ЛИТЕРАТУРА

1. Барбашин Е. А., Табуева В. А. Теорема об устойчивости решения одного дифференциального уравнения третьего порядка с разрывной характеристикой. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
2. Емельянов С. В., Уткин В. И. Применение систем автоматического регулирования с переменной структурой для управления объектами, параметры которых изменяются в широких пределах. Докл. АН СССР, 1963, т. 152, № 2.
3. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехтеоретиздат, 1949.
4. Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях. ПММ, 1954, т. 18, вып. 1.
5. Барбашин Е. А., Скалкина М. А. К вопросу об устойчивости по первому приближению. ПММ, 1955, т. 19, вып. 5.
6. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. Докл. АН СССР, 1952, т. 86, № 3.

СТУПЕНЧАТАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Ю. Н. Иванов

(Москва)

Рассматривается задача о нахождении простого оптимального закона управления. Простым считается такой закон управления, который состоит в смене положений регулятора конечное заданное число раз. Указывается алгоритм выбора оптимальных положений регулятора и оптимальных моментов переключения с одного положения на другое. Приводятся примеры из области оптимального движения тела переменной массы с постоянной затратой мощности.

Реализация оптимальных законов для управляющих функций всегда связана с трудностями технического характера, если только эти законы не являются простыми, например постоянная или кусочно-постоянная функция времени.

Ниже рассматривается задача о наилучшей аппроксимации сложного закона управления простым, а именно, о замене сложной непрерывной управляющей функции кусочно-постоянной с заданным числом уровней (ступенек). При этом регулятор вместо бесконечного числа положений имеет заданное число оптимальных положений, смена которых производится в оптимальные моменты времени.

С отысканием такого рода простых оптимальных законов управления приходится сталкиваться, например, в задачах оптимизации движения тела переменной массы с ограниченной мощностью (см., например, [1]). Известно, что при отсутствии ограничений на реактивную тягу оптимальный закон изменения последней представляет собой непрерывную функцию времени; реализация такого закона затруднительна. С другой стороны, если заранее задаться условием постоянства модуля тяги вдоль траектории (с оптимальным выключением или без него), то такой закон хотя и прост, но дает большой проигрыш в функционале — полезной нагрузке. Простой будет такая регулировка двигателя, когда число положений регулятора конечное и заданное, т. е. двигатель обеспечивает заданное число уровней тяги. Возникает задача об оптимальном выборе этих уровней и об оптимальных моментах смены уровней.

В литературе известны примеры решения частных задач ступенчатой аппроксимации управлений [2-3].

В работе [2] оптимальное ступенчатое изменение веса источника мощности просто определяется из-за специального вида функционала задачи, а также вследствие ограничения сверху на производную от веса источника мощности. Аналогичная ситуация имеет место и в случае, исследованном в [3].

Пусть динамическая система описывается дифференциальными уравнениями и краевыми условиями

$$x_i^{\cdot} = f_i(x_j, u_k, t), \quad x_i(0) = x_i^{(0)}, \quad x_l(T) = x_l^{(1)} \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n \quad l = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

Здесь x_i — фазовые координаты, u_k — управляющие функции — положения регуляторов; контрольный функционал задачи — $x_0(T)$.

Решение вариационной задачи об экстремуме функционала $x_0(T)$ дает оптимальные управления $u_1^*(t), \ldots, u_m^*(t)$. Рассмотрим такое положение, когда оптимальный закон для одной из управляющих функций, например $u_1^*(t)$, является сложным для практической реализации. Естественно, возникает задача о нахождении такого закона $u_1(t)$ вместо $u_1^*(t)$, который был бы простым для реализации и одновременно не намного «ухудшал» значение функционала $x_0(T)$.

Будем считать закон управления простым, если он состоит в изменении положения регулятора конечное заданное число раз, т. е. управляющая функция представляет собой кусочно-постоянную функцию. При помощи $N-1$ релейных функций $\delta(t)$, принимающих значения 0 или *1*, кусочно-постоянная функция, принимающая N значений, может быть представлена следующим образом [4,5]:

$$u_1(t) = (\ldots(\alpha_1\delta_1 + \alpha_2)\,\delta_2 + \ldots + \alpha_{N-1})\,\delta_{N-1} + \alpha_N \tag{2}$$

Здесь $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ — параметры, определяющие высоты ступенек. При этом N значений управления $u_1(t)$ выражаются так

$$u_1^{(N)} = \alpha_N, \ldots, u_1^{(1)} = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N \tag{3}$$

Введем времена действия параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$.

