В общем случае уравнение (7) имеет интеграл

$$\int_0^{X-t} \frac{dy}{-2+\sqrt{C_1-2k^2\Phi(y)}} = t + C_2 \qquad \left(\Phi(y) = \int_0^y [\varphi'(\eta) - \psi(\eta)]^2 d\eta\right)$$

Постоянные C_1 и C_2 выбираются согласно значениям X (0) и $X^{\cdot}$ (0).

В заключение заметим, что использование описанного метода предполагает известной функцию $\varphi(x)$ для всех $x \leqslant 0$, что имеет место для полубесконечной струны для конечной струны решение можно получать последовательными продолжениями функции $\varphi(x)$ то за правую, то за левую границы струны.

Поступила 5 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаи Е. Л. О поперечных колебаниях участка струны, длина которого равномерно изменяется, Труды по механике, Гостехиздат, 1955.
2. Nandor L. Balazs. On the solution of the wave equation with moving boundaries, J. Math. Anal., 1961, v. 3, N 3, New York.

О ТЕЛАХ С МИНИМАЛЬНЫМ ВОЛНОВЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ В НЕРАВНОМЕРНОМ НАБЕГАЮЩЕМ ПОТОКЕ ГАЗА

А. В. Шипилин
(Москва)

Рассматривается задача построения образующей тела вращения ab (фиг. 1), обеспечивающей минимальное волновое сопротивление при обтекании неравномерным сверхзвуковым осесимметрическим потоком. Предполагается, что набегающий поток и координаты точек a и b заданы, причем заданы так, что при обтекании тела возникает присоединенная ударная волна ac. Пусть bc — характеристика второго семейства, а cd — характеристика первого. Задача решается в предположении, что внутри треугольника abc течение сверхзвуковое и ударных волн нет.

Подобная задача с присоединенной ударной волной рассмотрена в работе [1] для случая равномерного набегающего потока. Для неравномерного набегающего потока задача в такой постановке рассматривалась в работе [2], однако в ней допущена ошибка. При подсчете числа условий и произволов полученной задачи не учитывались условия на ударной волне в точке $\psi=\psi_c$. Привлекалось условие трансверсальности, которое выполняется тождественно в этой точке в силу экстремальных условий и соотношений на ударной волне. Поэтому число условий и произволов совпадало, и делался неверный вывод о том, что задача разрешима.

Течение газа описывается уравнениями

$$\frac{\partial r\rho w\cos\vartheta}{\partial x} + \frac{\partial r\rho w\sin\vartheta}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x} r(p+\rho w^2\cos^2\vartheta) + \frac{\partial}{\partial r} r\rho w^2 \sin\vartheta\cos\vartheta = 0 \tag{1}$$

$$\frac{w^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}, \qquad \frac{p}{\rho^\varkappa} = \varphi^{\varkappa-1}(\psi) \tag{2}$$

Здесь x, r — декартовы координаты в меридиональной плоскости течения, ϑ — угол наклона скорости к оси x, $\varkappa$ — показатель адиабаты, w — абсолютное значение скорости, ρ — плотность газа, p — давление, ψ — функция тока; причем

$$d\psi = r\rho w(\cos\vartheta dr - \sin\vartheta\, dx)$$

Набегающий поток задается функциями $w_0(x, r)$, $\rho_0(x, r)$ и $\vartheta_0(x, r)$. В дальнейшем в качестве функций вдоль ударной волны будем брать функции перед ней. Координаты ударной волны ac будем обозначать через x° и r°, а координаты характеристики bc — через x и r.

Обозначим через χ величину волнового сопротивления тела вращения с образующей ab, деленную на 2π. Величина χ выражается через контурные интегралы по ac

и bc при помощи второго уравнения (1)

$$\chi = \int\limits_{\psi_a}^{\psi_c} \left\{ \frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\left(w_0 + \frac{1}{w_0}\right)\frac{\sin\sigma}{\sin(\sigma-\vartheta_0)} - \right.$$

$$\left. - w_0 \sin\vartheta_0 \operatorname{ctg}(\sigma-\vartheta_0) - a(\alpha)\left[\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\right]\right\} d\psi \qquad (3)$$

