ТЕОРЕМЫ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Е. А. Барбашин, В. А. Табуева

(Свердловск)

Рассматривается один метод стабилизации нелинейных систем регулирования третьего порядка. Свойство устойчивости достигается путем увеличения некоторых параметров системы. Так же, как и в статье [1], точки фазового пространства переводятся сначала на некоторую поверхность, а затем в скользящем режиме совершают движение по этой поверхности к началу координат. Однако, в отличие от статьи [1], введение дополнительных изменяемых параметров позволяет обеспечить для любого движения скользящий режим на всем протяжении времени, начиная с некоторого момента, что и дает возможность получить свойство асимптотической устойчивости нулевого решения.

Коррекция линейной системы при помощи многих изменяемых параметров изучалась ранее [2], однако в этой статье получены только условия скольжения, а вопросы устойчивости не рассмотрены. Заметим, что в линейном случае для системы третьего порядка возможность достижения свойства асимптотической устойчивости была установлена на базе идей статьи [1] В. П. Барановским.

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^{\cdot\cdot\cdot} + F(x, x^{\cdot}, x^{\cdot\cdot}, t) + (K|x| + K_1|x^{\cdot}|)\operatorname{sign}(x^{\cdot\cdot} - \varphi(x, x^{\cdot})) = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь K, K_1 — положительные параметры, $F(x, x^{\cdot}, x^{\cdot\cdot}, t)$, $\varphi(x, x^{\cdot})$ — непрерывные функции своих аргументов при всех значениях x, $x^{\cdot}$, $x^{\cdot\cdot}$ и $t \geqslant 0$.

Уравнение (1) эквивалентно системе

$$x^{\cdot} = y, \quad y^{\cdot} = z, \quad z^{\cdot} = -F(x, y, z, t) - (K|x| + K_1|y|)\operatorname{sign}(z - \varphi(x, y)) \qquad (1.2)$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

(а) $|F(x, y, z, t)| \leqslant a|x| + b|y| + c|z|$ для любых значений $x, y, z, t \geqslant 0$. Здесь a, b, c — неотрицательные постоянные.

(б) Функция $\varphi(x, y)$ всюду определена и непрерывно дифференцируема по x и y причем существуют такие положительные числа M и N, что

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| \leqslant M, \qquad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| \leqslant N$$

(в) $x\varphi(x, 0) < 0$ при $x \neq 0$

$$y[\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)] < 0 \quad \text{при } y \neq 0, \qquad \int\limits_{\mp\infty}^{0} \varphi(x, 0)\, dx = \infty$$

Легко видеть, что правая часть третьего уравнения системы (1.2) терпит разрыв на поверхности S, заданной уравнением $z = \varphi(x, y)$. Пусть $r(x, y, z) = z - \varphi(x, y)$. Если

$$\lim_{r\to -0} \frac{dr}{dt} > 0, \qquad \lim_{r\to +0} \frac{dr}{dt} < 0$$

где производная dr/dt берется в силу уравнений системы (1.2), то на поверхности S определяется движение, описываемое системой дифференциальных уравнений

$$x^{\cdot} = y, \; y^{\cdot} = \varphi(x, y) \qquad (1.3)$$

при этом принято говорить, что система (1.3) описывает скользящий режим.

Заметим, что условие (а) обеспечивает продолжаемость [3] (стр. 16) движений системы (1.2) по крайней мере до того момента времени, пока точка не попадет на поверхность S. Если все точки некоторой области G фазового пространства попадут при своем движении на поверхность S, а потом с ростом t будут двигаться по S к началу координат в силу системы (1.3), то получится требуемое свойство асимптотической устойчивости нулевого решения.

Теорема 1.1. Пусть функции $F(x, y, z, t)$ и $\varphi(x, y)$ удовлетворяют условиям (*а*), (*б*), (*в*), а параметр K_1 фиксирован и выбран согласно неравенству

$$K_1 \geqslant b + M + cN + N^2 \tag{1.4}$$

и пусть задана ограниченная область G фазового пространства. Можно указать такое положительное число K_0, что при $K > K_0$ нулевое решение системы (1.2) будет асимптотически устойчивым, причем область G будет лежать в области притяжения начала координат.

