Из (3.7) получим при $N \to \infty$

$$u_{k+1}(s, N) \sim \sum_{r=0}^{k} U_{r+1,\, k-r}(s)\, N^{k-r} \tag{3.8}$$

В частности, из (3.8) следует при $N \to \infty$

$$u_1(s, N) = U_{10}(s), \qquad u_2(s, N) \sim U_{11}(s)\, N + U_{20}(s)$$

$$u_3(s, N) \sim U_{12}(s)\, N^2 + U_{21}(s)\, N + U_{30}(s) \qquad \text{и т. д.}$$

Аналогично для давления p.

Вышесказанное подтверждается рассмотрением первых двух членов «внутреннего» разложения, полученных Ван Дайком [1].

Отметим в заключение, что «экспоненциальные» члены будут играть роль при исследовании течений со средними числами Рейнольдса, которые для пластинки оказываются порядка 10 [4].

Автор благодарит С. В. Фальковича за обсуждение рассмотренных вопросов.

Поступила 18 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Dyke M. Higher approximations in boundary — layer theory, parts 1, 2. J. Fluid Mech., 1962, v. 4, parts 2, 4, pp. 161—177, 481—495.
2. Кочин И. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II, Гостехиздат, 1948, стр. 357—371.
3. Lagerstrom P. A. Note on the preceding two pepers. J. Math. Mech., 1957, v. 6, No. 5.
4. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962, стр. 33.

О СТРУКТУРЕ КРИВОЛИНЕЙНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

А. И. Толстых

(Москва)

Рассматривается структура скачка уплотнения при малых числах Рейнольдса на основе уравнений Навье — Стокса. Соответствующие функции ищутся в виде разложения по малому параметру, пропорциональному кривизне; приводятся некоторые результаты для нулевых и первых членов этого разложения.

В связи с рассмотрением сверхзвукового обтекания тел при небольших числах Рейнольдса возникает необходимость в уточнении схемы невязкого течения, согласно которой, в частности, скачок уплотнения считается поверхностью разрыва. Этот вопрос впервые был затронут в работе [1], в дальнейшем в упрощенной постановке к нему обращались различные авторы [2-4]; последовательное изучение его содержится в работе [5]. Способ, изложенный в [5], состоит в построении «внутренних» и «внешних» асимптотических разложений по малому параметру, стремящемуся к нулю вместе с вязкостью, члены которых соответствуют разрывному «внешнему» течению и «внутренней» структуре скачка. Возможен, однако, другой подход, который и рассматривается в настоящей заметке [1].

Будем считать, что течение во всей бесконечной области описывается уравнениями Навье — Стокса, в которых характерный масштаб вязкости, например вязкость на бесконечности, играет роль фиксированного параметра. Задача заключается в опре-

[1] Можно показать, что полученные ниже результаты могут быть использованы при решении задачи об обтекании тела вязкой жидкостью.

делении структуры, вообще говоря, криволинейного скачка уплотнения при условии, что позади этого скачка существуют вязкие напряжения и тепловые потоки. Другими словами, требуется найти решение уравнений Навье — Стокса, стремящееся на бесконечности к параметрам невозмущенного потока и удовлетворяющее на достаточно гладкой кривой Г должному числу граничных условий (например, имеющее на Г заданные значения производных скоростей и температуры).

В одномерном случае (прямолинейный скачок) удается непосредственно проинтегрировать систему Навье — Стокса и решить поставленную задачу [1], в связи с этим естественно искать решение общей проблемы в виде разложения по малому параметру, пропорциональному кривизне (или обратно пропорциональному радиусу кривизны) [2]; при этом нулевым членом этого разложения окажется структура прямолинейного скачка, позади которого имеются градиенты скорости и температуры. Существенно отметить, что в связи с отсутствием особенности («краевого эффекта») при стремлении к нулю этого параметра отпадает необходимость в построении двух асимптотических разложений — «внутреннего и внешнего», необходимых в случае стремящейся к нулю вязкости [5].