Параметр α_N включен в течение всего процесса $(0 \leqslant t \leqslant T)$, параметр α_{N-1} включен тогда, когда $\delta_{N-1} = 1$, параметр α_2 включен тогда, когда $\delta_2\delta_3 \ldots \delta_{N-1} = 1$, и т. д. Текущие времена действия параметров $t_{M1}, \ldots, t_{MN}$ определяются дифференциальными выражениями вида

$$\dot{t}_{Ms} = \delta_s\delta_{s+1}\ldots\delta_{N-1} \qquad (s = 1, \ldots, N-1), \qquad \dot{t}_{MN} = 1 \tag{4}$$

Полные времена действия даются интегралами

$$T_{Ms} = \int_0^T \delta_s\delta_{s+1}\ldots\delta_{N-1}\,dt \qquad (s = 1, \ldots, N-1), \qquad T_{MN} = T \tag{5}$$

Выбор параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ и точек переключения релейных функций $\delta_1, \ldots, \delta_{N-1}$ подчиним условию экстремума функционала $x_0(T)$. Для этой цели воспользуемся методом Л. С. Понтрягина: составим гамильтонову функцию H и выпишем дифференциальные уравнения импульсов

$$\begin{gathered} H = \sum_{i=0}^{n} p_i f_i\,[x_j, u_k, t, (\ldots(\alpha_1\delta_1 + \alpha_2)\,\delta_2 + \ldots + \alpha_{N-1})\,\delta_{N-1} + \alpha_N] \\ \dot{p}_i = -\,\partial H/\partial x_i \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n;\ k = 2, \ldots, m) \end{gathered} \tag{6}$$

Нахождение оптимальных управлений $u_2, \ldots, u_m$ производится стандартным способом; для определения оптимальных релейных управлений $\delta_1, \ldots, \delta_{N-1}$ следует вычислять функцию H при следующих наборах значений этих управлений в каждый момент t

H_1	H_2	$\ldots$	H_{N-1}	H_N
$\delta_{N-1} = 0$	$\delta_{N-1} = 1$		$\delta_{N-1} = 1$	$\delta_{N-1} = 1$
	$\delta_{N-2} = 0$		$\ldots$	$\ldots$
			$\delta_2 = 1$	$\delta_2 = 1$
			$\delta_1 = 0$	$\delta_1 = 1$

Наибольшая (или наименьшая, судя по характеру экстремума $x_0(T)$) величина H из N вычисленных величин укажет оптимальный набор значений релейных управлений в момент t.

Для нахождения оптимальных значений параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ можно воспользоваться следующим приемом (см., например, [3,6]). Считая параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ фазовыми координатами, дополним систему (1) дифференциальными уравнениями

$$\alpha_1^{\cdot} = 0, \ldots, \alpha_N^{\cdot} = 0$$

Гамильтонова функция при этом не изменится, а к уравнениям для импульсов (6) добавятся N дифференциальных уравнений вида

$$\dot{p}_{\alpha,1} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} = -\frac{\partial H}{\partial u_1}\delta_1 \ldots \delta_{N-1}, \ldots, \dot{p}_{\alpha,N} = -\frac{\partial H}{\partial u_1} \qquad (7)$$

Начальные и конечные величины фазовых координат не фиксированы, поэтому начальные и конечные значения импульсов $p_{\alpha,1}, \ldots, p_{\alpha,N}$ нулевые. Отсюда следуют условия для выбора оптимальных значений параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$

$$\int_0^T \frac{\partial H}{\partial u_1}\delta_1 \ldots \delta_{N-1}\, dt = 0, \ldots, \int_0^T \frac{\partial H}{\partial u_1}\, dt = 0 \qquad (8)$$

При помощи соотношений (4), (5) последние формулы могут быть единообразно представлены в следующем виде:

$$\int_0^{T_{Ms}} \frac{\partial H}{\partial u_1}\, dt_{Ms} = 0 \quad (s = 1, \ldots, N-1), \qquad \int_0^T \frac{\partial H}{\partial u_1}\, dt = 0 \qquad (9)$$

