К ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ю. В. Кожевников

(Казань)

В настоящее время имеется ряд работ, посвященных исследованию оптимальных динамических систем. В книгах [1-4] рассматривается, например, вопрос о выборе оператора системы, которому соответствует наилучшая точность преобразования входного воздействия. В работах [5-8] и др. решается задача о выборе закона регулирования регулятора, обеспечивающего наилучшее приближение возмущенного движения объекта к заданному программному. Последнее обычно находится из условия достижения экстремального значения какой-либо характеристики объекта при так называемых расчетных условиях движения. Отысканию оптимальных в этом смысле режимов полета летательных аппаратов посвящены работы [9-11], а также указанные в списках литературы этих работ.

Точность реализации программного движения зависит не только от свойств регулятора, но также и свойств самого программного движения и расчетных параметров системы. Иногда может оказаться целесообразным повысить точность движения системы за счет изменения ее программного движения и параметров. Такое изменение приведет к снижению уровня характеристики объекта, экстремум которой достигался, но зато повысится точность ее исполнения.

Отыскание управляющих функций и параметров, оптимальных в этом последнем смысле, составляет содержание настоящей работы.

1. Пусть движение системы описывают уравнения

$$X_i^{\cdot} = f_i\,(t, X_1, \ldots, X_n, U_1, \ldots, U_r, A_1, \ldots, A_q, P_1, \ldots, P_\nu) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

при начальных условиях

$$X_i\,(t_0) = X_{i0} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Здесь t — время, X_i $(i = 1, \ldots, n)$ — фазовые координаты — непрерывные функции времени; U_j $(j = 1, \ldots, r)$ — управляющие случайные функции времени с каноническим разложением [1] вида

$$U_j\,(t) = u_j\,(t) + \sum_{k=1}^{m} V_{jk}\xi_{jk}\,(t)$$

Здесь $u_j\,(t)$ — математическое ожидание функции $U_j\,(t)$, $\xi_{jk}(t)$ — заданная координатная функция, $V_{jk} \equiv V_i$ $(i = 1, \ldots, mr)$ — некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и заданными дисперсиями D_i^v; X_{i0}, A_i, P_i — случайные величины с математическими ожиданиями x_{i0}, a_i, p_i и заданными дисперсиями D_{i0}^x, D_i^a, D_i^p.

Параметры x_{i0}, p_i, t_0 заданы, а $a_1, \ldots, a_q$ относятся к числу управляющих факторов. Случайные величины

$$V_i, \qquad \overset{\circ}{X}_{i0} = X_{i0} - x_{i0}, \qquad \overset{\circ}{A_i} = A_i - a_i, \qquad \overset{\circ}{P_i} = P_i - p_i$$

считаются некоррелированными. Заданные функции $f_1, \ldots, f_n$ в (1.1) предполагаются непрерывными вместе со своими производными до третьего порядка включительно.

В силу условий поставленной задачи координаты $X_i\,(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ будут случайными функциями времени с математическими ожиданиями $x_i\,(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и дисперсиями $D_i^x(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Будем считать V_i, $\overset{\circ}{X}_{i0}$, $\overset{\circ}{A_i}$, $\overset{\circ}{P_i}$ малыми настолько, что возможна линеаризация уравнений (1.1) относительно этих параметров и функций

$$\overset{\circ}{X_i}\,(t) = X_i\,(t) - x_i\,(t)$$

Тогда для определения $x_i(t)$, $X_i^\circ(t)$ получим [1]

$$x_i^{\cdot} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, a_1, \ldots, a_q, p_1, \ldots, p_\nu), \qquad x_i(t_0) = x_{i0} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

$$X_i^{\circ\cdot} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} X_k^\circ + \sum_{k=1}^{mr} \beta_{ik} V_k + \sum_{k=1}^{q} \gamma_{ik} A_k^\circ + \sum_{k=1}^{\nu} \zeta_{ik} P_k^\circ, \qquad X_i(t_0) = X_{i0} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

Здесь $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}, \zeta_{ik}$ — известные функции параметров t, x_i, u_i, a_i, p_i.

