К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

М. И. Иманалиев, К. Б. Какишов

(Фрунзе)

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$L[z] \equiv \varepsilon \frac{dz}{dx} - A(x)\, z - \int_0^x K(x, t)\, z(t)\, dt = B(x) u \tag{1}$$

с начальным условием $z(0) = b$ и функционал

$$J[u] = \int_0^\infty \left[z^*(t)\, C(t)\, z(t) + \int_0^t z^*(t)\, Q(t, s)\, z(s)\, ds + u^*(t)\, Hu\right] dt, \tag{2}$$

$$C(x) \geqslant 0, \quad Q(x, t) \geqslant 0, \quad H(x) > 0, \quad \det A(x) \neq 0$$

где $0 < \varepsilon$ — малый параметр; $A(x)$, $K(x, t)$, $B(x)$, $C(x)$, $H(x)$, $Q(x, t)$ — известные матричные функции, причем C, Q, H — симметрические матричные функции, b — n-мерный постоянный вектор.

Поставим задачу (D) найти управление $U = U_\varepsilon(x)$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 — достаточно малое положительное число, чтобы выполнялись равенства

$$\lim z_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{при } x \to \infty, \qquad J[u] = \min \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$L_1[v] \equiv A(x)\, v + \int_0^x K(x, t)\, v(t)\, dt = B(x)\, w(x) \tag{3}$$

и функционал

$$J[w] = \int_0^\infty \left[v^*(t)\, C(t)\, v(t) + \int_0^t v^*(t)\, Q(t, s)\, v(s)\, ds + w^* H w\right] dt \tag{4}$$

Поставим задачу (D_0) найти управление $w(x)$ такое, чтобы выполнялись равенства

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = 0, \qquad J[w] = \min$$

В дальнейшем задачу D_0 назовем вырожденной по отношению к задаче D, а задачу D — возмущенной по отношению к задаче D_0.

Пусть $w_0 = w_0(x)$ — допустимое управление, для которого

$$L_1[q] = B(x)\, w_0, \qquad l(x) = w_0(x) - w(x), \qquad p_1(x) = q(x) - v(x)$$

а $R(x, s)$ — резольвента ядра $A^{-1}(x) \cdot K(x, t)$. Тогда

$$L_1[p(x)] = B(x)\, l(x)$$

$$J[w_0] = J[w + l(x)] = J[w] + J[l(x)] +$$
$$+ 2\int_0^\infty \left[p^*(t)\, C(t)\, v(t) + \int_0^t p^*(t)\, Q(t, s)\, v(s)\, ds + l^*(t)\, H(t)\, w\right] dt \tag{5}$$

а функция

$$p(x) = \int_0^x R(x, s)\, A^{-1}(s)\, B(s)\, l(s)\, ds$$

удовлетворяет системе $L_1[p] = B(x)\, l(x)$. Имеем

$$p^*(x) = \int_0^x l^*(s)\, R_0(x, s)\, ds$$

Здесь $p^*(x)$, $l^*(x)$ — сопряженные векторы по отношению к векторам $p(x)$ и $l(x)$, а $R_0(x, s)$ — известная $n \times n$ матричная функция.

Теорема 1. Пусть система интегральных уравнений

$$L_1 [v] = B (x) a (x)$$

имеет решение $v (x)$ такое, что

$$\lim_{x\to\infty} v (x) = 0, \qquad \int_0^\infty |v^* (t) v (t) dt < +\infty$$

Тогда функция $w (x) = - H^{-1} (x) B^* (x) a (x)$ будет единственным оптимальным управлением, где

$$a (x) = - B^{*-1} (x) \int_x^\infty R_0 (t, x) \left[C (t) v (t) + \int_0^t Q (t, s) v (s) ds\right] dt \tag{6}$$

Доказательство. Предположим теперь, что оптимальное управление для задачи D_0 имеет вид

$$w (x) = - H^{-1} (x) B^* (x) a (x)$$

Имеем

$$\int_0^\infty \left[p^* (t) C (t) v (t) + \int_0^t p^* (t) Q (t, s) v (s) ds + l^* (t) H (t) w (t) \right] dt =$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \int_0^x l^* (s) R_0 (t, s) ds \left[C (t) v (t) + \int_0^t Q (t, s) v (s) ds\right] + l^* (t) H (t) w (t) \right\} dt =$$

$$= \int_0^\infty l^* (s) \left\{ \int_s^\infty R_0 (t, s) \left[C (t) v + \int_0^t Q (t, s) v (s) ds\right] dt - B^* (s) a (s) \right\} ds \equiv 0$$

Тогда из равенств (5) и (6) следует, что управление $w (x)$ будет оптимальным.