Доказательство. Покажем сначала, что, увеличивая K, можно получить скользящий режим на всей поверхности S. В самом деле, беря производную функции $r(x, y, z)$, в силу системы (1.2) получим

$$\frac{dr}{dt} = \Phi(x, y, r, t) - (K|x| + K_1|y|)\operatorname{sign} r \tag{1.5}$$

Здесь

$$\Phi(x, y, r, t) = -F(x, y, r + \varphi(x, y), t) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(r + \varphi(x, y))$$

Функции $F(x, y, z, t)$ и $\varphi(x, y)$ удовлетворяют соотношениям (*а*), (б), поэтому функция $\Phi(x, y, r, t)$ также удовлетворяет неравенству, аналогичному (а)

$$|\Phi(x, y, r, t)| \leqslant A|x| + B|y| + C|r|$$

где

$$A = a + cM + NM, \qquad B = b + M + cN + N^2, \qquad C = c + N$$

Вычислим предельные значения производной dr/dt при приближении изображающей точки системы (1.2) к поверхности S

$$\lim_{r\to-0}\frac{dr}{dt} = \Phi(x, y, 0, t) + K|x| + K_1|y| > (K - A)|x| + (K_1 - B)|y|$$

$$\lim_{r\to+0}\frac{dr}{dt} = \Phi(x, y, 0, t) - K|x| - K_1|y| < (A - K)|x| + (B - K_1)|y|$$

при всех значениях x и y.

Для того чтобы обеспечить режим скольжения на всей поверхности $r = z - \varphi(x, y) = 0$, достаточно, очевидно, потребовать выполнения неравенств $K \geqslant A$ и $K_1 \geqslant B$. Покажем теперь, что для любой ограниченной области G фазового пространства можно подобрать такое значение $K_0 > 0$, что при $K > K_0$ любая точка M области G, двигаясь с ростом t по траектории системы (1.2), попадает на поверхность S.

Так же, как в статье [1], проведем в системе (1.2) замену переменных

$$X = x, \qquad Y = \rho y, \qquad Z = \rho^2 z, \qquad t = \rho\tau, \qquad K^{-1/3}$$

Новая система будет иметь вид

$$\frac{dX}{d\tau} = Y, \qquad \frac{dY}{d\tau} = Z \qquad \left(R = Z - \rho^2\varphi\left(X, \frac{Y}{\rho}\right)\right) \tag{1.6}$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = -|X|\operatorname{sign} R - \rho^2 K_1|Y|\operatorname{sign} R - \rho^3 F\left(X, \frac{Y}{\rho}, \frac{Z}{\rho^2}, \rho\tau\right)$$

При большом значении K величина ρ играет роль малого параметра, поэтому упрощенная система при $\rho = 0$ запишется в виде

$$\frac{dX}{d\tau} = Y, \qquad \frac{dY}{d\tau} = Z, \qquad \frac{dZ}{d\tau} = -|X|\operatorname{sign} R \tag{1.7}$$

Из условия (б) следует ограниченность $\rho\varphi(X, Y/\rho)$ при малых ρ и ограниченных X и Y.

В статье [1] система (1.7) (там система (2.3)) исследована, причем показано, что любая точка фазового пространства, двигаясь с ростом t по траектории системы (1.7), попадает на поверхность S в конечный момент времени. Исключение составляют лишь точки фазового пространства, лежащие на интегральной прямой $X = -Y = Z$, они приближаются к началу координат асимптотически.

Из условия (а) следует ограниченность в области G величины $\rho^2F(X, \rho^{-1}Y, \rho^{-2}Z, \rho\tau)$ при малых значениях ρ. Выбирая ρ достаточно малым и используя известные соображения, вытекающие из свойства непрерывности решений по параметру, приходим к выводу, что все точки области G, за исключением достаточно узкой трубки прямой $X = -Y = Z$, двигаясь в силу системы (1.6), попадут на поверхность S за конечный промежуток времени, а точки указанной трубки либо выйдут с ростом времени из этой трубки и попадут на S, либо останутся в ней и, следовательно, тоже попадут на S за конечный или бесконечный промежуток времени.