Уравнения (1.3) описывают программное движение системы — среднюю реализацию случайного процесса $[X_i(t), U_j(t)]$.

Предположим существование множества управлений

$$u_j(t) \quad (j = 1, \ldots, r), \; a_j \qquad (j = 1, \ldots, q)$$

которые могут переводить систему из начального состояния x_{i0} в конечное, характеризуемое соотношениями

$$\psi_j(x_{11}, \ldots x_{n1}, a_1, \ldots, a_q, p_1, \ldots, p_\nu) = 0, \qquad x_{i1} = x_i(t_1)$$
$$(i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, k, \; k \leqslant n + q) \tag{1.5}$$

Здесь t_1 — конечное значение времени — заданное число, ψ_j — известные непрерывные функции с непрерывными производными до третьего порядка включительно.

Уравнения (1.4), а также параметры

$$\Psi_j = \psi_j(X_{11}, \ldots, X_{n1}, A_1, \ldots, A_q, P_1, \ldots, P_\nu) \qquad (j = 1, \ldots, k)$$

которые с точностью до величин первого порядка можно вычислять по формулам

$$\Psi_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_{i1}} X_{i1}^\circ + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \psi_j}{\partial a_i} A_i^\circ + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial \psi_j}{\partial p_i} P_i^\circ \tag{1.6}$$

позволяют найти отклонение реализаций случайного процесса от программного состояния. Как видим, это отклонение зависит не только от случайных параметров, но и от характеристик программного движения.

Естественно попытаться найти такое управление $u_1, \ldots, u_r, a_1, \ldots, a_q$, которому соответствует наименьший уровень рассеивания реализаций случайного процесса $[X_i(t)]$ и случайных параметров Ψ_j $(j = 1, \ldots, k)$. Управление, удовлетворяющее такому требованию, будем называть оптимальным в среднем.

2. Будем считать, что уровень рассеивания траекторий $[X_i(t)]$, параметров Ψ_j $(j = 1, \ldots, k)$ и меру управляющих воздействий характеризует функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i D_i^x + \sum_{i=1}^{r} m_i u_i^2 \right) dt + \sum_{i=1}^{k} g_i D_i^\psi \tag{2.1}$$

Здесь b_i, m_i, g_i — неотрицательные весовые константы, D_i^x, D_i^ψ — дисперсии функций $X_i(t)$ и параметров Ψ_j.

Тогда задача о выборе оптимального в среднем управления при ограниченном уровне управляющих воздействий $u_1, \ldots, u_r$ приводится к отысканию функций u_i, x_i, X_i° и параметров a_i, удовлетворяющих уравнениям (1.3) — (1.5) и доставляющих минимум функционалу (2.1).

Эту вариационную проблему преобразуем к виду, более удобному для решения.

Из уравнения (1.4) видно, что $X_i^\circ(t)$ можно записать как

$$X_i^\circ = \sum_{k=1}^{n} \eta_i^k X_{k0}^\circ + \sum_{k=1}^{mr} \eta_{vi}^k V_k + \sum_{k=1}^{q} \eta_{ai}^k A_k^\circ + \sum_{k=1}^{\nu} \eta_{pi}^k P_k^\circ \tag{2.2}$$

Здесь η_i^k, η_{vi}^k, η_{ai}^k, η_{pi}^k определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
&H_i^k \equiv \frac{d\eta_i^k}{dt} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\eta_j^k = 0 && (i, k = 1, \ldots, n)\\
&H_{vi}^k \equiv \frac{d\eta_{vi}^k}{dt} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\eta_{vj}^k - \beta_{ik} = 0 && (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, mr)\\
&H_{ai}^k \equiv \frac{d\eta_{ai}^k}{dt} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\eta_{aj}^k - \gamma_{ik} = 0 && (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, q)\\
&H_{pi}^k \equiv \frac{d\eta_{pi}^k}{dt} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\eta_{pj}^k - \zeta_{ik} = 0 && (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, \nu)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\eta_i^k(t_0) = 0 \quad (i \neq k), \qquad \eta_i^k(t_0) = 1 \quad (i = k), \qquad \eta_{vi}^k(t_0) = \eta_{ai}^k(t_0) = \eta_{pi}^k(t_0) = 0 \tag{2.4}$$

