше сказать так: именно уменьшение интенсивности ударной волны в свою очередь приводит к такому рассасыванию, так как увеличивается путь «вязкого» взаимодействия.

Как видно из (4.11), ширина ударной волны по-прежнему определяется параметрами натекающего потока, интенсивностью волны и диссипацией среды. Но, кроме того, в рассматриваемом случае эта ширина постепенно увеличивается пропорционально корню из расстояния до обтекаемого профиля.

Существование расстояния «расплывания» ударной волны практически имеет место для любой формы обтекаемого профиля клина. Опуская выкладки, например, можно привести оценку ширины фронта для параболического профиля

$$f(x) = \frac{k}{2l}(l^2 - x^2) \quad (-l \leq x \leq 0), \quad f(x) = \frac{kl}{2} \quad (x > 0)$$

показанного на фиг. 5. В принятых обозначениях

$$\Delta x \approx \frac{b^2}{\tau'} \left(\frac{\tau'}{l} + 1\right)^{1/2} \quad (4.12)$$

Ясно видно, если $\tau'/l \ll 1$ (при $ky/l \ll 1$), то снова это соответствует постоянной ширине фронта. Для значений $ky/l \gg 1$

$$\Delta x \approx \frac{4}{\sqrt{2(\gamma + 1)}} M^2 \frac{v}{v_0} \left(\frac{y}{kl}\right)^{1/2} \quad (4.13)$$

5. Как было видно выше, все определяется соотношением параметров b и τ' , которые оба зависят от расстояния y . Поэтому, как следует из (4.5), может быть два различных случая (фиг. 6).

Если $b \gg \tau'$, то уравнение (2.1) практически сводится к линейному. В самом деле, тогда экспоненты в выражении (4.4) меняются медленно, а поэтому

$$I + A \approx 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{\psi_2}^{\psi_4} e^{-x^2} dx + \int_{\psi_3}^{\psi_1} e^{-x^2} dx \right) = 1 + z \quad (5.1)$$

где интегральный член правой части z мал. С учетом этого

$$\frac{I}{A + I} \approx I - z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\psi_4}^{\psi_3} e^{-x^2} dx \quad (5.2)$$

Теперь процесс с достаточной точностью описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \delta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (5.3)$$

Из него следует, что ударная волна и волна разрежения размываются одинаково: $\Delta \tau \sim b \sim \sqrt{y}$.

При малых y условие $b \gg \tau'$ выполняется всегда. Но по мере возрастания координаты y указанное неравенство параметров обязательно переменит знак (при $y = y_1$). Картина поведения газа в пространстве определяется тем, на каком расстоянии от профиля это происходит. В случае

$$y_1 = \frac{8m^2 v}{(\gamma + 1)^2 M^4 k v_0} < y_* \quad (5.4)$$

на участке $y_1 < y < y_*$ фронт ударной волны имеет постоянную ширину, определяемую лишь свойствами потока. Если же b и τ' сравниваются при y_1 , превышающем y_* , то зависимость ширины фронта от расстояния сохраняется на любых удалениях от профиля. Взаимодействие ударной волны с волной разрежения лишь несколько усиливает такую зависимость. Последний случай возможен при очень малых углах раствора клина или же при несколько повышенной диссипации среды. В случае же $y_1 \gg y_*$ по существу теряется смысл ударной волны.