Примеры. При движении тела переменной массы с постоянной затратой мощности критерием оптимальности является интегральный функционал (см., например, [1])

$$J = \int_0^T a^2 dt \qquad (a \text{ — модуль реактивного ускорения})$$

Если движение состоит в перемещении за время T между двумя точками покоя, разделенными расстоянием l, в бессиловом поле, то связь между кинетическими характеристиками траектории и ускорением a задается двумя дифференциальными уравнениями и краевыми условиями

$$x^{\cdot} = v,\ v^{\cdot} = a\beta;\ x(0) = v(0) = v(T) = 0,\ x(T) = l$$

где $\beta = \pm 1$ — направление вектора тяги.

Отнесем текущую длину x к промежутку l, текущее время t — к времени движения T, скорость v — к l / T, ускорение a — к l / T^2 и функционал J — к l^2 / T^3. Тогда вариационная задача запишется следующим образом

$$x^{\cdot} = v,\ v^{\cdot} = a\beta,\ J^{\cdot} = a^2;\ x(0) = v(0) = J(0) = v(1) = 0,\ x(1) = 1,\ \min J(1) \qquad (10)$$

(здесь обозначения для всех величин сохранены прежние).

При отсутствии ограничений на управление $a(t)$ оптимальные законы $a(t)$ и $\beta(t)$ имеют вид (кривая ∞ на фиг. 1)

$$\begin{array}{lll} a = 12(1/_2 - t), & \beta = 1 & (1/_2 \geqslant t \geqslant 0) \\ a = 12(t - 1/_2), & \beta = -1 & (1 \geqslant t \geqslant 1/_2), \end{array} \qquad J(1) = 12 \qquad (11)$$

Ниже приведены результаты расчетов некоторых ступенчатых оптимальных законов $a(t)$, и на последнем из них показано применение предлагаемого метода.

1. Для $a = \alpha_1$ оптимальные законы $a(t)$, $\beta(t)$ (фиг. 1, кривая *1*)

$$\begin{array}{lll} a = 4, & \beta = 1 & (1/_2 \geqslant t \geqslant 0), \\ a = 4, & \beta = -1 & (1 \geqslant t \geqslant 1/_2), \end{array} \qquad J(1) = 16 \qquad (12)$$

2. Для $a = \alpha_1\delta_1$ оптимальные законы $a(t)$, $\beta(t)$ (фиг. 1, кривая *2*)

$$\begin{array}{lll} a = 4.5, & \beta = 1 & (1/_3 \geqslant t \geqslant 0), \\ a = 0 & (2/_3 \geqslant t \geqslant 1/_3), & \\ a = 4.5, & \beta = -1 & (1 \geqslant t \geqslant 2/_3), \end{array} \qquad J(1) = 13.5 \qquad (13)$$

3. Для $a = \alpha_1\delta_1 + \alpha_2$ оптимальные законы $a(t)$, $\beta(t)$ (фиг. 1, кривая 3)

$$\begin{array}{lll} a = 4.8, & \beta = 1 & (1/4 \geqslant t \geqslant 0) \\ a = 1.6, & \beta = 1 & (1/2 \geqslant t \geqslant 1/4) \\ a = 1.6, & \beta = -1 & (3/4 \geqslant t \geqslant 1/2) \\ a = 4.8, & \beta = -1 & (1 \geqslant t \geqslant 3/4) \end{array} \qquad J(1) = 12.8 \tag{14}$$

4. Для $a = (\alpha_1\delta_1 + \alpha_2)\,\delta_2$ оптимальные законы $a(t)$, $\beta(t)$ (фиг. 1, кривая 4)