Из выражения (2.2) имеем

$$D_i^x = \sum_{k=1}^{n} (\eta_i^k)^2 D_{k0}^x + \sum_{k=1}^{mr} (\eta_{vi}^k)^2 D_k^v + \sum_{k=1}^{q} (\eta_{ai}^k)^2 D_k^a + \sum_{k=1}^{\nu} (\eta_{pi}^k)^2 D_k^p$$

Из (1.6) и (2.2) следует

$$\Psi_i \equiv \sum_{k=1}^{n} c_{ik} X_{k0}^{\circ} + \sum_{k=1}^{mr} d_{ik} V_k + \sum_{k=1}^{q} l_{ik} A_k^{\circ} + \sum_{k=1}^{\nu} h_{ik} P_k^{\circ}$$

Здесь c_{ik}, d_{ik}, l_{ik}, h_{ik} — известные функции конечных значений переменных x_i, η_i^k, η_{vi}^k, η_{ai}^k, η_{pi}^k и параметров a_i, p_i. Отсюда имеем

$$D_i^{\psi} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}^2 D_{k0}^x + \sum_{k=1}^{mr} d_{ik}^2 D_k^v + \sum_{k=1}^{q} l_{ik}^2 D_k^a + \sum_{k=1}^{\nu} h_{ik}^2 D_k^p$$

Учитывая полученные выражения для D_i^x, D_i^{ψ}, функционал (2.1) запишем в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F dt + \Phi \tag{2.5}$$

Здесь F — известная функция переменных η_i^k, η_{vi}^k, η_{ai}^k, η_{pi}^k, u_i и параметров b_i, m_i, D_{i0}^x, D_i^v, D_i^a, D_i^p, а Φ — известная функция конечных значений переменных x_i, η_i^k, η_{vi}^k, η_{ai}^k, η_{pi}^k и параметров g_i, a_i, p_i, D_{i0}^x, D_i^v, D_i^a, D_i^p.

Рассматриваемую задачу можно сформулировать как вариационную проблему об определении функций u_i, x_i, η_i^k, η_{vi}^k, η_{ai}^k, η_{pi}^k и параметров a_i, удовлетворяющих уравнениям (1.3) — (1.5), (2.3), (2.4) и доставляющих минимум функционалу (2.5).

3. Систему необходимых условий оптимизации представим в следующем виде [12,13]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F^*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), && \frac{\partial F^*}{\partial \eta_{ai}^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{\eta}_{ai}^k} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n; \\ k = 1, \ldots, q \end{pmatrix}\\
&\frac{\partial F^*}{\partial \eta_i^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{\eta}_i^k} = 0 \quad (i, k = 1, \ldots, n), && \frac{\partial F^*}{\partial \eta_{pi}^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{\eta}_{pi}^k} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n; \\ k = 1, \ldots, \nu \end{pmatrix}\\
&\frac{\partial F^*}{\partial \eta_{vi}^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{\eta}_{vi}^k} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n; \\ k = 1, \ldots, mr \end{pmatrix}, && \frac{\partial F^*}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, r)\\
&\frac{\partial \Phi^*}{\partial a_i} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F^*}{\partial a_i} dt = 0 \quad (i = 1, \ldots, q), && \lambda_i|_{t_1} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_{i1}} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\left[\lambda_i^k + \frac{\partial\Phi^*}{\partial\eta_i^k}\right]_{t_1} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n; \\ k = 1, \ldots, n \end{pmatrix}, \quad \left[\lambda_{ai}^k + \frac{\partial\Phi^*}{\partial\eta_{ai}^k}\right]_{t_1} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n; \\ k = 1, \ldots, q \end{pmatrix}$$