Расстояние между точками a и b вдоль оси x также выражается через контурные интегралы по ac и bc

$$X = \int\limits_{\psi_a}^{\psi_c} \left[\frac{\cos\sigma}{r^\circ \rho_0 w_0 \sin(\sigma-\vartheta_0)} + \frac{\varphi(\sigma, x^\circ, r^\circ)}{\sqrt{\varkappa r}}\tau(\alpha)\cos(\vartheta-\alpha)\right] d\psi \qquad (4)$$

В формулах (3) и (4)

$$a(\alpha) = \left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa-\cos 2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \tau(\alpha) = \left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\frac{1-\cos 2\alpha}{\varkappa-\cos 2\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}, \qquad \rho w^2 \sin^2\alpha = \varkappa p$$

Здесь α — угол Маха, σ — угол наклона ударной волны к оси x.

Функция $\varphi(\sigma, x^\circ, r^\circ)$ определяется из равенства (2) через соотношения на ударной волне по углу наклона ударной волны и набегающему потоку. Кроме того, на характеристике bc имеем

$$\frac{dr}{d\psi} + \frac{\varphi(\sigma, x^\circ, r^\circ)}{\sqrt{\varkappa r}}\tau(\alpha)\sin(\vartheta-\alpha) = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{d\vartheta}{d\psi} - \frac{1+\cos 2\alpha}{\varkappa-\cos 2\alpha}\frac{d\alpha}{d\psi} - \frac{\sin\vartheta\sin\alpha}{r\sin(\vartheta-\alpha)}\frac{dr}{d\psi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa}\frac{d\ln\varphi}{d\psi} = 0 \qquad (6)$$

Положение ударной волны определяется уравнениями

$$\frac{dr^\circ}{d\psi} - \frac{\sin\sigma}{r^\circ\rho_0 w_0\sin(\sigma-\vartheta_0)} = 0, \qquad \frac{dx^\circ}{d\psi} - \frac{\cos\sigma}{r^\circ\rho_0 w_0\sin(\sigma-\vartheta_0)} = 0 \qquad (7)$$

Рассмотрим следующую вариационную задачу: при заданных r_a и r_b, X, при заданном набегающем потоке найти функции $\alpha(\psi)$, $\vartheta(\psi)$, $\sigma(\psi)$, $r(\psi)$, $x^\circ(\psi)$, $r^\circ(\psi)$, реализующие экстремум выражения (3) при изопериметрическом условии (4) и удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (5) — (7). Кроме того, в точке $\psi = \psi_c$ должны выполняться условия, полученные из соотношений на ударной волне

$$\alpha(\psi_c) = \alpha(\sigma_c, x_c^\circ, r_c^\circ), \qquad \vartheta(\psi_c) = \vartheta(\sigma_c, x_c^\circ, r_c^\circ)$$

В качестве свободных функций выберем α и σ, остальные связаны с ними дифференциальными соотношениями.

Методом множителей Лагранжа задача сводится к задаче на безусловный экстремум некоторого функционала. Из равенства нулю первой вариации этого функционала получаем уравнения, которым должны удовлетворять искомые функции

$$\lambda(\varkappa\sin 2\vartheta + \sin 2\alpha) + \varkappa\lambda_3(1-\cos 2\vartheta) = 0$$

$$\lambda\varphi(\sigma, x^\circ, r^\circ)\,\tau(\alpha)\cos\alpha - \sqrt{\varkappa}\,a(\alpha)\, r\sin^2\vartheta = 0$$

$$\frac{(\varkappa+1)}{2\varkappa}\frac{(W_0^2-1)\sin\vartheta_0}{w_0\sin^2(\sigma-\vartheta_0)} + g\frac{\lambda_1\sin\vartheta_0 - (\lambda-\lambda_2)\cos\vartheta_0}{\sin(\sigma-\vartheta_0)} + G(\alpha,\vartheta)\varphi_\sigma' = 0$$

$$\frac{dx^\circ}{d\psi} - g\cos\sigma = 0, \qquad \frac{dr^\circ}{d\psi} - g\sin\sigma = 0$$