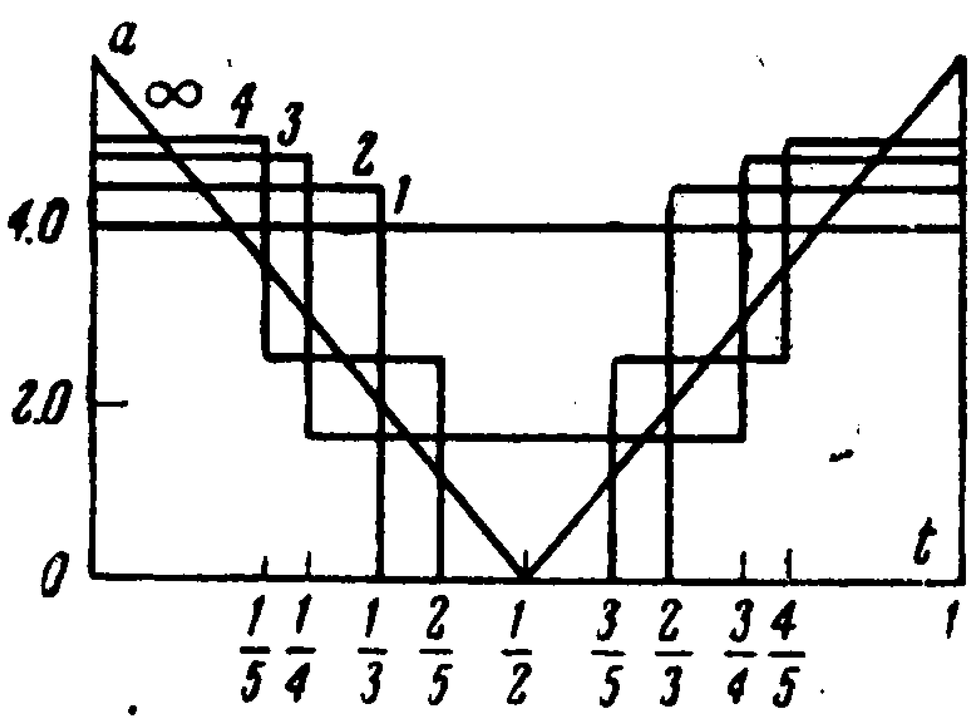
$$\begin{array}{lll} a = 5, & \beta = 1 & (1/5 \geqslant t \geqslant 0) \\ a = 2.5, & \beta = 1 & (2/5 \geqslant t \geqslant 1/5) \\ a = 0 & & (3/5 \geqslant t \geqslant 2/5) \\ a = 2.5, & \beta = -1 & (4/5 \geqslant t \geqslant 3/5) \\ a = 5, & \beta = -1 & (1 \geqslant t \geqslant 4/5) \end{array} \qquad J(1) = 12.5 \tag{15}$$

В примерах 2 и 4 в состав управления включены уровни с заданной (нулевой) высотой; для участков с заданной величиной управления указывается только их оптимальное положение.

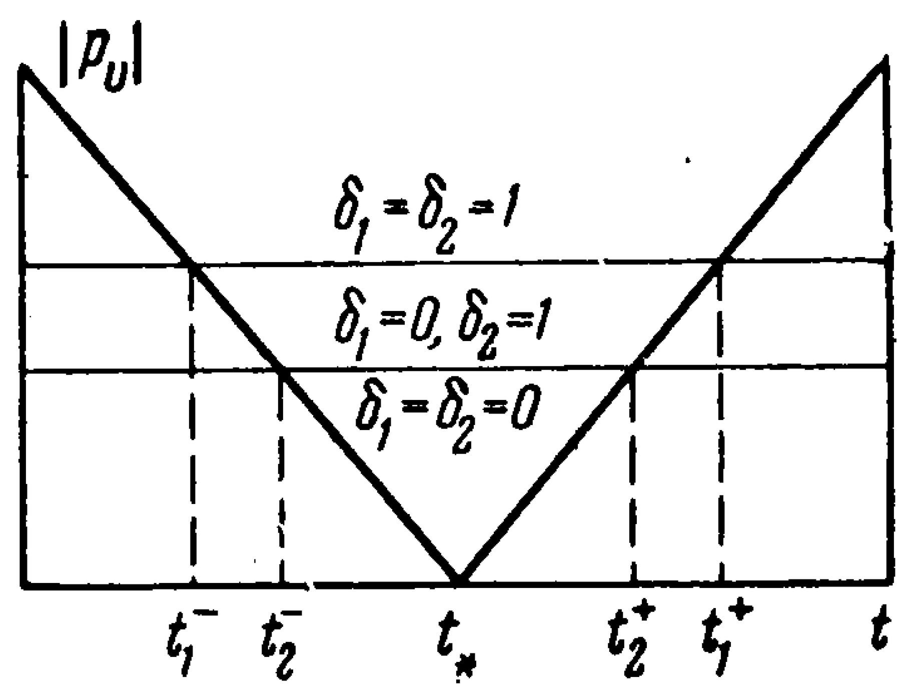
При трехступенчатой управляющей функции

$$a = (\alpha_1\delta_1 + \alpha_2)\,\delta_2 \tag{16}$$

с нулевым уровнем α_3 (см. пример 4) дифференциальные уравнения фазовых координат, гамильтонова функция, дифференциальные уравнения импульсов и уравнения