Ограничиваясь для простоты двумерным случаем, введем криволинейные ортогональные координаты (n, s), связанные с кривой Г (s отсчитывается вдоль Г, n направлена в сторону вогнутости Г), характеризующей «форму» скачка в том смысле, что нормаль n в отличие от касательной s будет направлением быстрого изменения соответствующих функций. Обозначив через R_0 характерный размер радиуса кривизны Г, введем некоторый характерный масштаб длины δ в направлении нормали и образуем безразмерный параметр $\varepsilon = \delta / R_0$; положив $n^0 = n / \delta$, $s^0 = s / R_0$ и записав полную систему уравнений Навье — Стокса в координатах (n^0, s^0), будем искать решение в виде

$$f = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \ldots \tag{1}$$

где f — любая из искомых функций.

В нулевом приближении получается система вида

$$\frac{d}{dn}\left(\rho^{(0)} v^{(0)}\right) = 0 \tag{2}$$

$$\rho^{(0)} v^{(0)} \frac{du^{(0)}}{dn} = \frac{d}{dn}\left(\mu^{(0)} \frac{du^{(0)}}{dn}\right), \qquad \rho^{(0)} v^{(0)} \frac{d\theta^{(0)}}{dn} = -\frac{dp^{(0)}}{dn} + \frac{4}{3}\frac{d}{dn}\left(\mu^{(0)} \frac{dv^{(0)}}{dn}\right)$$

$$\rho^{(0)} v^{(0)} \frac{d\theta^{(0)}}{dn} = \frac{1}{\sigma}\frac{d}{dn}\left(\mu^{(0)} \frac{d\theta^{(0)}}{dn}\right) + \frac{d}{dn}\left(\mu^{(0)} u^{(0)} \frac{du^{(0)}}{dn}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{\sigma}\right)\frac{d}{dn}\left(\mu^{(0)} v^{(0)} \frac{dv^{(0)}}{dn}\right)$$

$$\theta^{(0)} = h^{(0)} + \frac{1}{2}\left(v^{(0)}\right)^2, \qquad p^{(0)} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\rho^{(0)} h^{(0)} \qquad (-\infty \leqslant n \leqslant 0)$$

Здесь u, v, p, ρ, h, μ — составляющие скорости вдоль s и n, давление, плотность, энтальпия и коэффициент вязкости, σ и $\varkappa$ — число Прандтля и показатель адиабаты. Граничные условия для этих уравнений имеют вид [3]:

$$\begin{gathered} u^{(0)} \to u_\infty, \quad v^{(0)} \to v_\infty, \quad p^{(0)} \to p_\infty, \quad h^{(0)} \to h_\infty \quad \text{при} \quad n \to -\infty \\ \frac{du^{(0)}}{dn} = \varphi_1(s), \quad \frac{dv^{(0)}}{dn} = \varphi_2(s), \quad \frac{dh^{(0)}}{dn} = \varphi_3(s) \quad \text{при} \quad n = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

---

[1] Частное решение этой одномерной системы, стремящееся на бесконечности по обе стороны от скачка к определенным значениям, известно как решение Беккера [6].