Попав на поверхность S, изображающая точка будет двигаться по ней в силу системы (1.3). Условия (в) обеспечивают, согласно [4], асимптотическую устойчивость нулевого решения этой системы. Таким образом, показано, что любая точка области G будет асимптотически приближаться к началу координат.

Так как определение асимптотической устойчивости включает в себя требование выполнения обычного свойства устойчивости в смысле Ляпунова, то необходимо еще показать теперь, что точки достаточно малой окрестности начала координат не выйдут за пределы заданной окрестности.

С этой целью заменим в системе уравнений (1.6) координату Z новой координатой $R = Z - \rho^2\varphi(X, Y/\rho)$; новая система будет иметь вид (1.8)

$$\frac{dX}{d\tau} = Y, \qquad \frac{dY}{d\tau} = R + \rho\varphi_1(X, Y, \rho), \qquad \frac{dZ}{d\tau} = -|X|\operatorname{sign} R + \rho F_1(X, Y, Z, \rho, \tau)$$

где $\varphi_1(X, Y, \rho)$, $F_1(X, Y, Z, \rho, \tau)$ удовлетворяют также условиям типа (а), (б).

Рассматривая для определенности полупространство $R > 0$, запишем упрощенную систему в виде

$$\frac{dX}{d\tau} = Y, \qquad \frac{dY}{d\tau} = R, \qquad \frac{dR}{d\tau} = -|X| \tag{1.9}$$

Очевидно, вдоль траекторий системы (1.9) положительная величина R убывает, а Y возрастает. Покажем сначала, что для произвольной начальной точки $M_0(X_0, Y_0, R_0)$ справедлива следующая лемма:

Лемма. Точка $M(\tau)$, двигаясь по траектории системы (1.9), не может находиться в области $|X| > \delta$, $R \neq 0$ более R_0/δ единиц времени.

В самом деле, из последнего уравнения системы (1.9) имеем $R < R_0 - \delta\tau$, где τ отсчитывается от момента времени, начиная с которого выполняется неравенство $|X| \geqslant \delta$. Если $\tau_1 > R_0/\delta$, то $R(\tau_1)$ будет отрицательной величиной, чего не может быть, так как плоскость $R = 0$ является плоскостью скольжения.

Таким образом, за промежуток времени $[0, \tau_1]$ точка $M(\tau)$ либо попадет в область $|X| < \delta$, либо на плоскость $R = 0$.

Заметим, что если вдоль траектории $X < -\delta$ и $Y < 0$ или $X > \delta$ и $Y > 0$, то точка $M(\tau)$ может попасть только на плоскость $R = 0$. Отсюда следует, что эта точка может заходить в область $|X| < \delta$ не более двух раз.

Пусть теперь начальная точка M_0 лежит в области $|X_0| < \delta$, $|Y_0| < \delta$, $0 < R_0 < \delta$. Оценим координаты точки $M(\tau)$ $(X(\tau), Y(\tau), R(\tau))$, двигающейся из точки M_0 по траектории системы (1.9) вплоть до момента встречи с плоскостью $R = 0$. Покажем сначала, что имеет место неравенство

$$-\delta < Y(\tau) < 4\delta \tag{1.10}$$

Предположим, что $Y_0 > 0$. Так как $X(\tau)$, $Y(\tau)$ могут только расти, то обозначим через τ_0 момент времени, когда $X(\tau_0) = \delta$, и через τ_0' — момент времени, когда $Y(\tau_0') = \delta$. Через τ_1 обозначим момент встречи точки $M(\tau)$ с плоскостью $R = 0$.

Согласно лемме, если $\tau_1 = \infty$, то $|X(\tau)| < \delta$ для всех положительных значений τ, если при этом $\tau_0' = \infty$, то неравенство (1.10) будет иметь место. Возможны два случая. В первом случае предположим, что $\tau_0 \leqslant \tau_0'$.