Фиг. 1



Фиг. 2

для выбора оптимальных параметров α_1, α_2 имеют вид согласно (10), (6), (8)

$$x^\cdot = v, \quad v^\cdot = \beta\,(\alpha_1\delta_1 + \alpha_2)\,\delta_2, \quad J^\cdot = \alpha_1^2\delta_1\delta_2 + 2\alpha_1\alpha_2\delta_1\delta_2 + \alpha_2^2\delta_2, \quad p_v^\cdot = -\,p_x$$

$$H = -\,\alpha_1^2\delta_1\delta_2 - 2\alpha_1\alpha_2\delta_1\delta_2 - \alpha_2^2\delta_2 + p_v\beta\,(\alpha_1\delta_1 + \alpha_2)\,\delta_2 + p_x v, \quad p_x^\cdot = 0 \tag{17}$$

$$\alpha_1\int_0^1 \delta_1\delta_2\,dt + \alpha_2\int_0^1 \delta_1\delta_2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 p_v\beta\delta_1\delta_2\,dt, \quad \alpha_1\int_0^1 \delta_1\delta_2\,dt + \alpha_2\int_0^1 \delta_2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 p_v\beta\delta_2\,dt$$

Решение дифференциального уравнения для импульса p_v может быть представлено следующим образом:

$$p_v = c\,(t_* - t) \tag{18}$$

Оптимальные управления $\beta(t)$, $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$, доставляющие максимум функции H, подчиняются требованиям

$$\beta = \operatorname{sign} p_v(t) \qquad (\beta p_v = |\,p_v\,|) \tag{19}$$

$$\delta_1 = 1 \ \text{ при } \Delta_1 > 0, \quad \delta_1 = 0 \ \text{ при } \Delta_1 < 0 \quad (\Delta_1 = \alpha_1(-\,\alpha_1 - 2\alpha_2 + |\,p_v\,|)) \tag{20}$$

$$\delta_2 = 1 \ \text{ при } \Delta_2 > 0, \quad \delta_2 = 0 \ \text{ при } \Delta_2 < 0 \quad (\Delta_2 = \alpha_2(|\,p_v\,| - \alpha_2) + \delta_1\Delta_1) \tag{21}$$

Параметр α_2 может быть только положительным, так как $a > 0$ (см. (16)). Параметр α_1 может быть положительным или отрицательным; в последнем случае $|\alpha_1| < \alpha_2$, так как $a > 0$. Рассмотрим сначала случай $\alpha_1 > 0$.

Пусть $-\alpha_1 - \alpha_2 + |p_v| - \alpha_2 > 0$, тогда $\Delta_1 > 0$ при $\alpha_1 > 0$ (см. (20)), и $\delta_1 = 1$. При этом выражение $|p_v| - \alpha_2$ заведомо положительно; следовательно, $\Delta_2 > 0$ (см. (21)) и $\delta_2 = 1$. Пусть $|p_v| - \alpha_2 < 0$, тогда заведомо $\Delta_1 < 0$, и, следовательно, $\delta_1 = 0$. При этом $\Delta_2 < 0$ и $\delta_2 = 0$.

Эти рассуждения приводят к выводу: если $\delta_1 = 1$, то заведомо $\delta_2 = 1$; если $\delta_2 = 0$, то заведомо $\delta_1 = 0$, т. е. участок $\delta_2 = 0$ расположен внутри участка $\delta_1 = 0$, а участок $\delta_1 = 1$ — внутри участка $\delta_2 = 1$. Расположение участков показано на фиг. 2 для $|p_v(t)|$ кусочно-линейной функции (18). Здесь t_1^-, t_2^-, t_2^+, t_1^+ — корни уравнений:

$$\Delta_1(t_1^-) = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + |c|(-t_1^- + t_*) = 0$$

$$\Delta_1(t_1^+) = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + |c|(t_1^+ - t_*) = 0 \tag{22}$$

$$\Delta_2(t_2^-) = |c|(-t_2^- + t_*) - \alpha_2 = 0, \qquad \Delta_2(t_2^+) = |c|(t_2^+ - t_*) - \alpha_2 = 0 \tag{23}$$