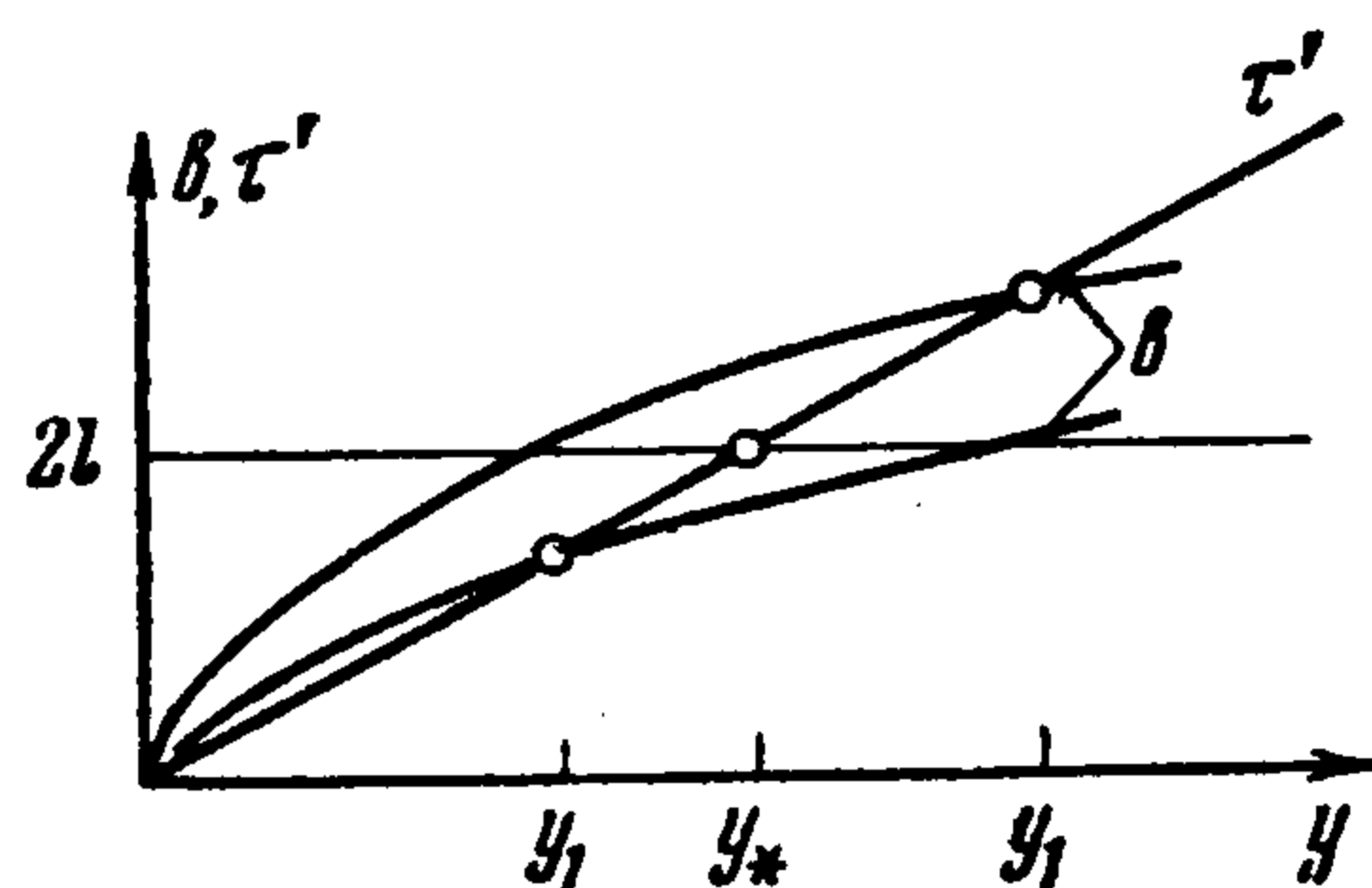
Итак, если $y_1 \ll y_*$, то задача описывается полным уравнением (2.1), когда же $y_1 \gg y_*$ с достаточной точностью можно пользоваться линейным уравнением (5.3).

Авторы признательны Х. А. Рахматулину, М. Д. Ладыженскому и В. А. Ершину за полезные дискуссии.

Поступила 24 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. С о л у я н С. И., Х о х л о в Р. В. Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде. Вестник МГУ, 1961, № 3.
2. W h i t h a m G. B. The flow pattern of a supersonic projectile. Commun. Pure Appl. Math. 1952, v. V, No. 3.
3. H o r f E. The partial differential equation $U_t + UU_x = \mu U_{xx}$. Commun. Pure Appl. Math. 1950, v. III, No. 3.
4. C o l e J. D. Quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamic. Quart Appl. Math., 1951, v. IX, 3.
5. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
6. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.
7. F r i e d r i c h s K. O. Formation and Decay of Shock Waves. Commun. Appl. Math. 1948, v. I, No. 3.
8. B e c k e r R. Stosswelle und Detonation. Z. Phys. 1921—1922, 8.



Фиг. 6