Согласно (1.9) имеем $Y(\tau) - Y(\tau_0') \leqslant R_0(\tau - \tau_0')$ при $\tau \geqslant \tau_0'$, но так как согласно лемме $\tau - \tau_0' < \tau_1 - \tau_0' < 1$, то получим $Y(\tau) < 2\delta$, если $\tau_0' \leqslant \tau \leqslant \tau_1$.

Во втором случае предположим, что $\tau_0' < \tau_0$, и оценим разность $\tau_0 - \tau_0'$. Согласно (1.9) имеем

$$\delta < Y(\tau) < R_0(\tau - \tau_0') + \delta \qquad \text{при } \tau > \tau_0' \tag{1.11}$$

Левая часть этого неравенства дает оценку $\delta(\tau_0 - \tau_0') + X(\tau_0') < X(\tau_0)$, откуда следует $\tau_0 - \tau_0' < 2$. Правая часть того же неравенства (1.11) дает оценку $Y(\tau) < \delta(\tau - \tau_0 + \tau_0 - \tau_0') + \delta < 4\delta$, так как $\tau - \tau_0 < 1$ согласно лемме.

Теперь рассмотрим случай, когда $Y_0 < 0$. Если $Y(\tau)$ не меняет знак, то неравенство (1.10) выполнено. Если $Y(\tau)$ меняет знак в момент времени τ_3, то возможны снова два случая. В случае $|X(\tau_3)| < \delta$, при $\tau > \tau_3$ точка $M(\tau)$ попадает в условия, которые рассмотрены выше. Если же $X(\tau_3) < -\delta$, то точка $M(\tau)$ не может согласно лемме находиться вне полосы $|X| < \delta$ более одной единицы времени, но за это время $Y(\tau)$ может вырасти не более чем на δ, и поэтому точка $M(\tau)$ снова попадет в область $|X| < \delta$, $|Y| < \delta$, причем величина $Y(\tau)$ будет при этом уже положительной и, следовательно, будет удовлетворять оценке (1.10).

Покажем теперь, что до тех пор, пока точка $M(\tau)$ не попадет на плоскость $R = 0$, имеет место неравенство

$$-2\delta < X(\tau) < 5\delta \tag{1.12}$$

В самом деле, если точка $M(\tau)$ выйдет в область $X > \delta$, то она не вернется в полосу $|X| < \delta$ и должна попасть на плоскость $R = 0$. Но в этом случае из (1.9) следует $X(\tau) - X(\tau_0) < Y(\tau)(\tau - \tau_0)$ при $\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$.

Из леммы следует, что $\tau - \tau_0 < 1$, а из неравенства (1.10) имеем $0 < Y(\tau) < 5\delta$. Таким образом, $\delta < X(\tau) < 5\delta$.

Если же точка $M(\tau)$ выйдет в область $X < -\delta$ в момент времени τ_4, то либо она попадет на плоскость $R = 0$, не возвращаясь в полосу $|X| < \delta$, либо вернется в эту полосу. В первом случае получим $-\delta(\tau - \tau_4) < X(\tau) - X(\tau_4)$, откуда следует $X(\tau) > -2\delta$. Во втором случае точка $M(\tau)$ возвратится в область $|X| < \delta$, $|Y| < \delta$, и будет иметь место уже рассмотренная ситуация. Заметим, что минимальное значение $X(\tau_3)$ во втором случае удовлетворяет неравенству $X(\tau_3) > -2\delta$. Неравенства (1.10), (1.12) вместе с неравенством $|R(\tau)| < \delta$ доказывают асимптотическую устойчивость только упрощенной системы. Из проведенных выше рассуждений следует, что точка $M(\tau)$ может находиться вне области $|X| < \delta$, $|Y| < \delta$ не более трех единиц времени. Воспользовавшись известными оценками отклонения решений [5], можно показать, что для траекторий системы (1.8), начинающихся на границе указанной области, имеют место те же оценки с точностью до малых порядка $\rho\delta$.

Так как динамическая система на плоскости $R = 0$ уже обладает свойством асимптотической устойчивости, и все решения по доказанному ранее обладают свойством $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$, $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1.2) теперь является очевидной.