Отсюда, в частности, следует

$$t_1^+ + t_1^- = 2t_*, \qquad t_2^+ + t_2^- = 2t_* \tag{24}$$

Оптимальные управления $\beta(t)$, $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$ могут быть записаны при помощи параметров t_1^-, t_2^-, t_*, t_2^+, t_1^+ следующим образом:

$$\begin{array}{llll}
\delta_1 = 1, & \delta_2 = 1, & \beta = 1 & (t_1^- \geqslant t \geqslant 0) \\
\delta_1 = 0, & \delta_2 = 1, & \beta = 1 & (t_2^- \geqslant t \geqslant t_1^-) \\
\delta_1 = 0, & \delta_2 = 0, & & (t_2^+ \geqslant t \geqslant t_2^-) \\
\delta_1 = 0, & \delta_2 = 1, & \beta = -1 & (t_1^+ \geqslant t \geqslant t_2^+) \\
\delta_1 = 1, & \delta_2 = 1, & \beta = -1 & (1 \geqslant t \geqslant t_1^+)
\end{array} \tag{25}$$

После интегрирования системы уравнений движения с краевыми условиями $x(0) = v(0) = v(1) = 0$, $x(1) = 1$ найдем следующие связи:

$$2t_* = 1, \qquad \alpha_1 t_1^-(1 - t_1^-) + \alpha_2 t_2^-(1 - t_2^-) = 1 \tag{26}$$

Параметры α_1, α_2 выражаются через $|c|$, t_1^-, t_2^-, так

$$\alpha_1 = {}^1/_4|c|t_2^-, \qquad \alpha_2 = {}^1/_4|c|(1 - t_2^- - t_1^-) \tag{27}$$

Из уравнений (22), (23) определяем $t_1^- = {}^1/_5$, $t_2^- = {}^2/_5$, из второго уравнения (26) находим $|c| = 25$, и окончательно $\alpha_1 = 2{,}5$, $\alpha_2 = 2.5$.

Вид оптимальных управлений приведен выше (15).

Если считать параметр α_1 отрицательным, то по сравнению с рассмотренным случаем изменяется оптимальный закон $\delta_1(t)$ ($\delta_1 = 0$ при ${}^1/_5 \geqslant t \geqslant 0$ и при $1 \geqslant t \geqslant {}^4/_5$, $\delta_1 = 1$ при ${}^2/_5 \geqslant t \geqslant {}^1/_5$ и при ${}^4/_5 \geqslant t \geqslant {}^3/_5$, δ_1 — не определено при ${}^3/_5 \geqslant t \geqslant {}^2/_5$) и параметры α_1, α_2 ($\alpha_1 = -2.5$, $\alpha_2 = 5$). Интересно отметить, что оптимальные законы $a(t)$, $\beta(t)$, а также величина функционала J при этом остаются неизменными.

В заключение сделаем несколько общих замечаний.

1°. Неединственность представления ступенчатой управляющей функции через параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ и релейные управления $\delta_1, \ldots, \delta_{N-1}$ может быть обнаружена при помощи следующих рассуждений (проведем их для $N = 2$).

Допустим, что построено оптимальное двухступенчатое управление

$$u_1 = \alpha_1\delta_1 + \alpha_2 \tag{28}$$

т. е. выбраны релейная функция δ_1 и параметры α_1, α_2. Заменим функцию δ_1 на $\delta_1' = 1 - \delta_1$ и найдем такие параметры α_1', α_2', составляющие управление u_1'

$$u_1' = \alpha_1'\delta_1' + \alpha_2' \tag{29}$$

чтобы $u_1'(t) \equiv u_1(t)$. При $\delta_1 = 0$ имеем $u_1 = \alpha_1$, $\delta_1' = 1$, и $u_1' = \delta_1' + \alpha_2'$; при $\delta_1 = 1$ имеем $u_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\delta_1' = 0$, и $u_1' = \alpha_2'$. Следовательно, для тождественного равенства $u_1'(t) \equiv u_1(t)$ необходимо выполнение условий

$$\alpha_2 = \alpha_1' + \alpha_2', \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2' \qquad \text{или} \qquad \alpha_1' = -\alpha_1, \qquad \alpha_2' = \alpha_2 + \alpha_2 \tag{30}$$

Таким образом, получено второе представление управляющей функции, не совпадающее с первым, но дающее одинаковый закон $u_1(t)$ и, следовательно, одинаковую величину контрольного функционала.