$$\frac{dr}{d\psi} + \frac{\varphi(\sigma, x^\circ, r^\circ)\,\tau(\alpha)\sin(\vartheta-\alpha)}{\sqrt{\varkappa r}} = 0, \qquad \frac{d\lambda_3}{d\psi} + \frac{G(\alpha,\vartheta)}{r} = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{d\lambda_2}{d\psi} - \chi_1\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x^\circ} - \chi_2\frac{\partial w_0}{\partial x^\circ} + \chi_3\frac{\partial\rho_0}{\partial x^\circ} = 0, \qquad \frac{d\lambda_1}{d\psi} - \chi_1\frac{\partial\vartheta_0}{\partial r^\circ} - \chi_2\frac{\partial w_0}{\partial r^\circ} + \chi_3\frac{\partial\rho_0}{\partial r^\circ} + \frac{F}{r^\circ} = 0$$

Здесь λ — постоянный, а $\lambda_1(\psi)$, $\lambda_2(\psi)$, $\lambda_3(\psi)$ — переменные множители Лагранжа;

$$\varphi_\sigma' = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}, \quad g = \frac{1}{r^\circ\rho_0 w_0 \sin(\sigma-\vartheta_0)}, \quad F = g\,[(\lambda-\lambda_2)\cos\sigma - \lambda_1\sin\sigma]$$

$$W_*^2 = \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}w_0^2, \quad G(\alpha,\vartheta) = \frac{a(\alpha)}{\varkappa}\operatorname{tg}\alpha\,[\varkappa\sin\vartheta - \cos\alpha\sin(\vartheta-\alpha)]$$

$$\chi_1 = \frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\frac{\sin\sigma\cos(\sigma-\vartheta_0)}{\sin^2(\sigma-\vartheta_0)}\left(w_0+\frac{1}{w_0}\right) - \frac{\sin\vartheta_0}{\sin^2(\sigma-\vartheta_0)}w_0 +$$

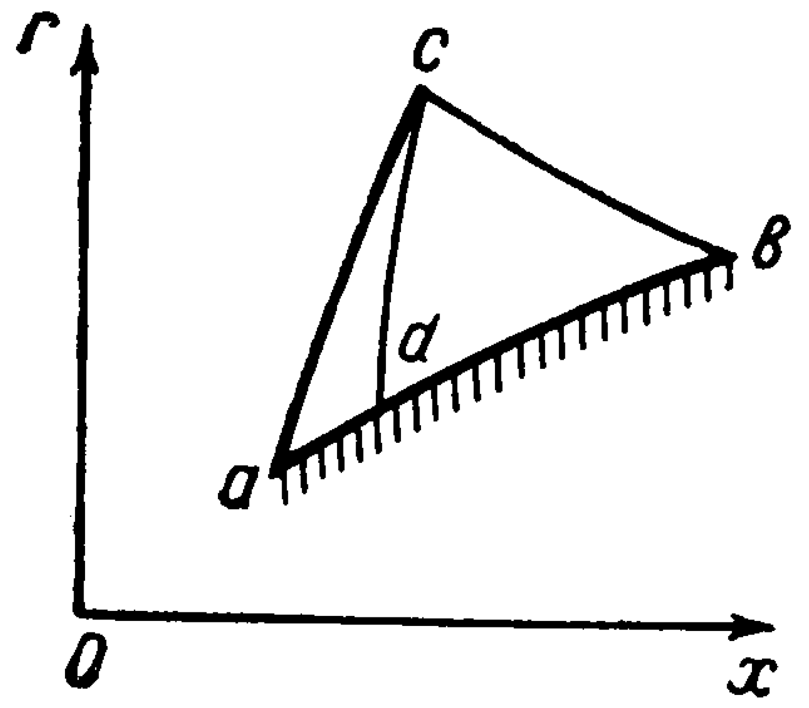
$$+ (F - w_0\cos\vartheta_0)\operatorname{ctg}(\sigma-\vartheta_0) - G(\alpha,\vartheta)\,\varphi_\sigma'$$

$$\chi_2 = G(\alpha,\vartheta)\frac{2w_0}{\varkappa-1}\left\{\frac{4\varkappa\sin^2(\sigma-\vartheta_0)+(\varkappa-1)^2}{4w_0^2\sin^2(\sigma-\vartheta_0)-(\varkappa^2-1)(1-W_0^2)} -\right.$$