Примечание 1.1. Пусть $x_0 > 0$, $y_0 \geqslant 0$, $z_0 \geqslant \varphi(x_0, y_0)$. Пользуясь результатом леммы, нетрудно получить для системы (1.2) оценку времени попадания T точки $M(x_0, y_0, z_0)$ на поверхность скольжения S. Эта оценка имеет вид

$$T \leqslant \frac{z_0 - \varphi(x_0, y_0)}{Kx_0}(1 + O(\rho))$$

где через $O(\rho)$ обозначена величина порядка малости ρ.

Если x_0, y_0, z_0 — числа произвольного знака, то общее время пребывания изображающей точки в области $|X| > \delta$, $z \neq \varphi(x, y)$ не превосходит величины

$$T_1 = 3\,\frac{|z_0 - \varphi(x_0, y_0)|}{K\delta}(1 + O(\rho))$$

Примечание 1.2. Методика получения неравенств (1.10), (1.12) позволяет заменить требование выполнения условий (а), (б), (в) во всем фазовом пространстве требованием их выполнения в некоторой ограниченной области G_1. Предложенная методика может быть применена для оценки области G_1.

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^{\cdot\cdot\cdot} + F(x, x^{\cdot}, x^{\cdot\cdot}) + (K|x| + K_1|x^{\cdot}| + K_2|x^{\cdot\cdot}|\, \text{sign}\,(x^{\cdot\cdot} - \varphi(x, x^{\cdot})) = 0 \tag{2.1}$$

где функции $F(x, x^{\cdot}, x^{\cdot\cdot})$, $\varphi(x, x^{\cdot})$ удовлетворяют снова условиям (а), (б), (в). В отличие от предыдущего случая полагаем, однако, функцию $F(x, x^{\cdot}, x^{\cdot\cdot})$ не зависящей явно от t.

Уравнение (2.1) эквивалентно системе (2.2)

$$x^{\cdot} = y,\ y^{\cdot} = z,\ z^{\cdot} = -F(x, y, z) - (K|x| + K_1|y| + K_2|z|)\,\text{sign}\,(z - \varphi(x, y))$$

Теорема 2.1. Если функции $F(x, y, z)$ и $\varphi(x, y)$ удовлетворяют условиям (а), (б), (в), а параметры K, K_1, K_2 выбраны согласно неравенствам

$$K \geqslant a, \qquad K_1 \geqslant b + M + 1, \qquad K_2 \geqslant c + N \tag{2.3}$$

то нулевое решение системы (2.2) будет асимптотически устойчивым в целом.

Доказательство. Введем новую координату $r = z - \varphi(x, y)$ в новых координатах x, y, r система (2.2) примет вид

$$x^{\cdot} = y \qquad y^{\cdot} = r + \varphi(x, y) \tag{2.4}$$

$$r^{\cdot} = -F(x, y, r + \varphi(x, y)) - \frac{\partial\varphi}{\partial x} y - \frac{\partial\psi}{\partial y}(r + \varphi(x, y)) -$$
$$- (K|x| + K_1|y| + K_2|r + \varphi(x, y)|)\,\text{sign}\, r$$

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$v = r^2 + y^2 - 2\int_0^x \varphi(x, 0)\,dx \tag{2.5}$$

Из условия (в) следует, что функция v будет определенно положительной и бесконечно большой [6].

Вычислив производную функции v в силу системы (2.4), получим

$$\frac{dv}{dt} = 2y\,[\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)] - 2|r|\,[K|x| + K_1|y| + K_2|r + \varphi(x, y)|] +$$
$$+ 2r\left[-F(x, y, r + \varphi(x, y)) - \frac{\partial\varphi}{\partial x} y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(r + \varphi(x, y)) + y\right]$$

Принимая во внимание условия (а), (б), получим

$$\frac{dv}{dt} \leqslant 2y\,[\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)] -$$
$$- 2|r|\,[(K - a)|x| + (K_1 - b - M - 1)|y| + (K_2 - c - N)|r + \varphi(x, y)|]$$

Так как по условиям теоремы выполняются соотношения (b) и (2.3), то из последнего неравенства следует, что производная функции v, взятая в силу системы (2.4), будет знакоотрицательной функцией, обращающейся в нуль на оси x. Очевидно, на оси x нет целых траекторий системы (1.2), за исключением особой точки $O(0,0,0)$; кроме того, функция v является бесконечно большой. Таким образом, можно применить теперь теорему 4 статьи [6], что и заканчивает доказательство нашей теоремы.