Будем говорить, что $n \times n$ матричная функция $A (x)$ удовлетворяет условию (S), если для всех $x \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$1/2 [A (x) + A^* (x)] < - \alpha E_m < 0 \qquad (\alpha = \text{const}, \alpha > 0)$$

Лемма 1. Если матричная функция $A (x)$ удовлетворяет условию (S), то при всех $x \geqslant s \geqslant 0$ для фундаментальной матрицы $W_\varepsilon (x, s)$ $[W_\varepsilon (s, s) = E_n]$ системы уравнений

$$\varepsilon y' = A (x) y$$

выполняется неравенство

$$\| W_\varepsilon (x, s) \| \leqslant K \exp \frac{- \alpha (x - s)}{\varepsilon} \qquad (K = \text{const})$$

Рассмотрим систему $\varepsilon\pi' (x, \varepsilon) = A (x) \pi (x, \varepsilon)$ с начальным условием вида $\pi (0) = b_1 - v (0)$. На основании леммы 1 при всех $x \geqslant 0$ для $\pi (x, \varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\| \pi (x, \varepsilon) \| \leqslant K_0 \exp \frac{- \alpha x}{2} \qquad (K_0 = \text{const})$$

Подстановкой

$$z (x, \varepsilon) = v (x) + \pi (x, \varepsilon) + \varepsilon\xi (x, \varepsilon), \qquad u (x, \varepsilon) = w (x) + \varepsilon\eta (x, \varepsilon)$$

систему уравнений (1) и функционал (2) приводим к виду

$$L [\xi] = B (x) \eta (x) - v' (x) + \int_0^x K (x, t) \frac{1}{\varepsilon} \pi (t, \varepsilon) dt \tag{7}$$

$$\xi (0, \varepsilon) = 0$$

$$J [u] = J [w + \varepsilon\eta] = J [w] + \varepsilon J [\eta] + J_0 (\varepsilon) + J_1 (\varepsilon)$$

где

$$J_0(\varepsilon) \equiv 2\int_0^\infty \pi^*(t, \varepsilon)\left[C(t)\, v(t) + \int_0^t Q(t, s)\, \pi(s, \varepsilon)\, ds\right] dt$$

$$J_1(\varepsilon) \equiv 2\varepsilon \int_0^\infty [A_0(t)\, \xi(t) + w^*(t)\, H(t)\, \eta(t)]\, dt$$

$$A_0(t) \equiv v^*(t)\, C(t) + \int_0^t v^*(s)\, Q(t, s)\, ds + \pi^*(t)\, C(t) + \int_0^t \pi^*(t, \varepsilon)\, Q(t, s)\, ds \tag{8}$$

Нетрудно убедиться, что при $\sup(\|C(x)\| \|v\| \| Q(x, \varepsilon)\| \leqslant C_0 = \text{const}$ интеграл $I_0(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $V_\varepsilon(x, s)$ $[V_\varepsilon(s, s) = E_n]$ удовлетворяет системе

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = A(x)\, y + \int_s^x K(x, t)\, y(t, s)\, ds, \qquad s \in [0, \infty)$$

где s — некоторый параметр. Тогда функция

$$\xi(x, \varepsilon) = \int_0^x V_\varepsilon(x, s) \frac{1}{\varepsilon} B(s)\, \eta(s)\, ds - \int_0^x V_\varepsilon(x, s)\, \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^s K(s, t)\, \pi dt - v'(s)\right] ds \tag{9}$$

удовлетворяет системе (7) и начальному условию $\xi(0, \varepsilon) = 0$.

Пусть функции $\eta(x)$ удовлетворяет системе

$$w^*(x)\, H(x)\, \eta(x) = A_0(x) \left\{\int_0^x V_\varepsilon(x, s)\, \frac{1}{\varepsilon} B(s)\, \eta(s)\, ds - \right.$$

$$\left. - \int_0^x V_\varepsilon(x, s) \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^s K(s, \nu)\, \pi(\nu, \varepsilon)\, dv - v'(s)\right] ds\right\} \tag{10}$$

Тогда из (8) и (9) вытекает, что $J_1(\varepsilon) = 0$. Итак доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если система уравнений (7) и (10) имеет решения $\xi(x, \varepsilon)$ и $\eta(x, \varepsilon)$ такие, что

$$\lim \xi(x, \varepsilon) = 0, \qquad \int_0^\infty \xi^*(t, s)\, \xi(t, \varepsilon)\, dt < +\infty$$

то при $\varepsilon \to 0$ функция $u(x) = w(x) + \varepsilon\eta(x, \varepsilon)$ будет единственным оптимальным управлением возмущенной задачи D.

В заключение отметим, что идея настоящей работы применима для более общих систем с последействием [4].

Поступила 24 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.
2. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов, I. Автоматика и телемеханика, 1960, т. XXI, № 4.
3. Попов В. М., Халанай А. Об одной задаче в теории оптимальных систем с запаздыванием. Автоматика и телемеханика, 1963, т. XXIV, № 2.
4. Иманалиев М. И. О системах нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с малым параметром при некоторых производных. Материалы XI научной конференции физико-математического факультета Киргос. университета, Фрунзе, 1963.
5. Красовский Н. Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени, ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
6. Kalman R. E. Cantrubutions to the thery of optimal control, Bol. Soc, Math. Mexicana, 1960, 102, 119.