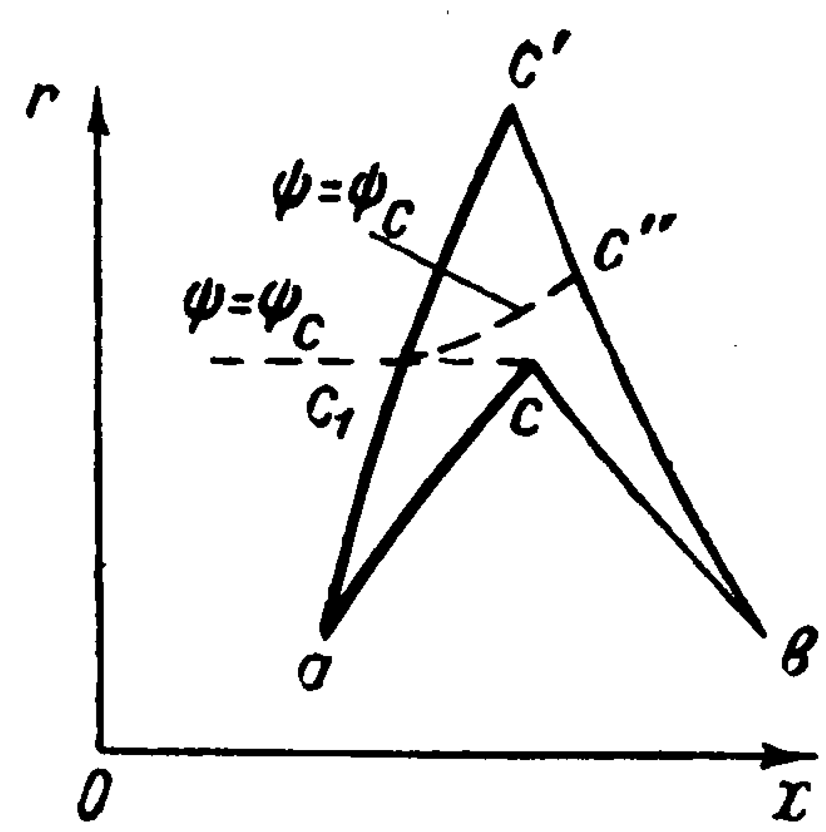
$$\left. - \frac{\varkappa}{w_0^2\,[1-W_0^2\cos^2(\sigma-\vartheta_0)]}\right\} + \frac{\varkappa\sin(\sigma-2\vartheta_0)+\sin\sigma}{2\varkappa\sin(\sigma-\vartheta_0)} -$$

$$- \frac{F}{w_0} - \frac{(\varkappa+1)\sin\sigma}{2\varkappa w_0^2\sin(\sigma-\vartheta_0)}, \qquad \chi_3 = \frac{F+G(\alpha,\vartheta)}{\rho_0}$$

Множитель Лагранжа, соответствующий дифференциальному соотношению (6), тождественно равен нулю [1, 3].



Фиг. 1



Фиг. 2

Таким образом получена система уравнений (8) относительно девяти неизвестных: α, ϑ, σ, x°, r°, r, λ_1, λ_2, λ_3; в качестве граничных условий имеем

$$\alpha(\psi_c) = \alpha(\sigma_c, x_c^\circ, r_c^\circ), \qquad \vartheta(\psi_c) = \vartheta(\sigma_c, x_c^\circ, r_c^\circ) \tag{9}$$

$$r(\psi_c) = r^\circ(\psi_c), \qquad x^\circ(\psi_a) = x_a, \qquad r^\circ(\psi_a) = r_a, \qquad r(\psi_a) = r_b \tag{10}$$

$$\lambda_2(\psi_c) = 0, \qquad \lambda_1(\psi_c) = -\lambda_3(\psi_c) \tag{11}$$

Кроме того, искомые функции должны удовлетворять изопериметрическому условию (4) и условию трансверсальности при $\psi = \psi_c$

$$\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\left(w_0+\frac{1}{w_0}\right)\frac{\sin\sigma}{\sin(\sigma-\vartheta_0)} - w_0\sin\vartheta_0\operatorname{ctg}(\sigma-\vartheta_0) -$$

$$- a(\alpha)\left[\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\right] + \tag{12}$$

$$+ \lambda\left[g\cos\sigma + \frac{\varphi(\sigma, x^\circ, r^\circ)}{\sqrt{\varkappa r}}\tau(\alpha)\cos(\vartheta-\alpha)\right] +$$

$$+ \lambda_3\left[g\sin\sigma + \frac{\varphi(\sigma, x^\circ, r^\circ)}{\sqrt{\varkappa r}}\tau(\alpha)\sin(\vartheta-\alpha)\right] = 0$$