$$\left[\lambda_{vi}^k + \frac{\partial\Phi^*}{\partial\eta_{vi}^k}\right]_{t_1} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n; \\ k = 1, \ldots, mr \end{pmatrix}, \quad \left[\lambda_{pi}^k + \frac{\partial\Phi^*}{\partial\eta_{pi}^k}\right]_{t_1} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, \nu \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$\left[F - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^{\cdot} - \sum_{i,k} \lambda_i^k (\eta_i^k)^{\cdot} - \sum_{i,k} \lambda_{vi}^k (\eta_{vi}^k)^{\cdot} - \sum_{i,k} \lambda_{ai}^k (\eta_{ai}^k)^{\cdot} - \sum_{i,k} \lambda_{pi}^k (\eta_{pi}^k)^{\cdot}\right]_{t_1} = 0 \tag{3.3}$$

$$F^* = F + \sum_i \lambda_i (x_i^{\cdot} - f_i) + \sum_{i,k} \lambda_i^k H_i^k + \sum_{i,k} \lambda_{vi}^k H_{vi}^k + \sum_{i,k} \lambda_{ai}^k H_{ai}^k + \sum_{i,k} \lambda_{pi}^k H_{pi}^k$$

$$\Phi^* = \Phi + \sum_i \nu_i \psi_i \tag{3.4}$$

Здесь $\lambda_i, \lambda_i^k, \lambda_{vi}^k, \lambda_{ai}^k, \lambda_{pi}^k, \nu_j$ — множители Лагранжа; соотношение (3.3) имеет место, если t_1 произвольна.

Необходимые условия оптимальности вместе с исходными уравнениями задачи позволят найти оптимальное в среднем управление $[u_j(t), a_i]$ и соответствующее ему программное движение системы. Затем из уравнений (1.4), (1.6) определятся характеристики оптимизированного случайного процесса.

В заключение отметим, что в силу взаимности вариационных проблем записанные выше условия оптимизации позволяют также решать задачи об определении экстремума какой-либо характеристики программного движения при заданном значении функционала (2.5), т. е. при заданной точности исполнения программного движения.

4. В качестве примера рассмотрим летательный аппарат, движение центра масс которого в вертикальной плоскости при постоянном ускорении силы тяжести и нулевых аэродинамических силах описывают уравнения

$$X_1^{\cdot} = \frac{WP}{1-Pt}\cos u,\ X_3^{\cdot} = X_2,\ X_2^{\cdot} = \frac{WP}{1-Pt}\sin u - g, \quad X_1(0) = X_2(0) = X_3(0) = 0 \tag{4.1}$$

Здесь X_1, X_2 — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости, X_3 — высота полета, W — относительная скорость отбрасывания продуктов сгорания двигателя — заданное число, P — случайная величина с заданным математическим ожиданием p и дисперсией D — характеризует интенсивность расходования топлива, u — угол наклона тяги двигателя к горизонту — неслучайная управляющая функция, g — ускорение силы тяжести.

Из уравнений (4.1) имеем следующие системы для определения программного движения и отклонений от него:

$$x_1^{\cdot} = \frac{Wp}{1-pt}\cos u, \qquad x_2^{\cdot} = \frac{Wp}{1-pt}\sin u - g, \qquad x_3^{\cdot} = x_2$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0 \tag{4.2}$$

$$X_1^{\circ\cdot} = \frac{WP^\circ}{(1-pt)^2}\cos u, \qquad X_2^{\circ\cdot} = \frac{WP^\circ}{(1-pt)^2}\sin u\ \xi_1\ \xi_2, \qquad X_3^{\circ\cdot} = X_2^\circ$$

$$X_1(0) = X_2(0) = X_3(0) = 0 \tag{4.3}$$

Здесь $X_i^\circ = X_i - x_i$, $P^\circ = P - p$, x_i — математическое ожидание функции X_i.