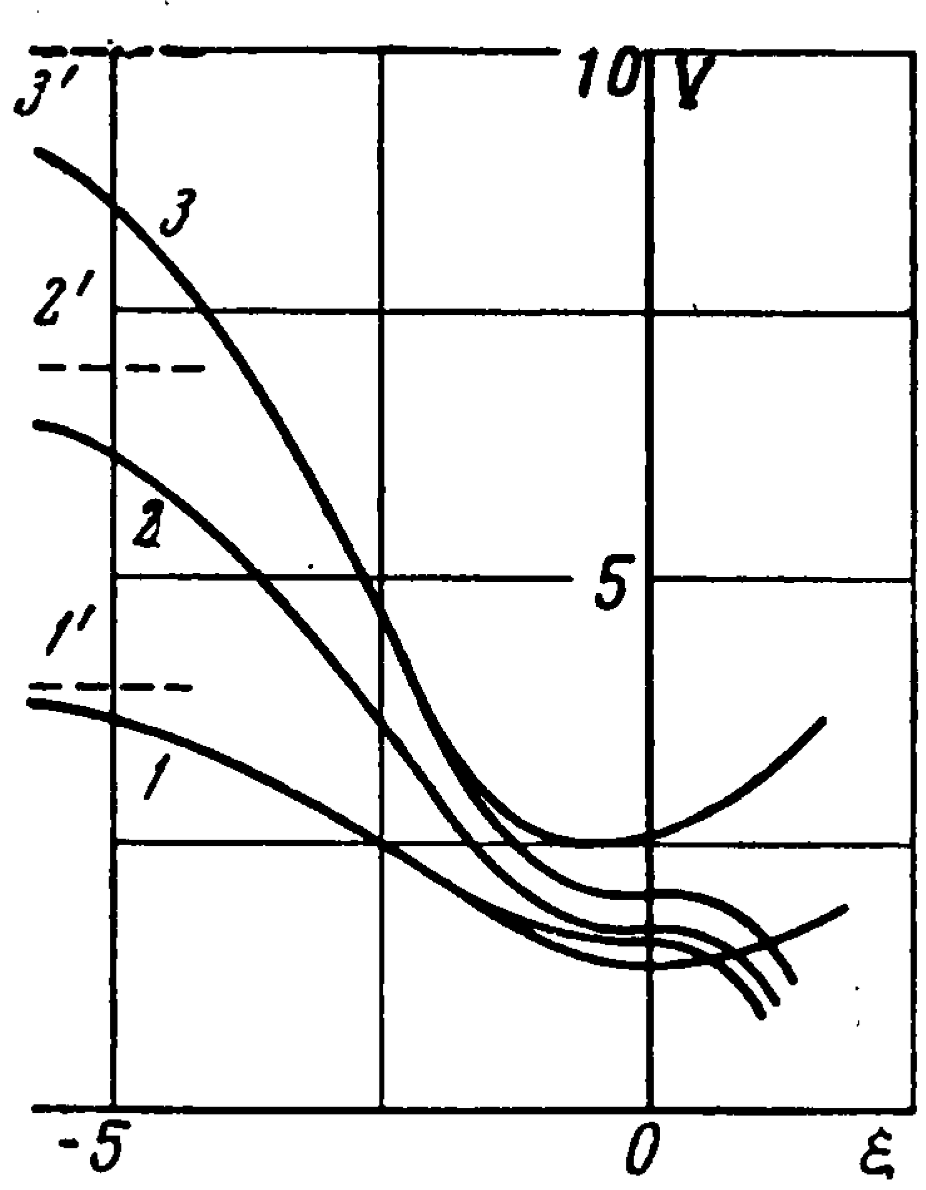
[2] Здесь и далее предполагается, что радиус кривизны является характерным масштабом длины при изменении функций вдоль скачка.

[3] Далее без нарушения общности решение будет разыскиваться с точностью до произвольных функций.

В результате численного интегрирования системы (2) — (3) можно оценить величину параметра ε. Решение этой системы, определяемое одной безразмерной переменной

$$\xi = \rho_\infty v_\infty \int_0^n \frac{dn}{\mu}$$

дает независимую от граничных условий при $n = 0$ эффективную толщину скачка $\Delta\xi$. В качестве иллюстрации этого на фигуре приведены в безразмерном виде типичные профили нормальной составляющей скорости $V = v^{(0)} / \sqrt{h_\infty}$, полученные для числа Прандтля $\sigma = {}^3/_4$ при различных значениях[1] производных $du^{(0)} / d\xi$ и $dh^{(0)} / d\xi$ в точке, где $dv^{(0)} / d\xi = 0$. Переходя к физической переменной n, можно показать, что



$$\frac{\delta}{R_0} \sim \frac{\mu_0}{\rho_\infty v_\infty R_0} = \frac{1}{N_{\mathrm{Re}}}$$

где μ_0 — вязкость, соответствующая температуре торможения. Пользуясь известным произволом в выборе характерных размеров, положим $\varepsilon = 1/N_{\mathrm{Re}}$. Теперь (1) будет иметь вид асимптотического разложения по стремящемуся к нулю параметру $1 / N_{\mathrm{Re}}$, хотя по существу принципиально отличается от соответствующего разложения при исчезающей вязкости.