Здесь условия (9) — соотношения на ударной волне в точке ψ_c. Условия (10) вытекают из рассмотрения фиг. 1. Условия (11) взяты в силу произвольности выбора множителей Лагранжа так, чтобы первая вариация полученного функционала обратилась в нуль. При получении условий (11) и (12) использовалась связь между вариациями δr при $\psi = \psi_c$ и $\delta\psi_c$, полученная следующим образом. Из фиг. 2 видно, что

$$\delta r \,|_{\psi=\psi_c} = r_{c''} - r_c$$

Пусть при варьировании положения точки c она переместится в точку c'. Тогда линия тока при $\psi = \psi_c^*$ пересекает проварьированную ударную волну в точке c_1 и характеристику в точке c''. Пусть

$$r_{c_1}{}^{\circ} - r_c = \delta r^{\circ} \,|_{\psi=\psi_c}$$

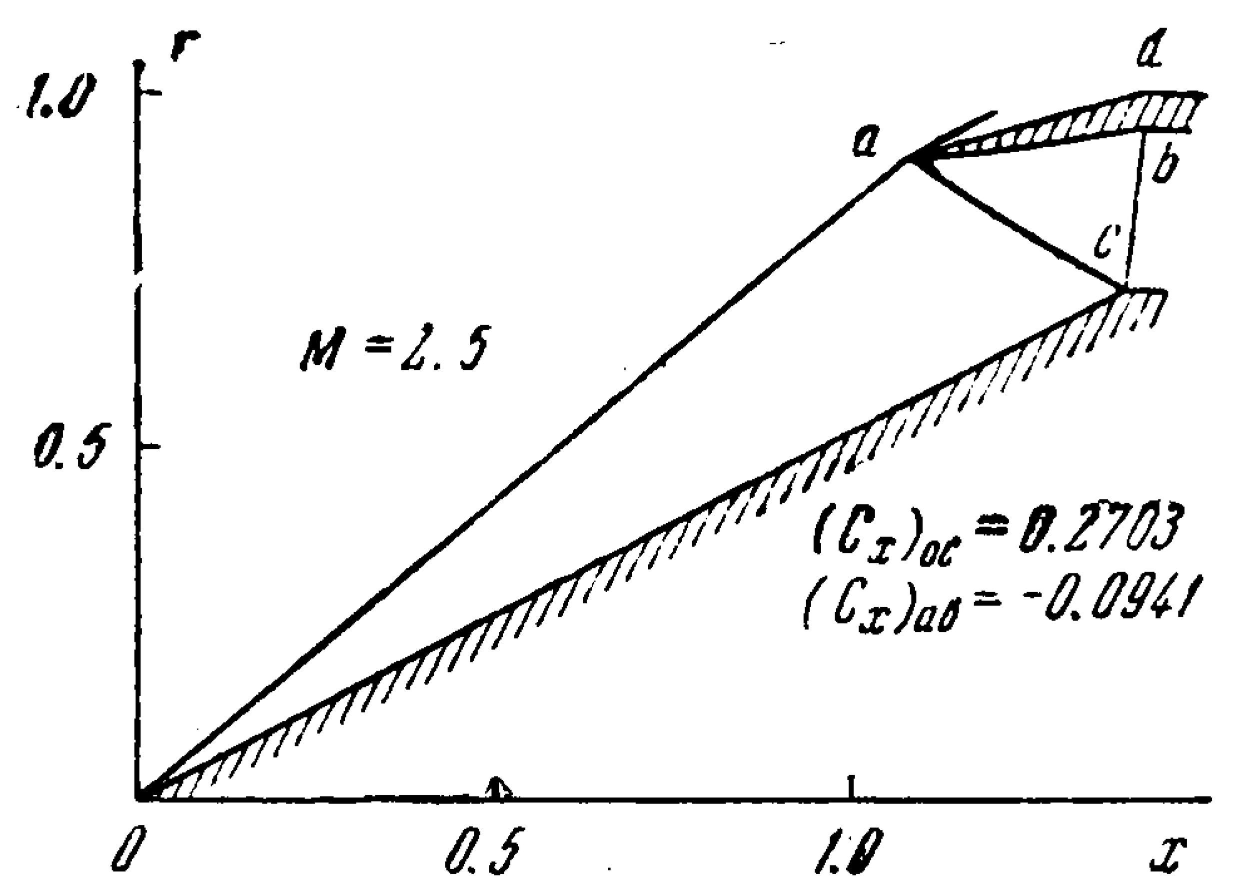
Имеем

$$r_{c_1}{}^{\circ} = r_{c'}{}^{\circ} - \frac{dr^{\circ}}{d\psi}\Big|_{ac} \delta\psi_c, \qquad r_{c''} = r_{c'} - \frac{dr}{d\psi}\Big|_{bc} \delta\psi_c$$

В точке c' $r^{\circ} = r$. Отсюда

$$\delta r \,|_{\psi=\psi_c} = \left(\frac{dr^{\circ}}{d\psi}\Big|_{ac} - \frac{dr}{d\psi}\Big|_{bc} \right) \delta\psi_c + \delta r^{\circ} \,|_{\psi=\psi_c}$$

Здесь двойные индексы ac и bc означают соответственно производную r° вдоль ударной волны ac в точке c и производную r вдоль характеристики второго семейства bc в точке c.



