# ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ОДНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. П. Самарин (Куйбышев)

Дается построение решения одной нелинейной задачи математической физики; линейная задача подобного типа рассматривалась в работах [1,2].

Пусть струна натянута вдоль оси $x$ и имеет в качестве одной из границ груз, который надет на струну и может свободно скользить вдоль оси $x$ под действием давления колеблющейся части струны. Законы движения груза и колебаний струны должны определяться совместно, поэтому здесь имеет место нелинейная задача с подвижной границей. Для решения такой задачи можно воспользоваться ее трансформацией к задаче Коши, что и делается ниже.

Если груз начинает свое движение из точки $x = 0$ и струна гонит его в сторону возрастания $x$, то для колеблющегося участка струны имеем

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \leqslant 0, \qquad \varphi(0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0} = \psi(x), \qquad x \leqslant 0, \qquad \psi(0) = 0 \tag{1}$$

$$u\,|_{x=X(t)} = 0, \qquad X(0) = 0 \tag{2}$$

где $x = X(t)$ — закон движения груза.

Решение этой задачи Коши имеет вид

$$u = \frac{1}{2}\varphi(x-t) + \frac{1}{2}\varphi(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(\eta)\,d\eta \tag{3}$$

Если положить $\psi(x) \equiv 0$ при $x > 0$, то из (3) и (2) имеем

$$\varphi(\tau) = -\varphi(\tau - 2\chi(\tau)) + \int_0^{\tau-2\chi(\tau)}\psi(\eta)\,d\eta, \qquad \tau = X(t) + t, \qquad \chi(\tau) = t \tag{4}$$

Эта формула дает искомое продолжение функции $\varphi$ на положительные значения аргумента ($\tau > 0$, так как $-t < X(t) < t$), и поэтому при помощи (3) для $x + t > 0$ можно записать

$$u = \frac{1}{2}\varphi(x-t) - \frac{1}{2}\varphi(\xi) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{\xi}\psi(\eta)\,d\eta \qquad (\xi = x + t - 2\chi(x+t)) \tag{5}$$

Воспользуемся уравнением $mX^{\cdot\cdot} = F$, где $m$ — масса груза, $F$ — сила, выражающая давление струны на груз. Из энергетических соображений можно установить, что

$$F(t) = \frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2_{x=X(t)}(1 - X^{\cdot 2}) \tag{6}$$

где $T$ — натяжение струны. Теперь, используя для правой части (6), получим уравнение для определения закона движения груза

$$X^{\cdot\cdot} = k^2\,[\varphi'(X-t) - \psi(X-t)]^2\,\frac{1-X^{\cdot}}{1+X^{\cdot}} \qquad \left(k^2 = \frac{T}{2m}\right) \tag{7}$$

В частном случае, если

$$X(0) = X^{\cdot}(0) = 0, \qquad \psi(x) \equiv 0, \qquad |\varphi'(x)| = a = \text{const}$$

где $\varphi(x)$ — «пилообразная» функция при $x < 0$, решение уравнения (7) имеет вид

$$k_1^2 t = 1 - \sqrt{1 + 2k_1^2(t-X)} - 2\ln\left[2 - \sqrt{1 + 2k_1^2(t-X)}\right] \qquad (k_1 = ka) \tag{8}$$

Кривая (8) имеет в качестве асимптоты характеристику

$$t = x + \frac{3}{2k_1^2}$$

и напоминает по форме гиперболу. Этот простой частный случай наглядно показывает характер разгона груза колеблющейся струной.

В общем случае уравнение (7) имеет интеграл

$$\int_0^{X-t} \frac{dy}{-2+\sqrt{C_1-2k^2\Phi(y)}} = t + C_2 \qquad \left(\Phi(y) = \int_0^y [\varphi'(\eta) - \psi(\eta)]^2 d\eta\right)$$

Постоянные $C_1$ и $C_2$ выбираются согласно значениям $X$ (0) и $X^{\cdot}$ (0).

В заключение заметим, что использование описанного метода предполагает известной функцию $\varphi(x)$ для всех $x \leqslant 0$, что имеет место для полубесконечной струны для конечной струны решение можно получать последовательными продолжениями функции $\varphi(x)$ то за правую, то за левую границы струны.

Поступила 5 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаи Е. Л. О поперечных колебаниях участка струны, длина которого равномерно изменяется, Труды по механике, Гостехиздат, 1955.
2. Nandor L. Balazs. On the solution of the wave equation with moving boundaries, J. Math. Anal., 1961, v. 3, N 3, New York.

---

## О ТЕЛАХ С МИНИМАЛЬНЫМ ВОЛНОВЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ В НЕРАВНОМЕРНОМ НАБЕГАЮЩЕМ ПОТОКЕ ГАЗА

А. В. Шипилин

(Москва)

Рассматривается задача построения образующей тела вращения $ab$ (фиг. 1), обеспечивающей минимальное волновое сопротивление при обтекании неравномерным сверхзвуковым осесимметрическим потоком. Предполагается, что набегающий поток и координаты точек $a$ и $b$ заданы, причем заданы так, что при обтекании тела возникает присоединенная ударная волна $ac$. Пусть $bc$ — характеристика второго семейства, а $cd$ — характеристика первого. Задача решается в предположении, что внутри треугольника $abc$ течение сверхзвуковое и ударных волн нет.

Подобная задача с присоединенной ударной волной рассмотрена в работе [1] для случая равномерного набегающего потока. Для неравномерного набегающего потока задача в такой постановке рассматривалась в работе [2], однако в ней допущена ошибка. При подсчете числа условий и произволов полученной задачи не учитывались условия на ударной волне в точке $\psi=\psi_c$. Привлекалось условие трансверсальности, которое выполняется тождественно в этой точке в силу экстремальных условий и соотношений на ударной волне. Поэтому число условий и произволов совпадало, и делался неверный вывод о том, что задача разрешима.

Течение газа описывается уравнениями

$$\frac{\partial r\rho w\cos\vartheta}{\partial x} + \frac{\partial r\rho w\sin\vartheta}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x} r(p+\rho w^2\cos^2\vartheta) + \frac{\partial}{\partial r} r\rho w^2 \sin\vartheta\cos\vartheta = 0 \tag{1}$$

$$\frac{w^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}, \qquad \frac{p}{\rho^\varkappa} = \varphi^{\varkappa-1}(\psi) \tag{2}$$

Здесь $x$, $r$ — декартовы координаты в меридиональной плоскости течения, $\vartheta$ — угол наклона скорости к оси $x$, $\varkappa$ — показатель адиабаты, $w$ — абсолютное значение скорости, $\rho$ — плотность газа, $p$ — давление, $\psi$ — функция тока; причем

$$d\psi = r\rho w(\cos\vartheta dr - \sin\vartheta\, dx)]$$

Набегающий поток задается функциями $w_0(x, r)$, $\rho_0(x, r)$ и $\vartheta_0(x, r)$. В дальнейшем в качестве функций вдоль ударной волны будем брать функции перед ней. Координаты ударной волны $ac$ будем обозначать через $x^\circ$ и $r^\circ$, а координаты характеристики $bc$ — через $x$ и $r$.

Обозначим через $\chi$ величину волнового сопротивления тела вращения с образующей $ab$, деленную на $2\pi$. Величина $\chi$ выражается через контурные интегралы по $ac$