Для последующих приближений получаются системы линейных обыкновенных уравнений, константы интегрирования которых полностью определяются из граничных условий.

Поправки к классической структуре скачка (т. е. решению Беккера) и, следовательно, к обычным соотношениям ударной волны, вносимые членами разложения (1), возникают а) из-за присутствия градиентов искомых функций (т. е. вязких напряжений и тепловых потоков) непосредственно за скачком и б) в результате искривленности скачка; поправки второго вида появляются лишь в первых и последующих приближениях $f^{(k)}$ $(k \geqslant 1)$.

В общем случае для определения функций $f^{(k)}$ необходимы численные расчеты; однако, если соответствующие градиенты имеют порядки не выше f_∞ / R_0 (f_∞ — значение f на бесконечности), при помощи решения Беккера можно получить коэффициенты при ε в виде квадратур.

Конечные результаты значительно упрощаются, если воспользоваться гиперзвуковым приближением, указанным в [7], и считать температуру на бесконечности равной нулю (при этом в сумме $f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)}$ не учитываются члены, имеющие порядок εM_∞^2, где M_∞ — число Маха невозмущенного потока).

Обозначим через ϑ угол между вектором скорости на бесконечности и направлением нормали, через $R(\vartheta)$ — радиус кривизны естественного фронта скачка [7]. Положим, что

$$R_0 = R(0), \quad N_{\mathrm{Re}} = \mu_0 / \rho_\infty v_\infty (0) R_0$$

Тогда при значениях $\sigma = {}^3/_4$ и $\mu \sim h$ для первых членов разложения безразмерных составляющих скорости U и V, энтальпии H и плотности P

$$U = \frac{u}{w_\infty \sin\vartheta}, \quad V = \frac{v}{w_\infty \cos\vartheta}, \quad H = \frac{h}{w_\infty^2}, \quad \mathrm{P} = \frac{\rho}{\rho_\infty} \qquad (w_\infty^2 = u_\infty^2 + v_\infty^2)$$

---

[2] Эти производные по порядку величин соответствуют условиям гиперзвукового обтекания затупленных тел при малых числах Рейнольдса, асимптоты *1'*, *2'* и *3'* семейств профилей *1*, *2*, *3* определяются значениями $V_\infty = 3$, 7 и 10.

получим следующие соотношения:

$$\frac{1}{2}\cos\vartheta\,(1-v_0^2)\frac{dU^{(1)}}{dn^\circ}-U^{(1)}=$$

$$=\frac{R_0}{R}\cos\vartheta\left\{\nu M(v_0)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}v_0^3-v_0^2+v_0-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\,\frac{[F(v_0)-\nu_1](v_0-\gamma)(1-v_0)}{v_0}\right\}$$

$$\frac{2}{3}\cos\vartheta\,(1-v_0^2)\frac{dV^{(1)}}{dn^\circ}+\frac{1}{1+\gamma}\,\frac{v_0^3-(1+2\gamma)v_0^2-\gamma v_0+1}{v_0^2(1+v_0)}V^{(1)}=$$

$$=\frac{R_0}{R}\left\{\frac{2}{1+v_0}\frac{\theta^{(1)}}{\cos^2\vartheta}+\nu\frac{v_0^2+\gamma}{v_0^2}N(v_0,\vartheta)+\frac{2}{3}\cos\vartheta\,(v_0^2-1)+\right.$$