Из уравнений (4.3) видна возможность следующего представления функций X_i°:

$$X_i^\circ = \eta_i P^\circ \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4.4}$$

Здесь η_1, η_2, η_3 определяются из уравнений

$$\eta_1^{\cdot} = \frac{W}{(1-pt)^2}\cos u, \qquad \eta_2^{\cdot} = \frac{W}{(1-pt)^2}\sin u\ \xi_1\ \xi_2, \qquad \eta_3^{\cdot} = \eta_2$$

$$\eta_1(0) = \eta_2(0) = \eta_3(0) = 0 \tag{4.5}$$

Конечные значения функций $X_{i1}^{\circ} = X_i^{\circ}(t_1)$ и их дисперсии D_{i1} запишутся в виде

$$X_{i1}^{\circ} = \eta_{i1} P^{\circ}, \qquad D_{i1} = \eta_{i1}^2 D$$

Пусть параметр

$$\Phi = (g_1 \eta_{11}^2 + g_2 \eta_{21}^2 + g_3 \eta_{31}^2) D \tag{4.6}$$

где g_1, g_2, g_3 — неотрицательные весовые постоянные, принят в качестве меры рассеивания характеристик движения в конце траектории. Тогда, считая этот параметр заданным, можно решать различные оптимальные в смысле работ [9-11] задачи при дополнительном граничном условии (4.6), выполнение которого означает определение оптимальных режимов полета летательного аппарата с заранее заданным уровнем рассеивания его конечных характеристик.

Рассмотрим, например, задачу о выборе управления $u(t)$, обеспечивающего достижение максимальной горизонтальной составляющей скорости

$$x_{11} = x_1(t_1) \tag{4.7}$$

при заданных $x_1(0)$, $x_2(0)$, $x_3(0)$, t_1, конечных значениях функций

$$x_2(t_1) = x_{21}, \qquad x_3(t_1) = x_{31} \tag{4.8}$$

и заданном параметре рассеивания Φ.

Эта задача будет вариационной проблемой типа Майера об отыскании функций u, x_1, x_2, x_3, η_1, η_2, η_3, удовлетворяющих уравнениям (4.2), (4.5), (4.6), (4.8) и доставляющих максимум функционалу (4.7). Решение ее приводит к следующим выражениям, определяющим оптимальное управление

$$\operatorname{tg} u = \frac{p\lambda_2 (1 - pt) + \mu_2}{p\lambda_1 (1 - pt) + \mu_1}$$

$$\lambda_1 = -1, \qquad \mu_1 = -2\nu D g_1 \eta_{11}, \qquad \mu_3 = -2\nu D g_3 \eta_{31}$$

$$\lambda_2 = C_1 + C_2 (t_1 - t), \qquad \mu_2 = \mu_{21} + \mu_3 (t_1 - t), \qquad \mu_{21} = -2\nu D g_2 \eta_{21}$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu$ — множители Лагранжа.

Для сравнения отметим, что если задача решается без ограничения (4.6), то выражение для $\operatorname{tg} u$ получается в виде линейной функции времени.

Поступила 28 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Физматгиз, 1960.
2. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1962.
3. Первозванский А. А. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. Физматгиз, 1963.
4. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. Судпромгиз, 1961.
5. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов, ч. I—V. Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 4—6; 1961, т. 22, № 4; 1962, т. 23, № 11.
6. Красовский Н. Н., Лидский Э. А. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 9—11.
7. Красовский Н. Н. Об оптимальном регулировании при запаздывании сигналов обратной связи. Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 8.
8. Салуквадзе М. Е. Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 10; 1962, т. 23, № 6, 12.
9. Тарасов Е. В. Оптимальные режимы полета летательных аппаратов. Оборонгиз, 1963.
10. Исследование оптимальных режимов движения ракет. Сб. пер. иностр. статей под ред. Садовского И. Н., Оборонгиз, 1959.
11. Кожевников Ю. В. Оптимизация режимов полета и параметров составных ракет. Изв. МВО, сер. Авиационная техника, 1963, № 3.
12. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. ИЛ, 1950.
13. Кожевников Ю. В. К решению разрывных оптимальных задач с параметрами. Труды КАИ, сер. Математика и механика, 1963, вып. 80.