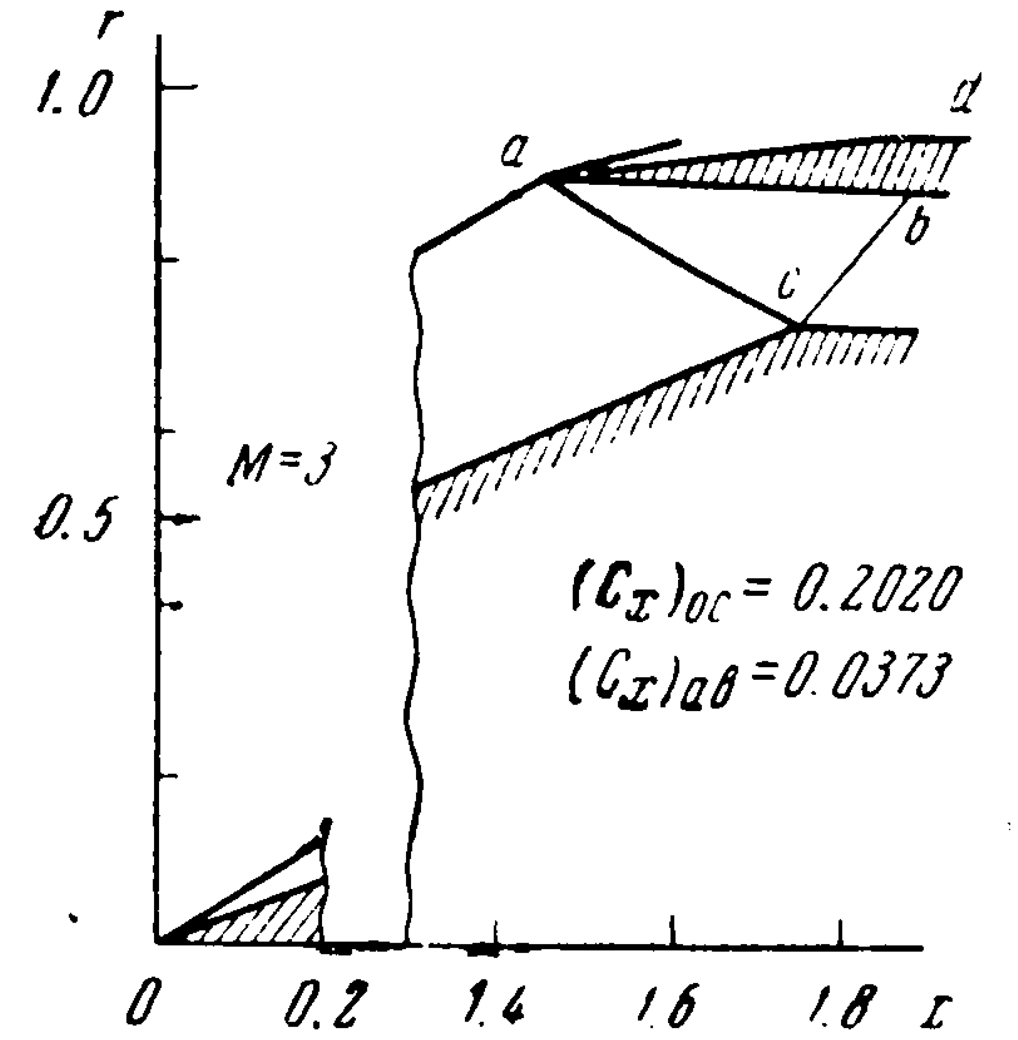
Фиг. 3

Следует отметить, что условие трансверсальности (12) выполняется тождественно в силу соотношений на ударной волне и первых двух уравнений системы (8). Поэтому число условий уменьшается на единицу. Количество произволов в определении функций равно восьми: шесть произволов дают шесть дифференциальных уравнений системы (8), кроме того, произвольными будут λ и ψ_c. Число условий (9), (10), (11), (4) равно девяти. Таким образом, поставленная вариационная задача не имеет решения при попытке отыскания двустороннего экстремума. Однако при некоторых частных соотношениях величин, характеризующих набегающий поток, w_0, ϑ_0, ρ_0, а также r_a / X, r_b / X, задача допускает решение. Это, очевидно, имеет место тогда, когда конечные уравнения системы (8) выполняются в точке ψ_c в силу соотношений на ударной волне. Исключая из этих уравнений λ и λ_3, получим

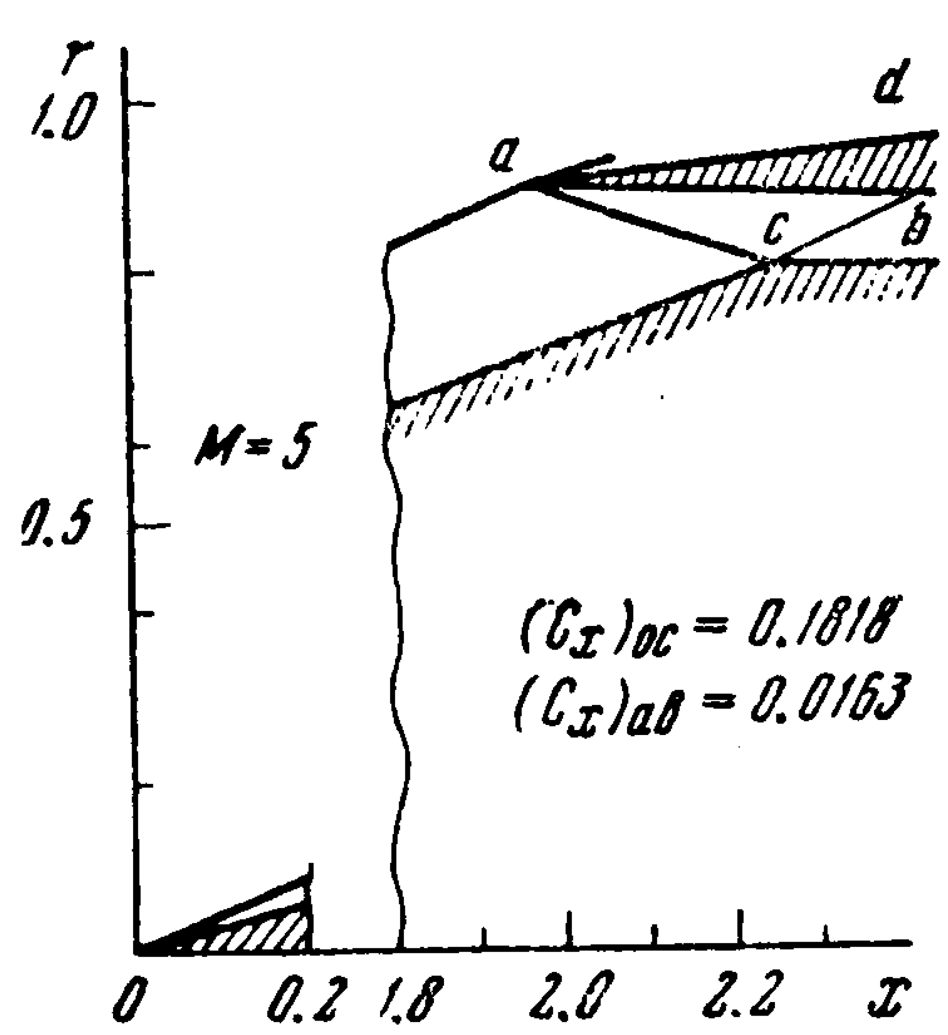
$$\frac{(\varkappa + 1)(W_0{}^2 - 1)\sin\vartheta_0}{w_0 \sin^2(\sigma - \vartheta_0)} + a(\alpha)\operatorname{tg}\alpha \left\{ 2\varphi_\sigma{}' \left[\varkappa \sin\vartheta - \cos\alpha \sin(\vartheta - \alpha)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{2\varkappa \sin\vartheta \sin(\vartheta_0 - \vartheta) + \sin 2\alpha \sin\vartheta_0}{\sin(\sigma - \vartheta)\sin(\sigma - \vartheta_0)} \right\} = 0 \qquad (13)$$