$$\left.+\nu\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}\left[\frac{v_0^2}{2}-\gamma v_0+(\gamma^2-1)\ln(v_0-\gamma)-\nu_2\right]\right\}$$

$$\frac{2}{3}\cos\vartheta\,(1-v_0^2)\frac{d\theta^{(1)}}{dn^\circ}-\theta^{(1)}=\frac{R_0}{R}\cos^2\vartheta\left\{\sin\vartheta\,\mathrm{tg}\,\vartheta\left[\nu M(v_0)+\frac{1}{2}(v_0^2-1)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\cos\vartheta\left(v_0^4+\frac{4}{3}v_0^3-v_0^2-2v_0+\frac{2}{3}\right)\right\}$$

$$\rho^{(1)}=\frac{R_0}{R}\nu\frac{N(v_0,\vartheta)}{v_0}-\frac{V^{(1)}}{v_0^2}$$

Здесь

$$\theta^{(1)}=H^{(1)}+v_0V^{(1)}$$

$$F(t)={}^1/_2\,t^2+(\gamma+1)\,t+\gamma(\gamma+1)\ln(t-\gamma)$$

$$M(t)={}^1/_2\,\gamma(1-\gamma)^{-1}(1-t^3)+{}^1/_2\,\gamma(1-t^2)+\nu_3(1-t)-$$

$$-(1-\gamma^2)(1-3\gamma)\ln(t-\gamma)+t^{-1}\gamma^2(t^2-1)\ln(t-\gamma)+t^{-1}\nu_1-\nu_4$$

$$N(t,\vartheta)=\cos\vartheta\,[{}^1/_2t^2-\gamma t+(\gamma^2-1)\ln(t-\gamma)-\nu_2]+$$

$$+\sin\vartheta\,[{}^1/_2t+(\gamma+1)t^{-1}(t-\gamma)\ln(t-\gamma)+t^{-1}\nu_1-\nu_5]$$

$$\gamma=(\varkappa-1)/(\varkappa+1),\qquad \nu={}^2/_3(1+\gamma),\quad \nu_1={}^3/_2+\gamma+\gamma(\gamma+1)\ln(1-\gamma)$$

$$\nu_2={}^1/_2-\gamma+(\gamma^2-1)\ln(1-\gamma)$$

$$\nu_3={}^3/_2+2\gamma+\gamma(\gamma+1)^{-1}(6\gamma^2+6\gamma-5)+\gamma(\gamma+1)\ln(1-\gamma)$$

$$\nu_4=\nu_1-(1-\gamma^2)(1-3\gamma)\ln(1-\gamma),\quad \nu_5=\nu_1+{}^1/_2+(1-\gamma^2)\ln(1-\gamma)$$

v_0 — функция, определяемая соотношением

$$\nu_1-F(v_0)=n^\circ$$

Поступила 11 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И., Михайлова М. П., Черный Г. Г. О влиянии вязкости и теплопроводности газа за сильно искривленной ударной волной, Вестник Моск. ун-та, 1953, № 3.
2. Слезкин Н. А. К теории течения газа в слое между поверхностью ударной волны и притупленной поверхностью тела вращения. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 2.
3. Шидловский В. П. К задаче об обтекании сферы сверхзвуковым потоком разреженного газа. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 2.
4. Probstein R., Kemp N. Viscous aerodynamic characteristics in rarefied gas flow. F. Aero — Space Sci., 1961, 27, № 3 (Русск. пер. Сб. Механика, 1961, № 2).
5. Germain P. et Guiraud I. P. Condition de choc dans un fluide doné de coefficientes de viscosite et de conductibilité thermique faibles mais non nuls. Comptes rendus hebdomadaires des seances de L'Academic des sciences, 1960, v. 250, № 11.
6. Becker R. Stoswelle und Detonation. Z. Phys., 1922, v. 8, p. 321—362.
7. Сычев В. В. О гиперзвуковых течениях вязкого теплопроводного газа. ПММ, 1961, т. XXV, № 4.