Что касается соображений относительно качественного расположения траекторий системы (12), то легко видеть, что поверхность $z = \varphi(x, y)$ будет поверхностью скольжения во всех ее точках. Это проверяется вычислениями, подобными тем, которые проведены в доказательстве теоремы 1. Поэтому изображающая точка системы (2.2) при $t \to \infty$ либо непосредственно приближается асимптотически к началу координат, либо попадает предварительно через конечное время на поверхность скольжения, а затем, двигаясь по ней, также асимптотически приближается к началу координат.

Поступила 26 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Барбашин Е. А., Табуева В. А. Теорема об устойчивости решения одного дифференциального уравнения третьего порядка с разрывной характеристикой. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
2. Емельянов С. В., Уткин В. И. Применение систем автоматического регулирования с переменной структурой для управления объектами, параметры которых изменяются в широких пределах. Докл. АН СССР, 1963, т. 152, № 2.
3. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехтеоретиздат, 1949.
4. Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях. ПММ, 1954, т. 18, вып. 1.
5. Барбашин Е. А., Скалкина М. А. К вопросу об устойчивости по первому приближению. ПММ, 1955, т. 19, вып. 5.
6. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. Докл. АН СССР, 1952, т. 86, № 3.

СТУПЕНЧАТАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Ю. Н. Иванов

(Москва)

Рассматривается задача о нахождении простого оптимального закона управления. Простым считается такой закон управления, который состоит в смене положений регулятора конечное заданное число раз. Указывается алгоритм выбора оптимальных положений регулятора и оптимальных моментов переключения с одного положения на другое. Приводятся примеры из области оптимального движения тела переменной массы с постоянной затратой мощности.

Реализация оптимальных законов для управляющих функций всегда связана с трудностями технического характера, если только эти законы не являются простыми, например постоянная или кусочно-постоянная функция времени.

Ниже рассматривается задача о наилучшей аппроксимации сложного закона управления простым, а именно, о замене сложной непрерывной управляющей функции кусочно-постоянной с заданным числом уровней (ступенек). При этом регулятор вместо бесконечного числа положений имеет заданное число оптимальных положений, смена которых производится в оптимальные моменты времени.

С отысканием такого рода простых оптимальных законов управления приходится сталкиваться, например, в задачах оптимизации движения тела переменной массы с ограниченной мощностью (см., например, [1]). Известно, что при отсутствии ограничений на реактивную тягу оптимальный закон изменения последней представляет собой непрерывную функцию времени; реализация такого закона затруднительна. С другой стороны, если заранее задаться условием постоянства модуля тяги вдоль траектории (с оптимальным выключением или без него), то такой закон хотя и прост, но дает большой проигрыш в функционале — полезной нагрузке. Простой будет такая регулировка двигателя, когда число положений регулятора конечное и заданное, т. е. двигатель обеспечивает заданное число уровней тяги. Возникает задача об оптимальном выборе этих уровней и об оптимальных моментах смены уровней.

В литературе известны примеры решения частных задач ступенчатой аппроксимации управлений [2-3].

В работе [2] оптимальное ступенчатое изменение веса источника мощности просто определяется из-за специального вида функционала задачи, а также вследствие ограничения сверху на производную от веса источника мощности. Аналогичная ситуация имеет место и в случае, исследованном в [3].

Пусть динамическая система описывается дифференциальными уравнениями и краевыми условиями

$$x_i^{\cdot} = f_i(x_j, u_k, t), \qquad x_i(0) = x_i^{(0)}, \qquad x_l(T) = x_l^{(1)} \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n$$
$$l = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m) \qquad (1)$$