Решение задачи имеет место тогда, когда равенство (13) выполняется в точке $\psi = \psi_c$ в силу соотношений на ударной волне. Это означает, что если набегающий поток задан функциями w_0, ϑ_0, ρ_0, то уравнение (13) определяет такое значение σ в точке ψ_c, при котором задача имеет решение. Пусть задано некоторое неравномерное течение. Рассматриваем уравнение (13) в какой-нибудь точке этого течения. Уравнение имеет дискретные корни. Среди них надо отобрать такие значения σ, которые удовлетворяли бы условиям постановки задачи, т. е. угол наклона ударной волны должен быть больше угла наклона линии Маха и меньше такого значения σ, при котором скорость за ударной волной становится звуковой. Если найдется хоть один такой корень, то из этой точки можно выпускать экстремальные ударную волну и характеристику, интегрируя систему (8). В самом деле, если в точке ψ_c известно значение σ, то можно определить в этой точке α, ϑ из соотношений на ударной волне, затем λ, λ_1 и λ_3 из конечных уравнений (8). Получаем задачу Коши. Интегрирование ведется до такого ψ, которое обусловливается условиями каждой конкретной задачи. При этом σ не должно превышать того значения σ^*, при котором скорость за ударной волной становится звуковой. Если это имеет место, интегрирование можно вести только до такого ψ, при котором $\sigma = \sigma^*$.

Построив ударную волну *ac* и характеристику *bc*, удовлетворяющие уравнениям Эйлера (8), расчет течения ведем методом характеристик. Сначала решается задача Коши для уравнений газовой динамики (1) — (2) с данными на ударной волне *ac*, что позволяет определить характеристику *cd*, далее решается задача Гурса с данными на характеристиках *cd* и *bc*. Все линии тока (ψ = const) суть искомые профили.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 3, 4 и 5 приведены примеры расчетов внутренних обводов обечаек сверхзвуковых диффузоров с центральным телом, обладающих экстремальным волновым сопротивлением. В качестве центрального тела берется конус. На фигурах приняты следующие обозначения: *oc* — образующая конуса, *oa* — коническая ударная волна, *ac* — ударная волна, отвечающая условиям экстремума, *bc* — характеристика первого семейства, *ab* — искомый профиль. В качестве внешнего обвода *ad* взяты произвольные прямые. Приведены значения c_x для конуса и для внутреннего обвода. Величины c_x отнесены к площади πr_d^2. В случае $M = 3$ и $M = 5$ угол ϑ на характеристике *bc* равен нулю.

В заключение автор приносит благодарность Ю. Д. Шмыглевскому за большую помощь при выполнении работы.

Поступила 24 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмыглевский Ю. Д. Об одном классе тел вращения с минимальным волновым сопротивлением. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
2. Костычев Г. И. К решению одной вариационной задачи сверхзвуковых течений. Изв. высш. учебн. завед. МВО, сер. авиац. техн., 1958, № 3.
3. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.