2°. В первоначальной формулировке рассматриваемой проблемы указывалось, что все параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ выбираются из оптимальных соображений. Если управляющая функция ограничена пределами $1 \geqslant u_1 \geqslant 0$, то на параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ накладываются ограничения

$$\max\,[(\ldots(\alpha_1\delta_1 + \alpha_2)\,\delta_2 + \ldots + \alpha_{N-1})\,\delta_{N-1} + \alpha_N] \leqslant 1$$
$$\min\,[(\ldots(\alpha_1\delta_1 + \alpha_2)\,\delta_2 + \ldots + \alpha_{N-1})\,\delta_{N-1} + \alpha_N] \geqslant 0$$

В частности, граница может быть включена в состав оптимального ступенчатого управления, как это сделано в примерах *2* и *4*. Приведем пример записи трехступенчатого управления $u_1(t)$, включающего нижнюю 0 и верхнюю *1* границы

$$u_1 = ((1 - \alpha_2)\,\delta_1 + \alpha_2)\,\delta_2$$

При этом должно быть $1 \geqslant \alpha_2 \geqslant 0$. Предполагается, что в оптимальном случае управление u_1 неграничное, т. е. принимает и промежуточные значения.

3°. По-видимому, с увеличением номера N ступенчатая управляющая функция «лучше» (в смысле контрольного функционала) аппроксимирует непрерывную управляющую функцию. Если обозначить через $x_0^*(T)$ оптимальное значение функционала при непрерывном управлении u_1^*, а через $x^{(N)}(T)$ — оптимальное значение функционала при ступенчатом управлении $u_1^{(N)}$, то

$$|\,x_0^{(N)}(T) - x_0^*(T)\,| \to 0 \qquad \text{при } N \to \infty$$

4°. Можно указать численный подход к решению задачи о ступенчатой аппроксимации управления, не использующий представления (2) с релейными функциями. Зададимся искомыми N уровнями управления $u_1(t)$ $(u_1^{(1)}, \ldots, u_1^{(N)})$ и будем решать задачу при помощи принципа максимума.

Моменты смены уровней определятся из условия экстремума гамильтоновой функции, а оптимальные высоты уровней — из условия экстремума функционала задачи. Последняя процедура требует привлечения численного метода, типа метода скорейшего спуска. Способ с релейными функциями дает аналитические выражения для выбора оптимальных высот уровней.

5°. Если исходная вариационная проблема (1) со ступенчатым управлением не поддается аналитическому решению, то возникает вопрос о выборе численного метода решения краевой задачи. Помимо удовлетворения краевых условий на фазовые координаты, описанный выше способ требует удовлетворения условий выбора оптимальных параметров, которые представимы либо в форме интегралов (8), либо в форме дифференциальных уравнений (7) с нулевыми краевыми условиями для импульсов. Один из возможных методов решения этой краевой задачи — сведение к задаче Коши и подбор недостающих начальных условий, организованный по какому-либо методу решения алгебраических уравнений, например методу Ньютона.

Заметим, что в этом случае можно с равным успехом пользоваться численным подходом, указанным в 4°.

Поступила 13 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой. Инж. ж., 1963, № 3, 4; 1964, № 1, 2.
2. Иванов Ю. Н. Оптимальное изменение мощности при движении тела переменной массы в гравитационном поле. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
3. Токарев В. В. Оптимальное управление источником мощности при движении тела переменной массы в гравитационном поле с активным сбросом мощности. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 4.
4. Иванов Ю. Н. О движении тела переменной массы с ограниченной мощностью и заданным активным временем. ПММ, 1963, т. XVII, вып. 5.
5. Иванов Ю. Н. Оптимальное сочетание двигательных систем. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 2.
6. Иванов Ю. Н. Дополнительные весовые компоненты в задачах оптимизации движение с ограниченной мощностью. ПММ, 1964, т. XXVIII, вып. 1.