ОБ ОДНОМ ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПА КОВАЛЕВСКОЙ

Ю. А. Архангельский (Москва)

В работе [1] с помощью метода малого параметра были найдены первые члены разложения в ряды периодических решений уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, приведенного в быстрое вращение относительно оси z. Исследование соответствующего движения этого твердого тела существенным образом зависело от постоянной слагающей скорости прецессии, исчезающей при взятом приближении, например, в случае

$$z_0 = 0, \quad (A - C)(B - C) / AB = {}^1/_4 \tag{0.1}$$

Ниже вычисляется постоянная слагающая скорости прецессии для гироскопа Ковалевской в случае Бобылева — Стеклова (решение исходной системы уравнений движения — периодическое и условие $A = B = 2C$, $y_0 = z_0 = 0$ удовлетворяет соотношению (0.1)) и исследуется получаемое движение.

1. Как известно [2], уравнениям движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской

$$\begin{gathered}2dp / dt = qr, \quad 2dq / dt = -pr - \varepsilon c^2\gamma'', \quad dr / dt = \varepsilon c^2\gamma', \quad c^2 = Mg\,|x_0|\,C^{-1} \\ d\gamma / dt = r\gamma' - q\gamma'', \quad d\gamma' / dt = p\gamma'' - r\gamma, \quad d\gamma'' / dt = q\gamma - p\gamma', \quad \varepsilon = \operatorname{sign} x_0\end{gathered} \tag{1.1}$$

удовлетворяет частное решение

$$p = p_0, \qquad q = 0, \qquad r = -\varepsilon c^2 p_0^{-1}\gamma''$$

и система (1.1) имеет дополнительно два первых интеграла

$$\gamma - {}^1/_2\varepsilon c^2 p_0^{-2}\gamma''^2 = \gamma_0 - {}^1/_2\varepsilon c^2 p_0^{-2}\gamma_0''^2, \qquad \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

Здесь $p_0, q_0, r_0, \gamma_0, \gamma_0', \gamma_0''$ обозначают начальные значения переменных.

Предположим, что в начальный момент времени ось симметрии эллипсоида инерции z наклонена к вертикали под некоторым углом θ_0 и вокруг этой оси телу сообщена большая угловая скорость r_0. Не нарушая общности, в качестве подвижной системы координат выберем систему, у которой положительные направления осей z и x в начальный момент времени не составляют тупого угла с направлением силы тяжести. Тогда в этой системе координат величины r_0 и x_0 могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, а начальные значения γ_0 и γ_0'' будут удовлетворять условиям $\gamma_0 \geqslant 0$, $\gamma_0'' \geqslant 0$.

Ввиду автономности системы (1.1) будем предполагать, что $\gamma_0' = 0$.

При сделанных предположениях и при условии

$$0 < \gamma_0'' < 1 \tag{1.2}$$

(случаи $\gamma_0'' = 0$ и $\gamma_0'' = 1$ рассмотрены ниже) решение уравнений (1.1) получим в виде

$$\begin{gathered}p = -\varepsilon c\mu, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{r_0 h_1}{\gamma_0''}\,\mathrm{dn}\,u, \qquad \gamma = \sqrt{1 - \gamma_0''^2} + \frac{\varepsilon\,(h_1^2 \mathrm{dn}^2 u - \gamma_0''^2)}{2\mu^2}, \\ \gamma' = \frac{k^2 h_1^2}{2\mu^2}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u, \qquad \gamma'' = h_1\,\mathrm{dn}\,u\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$u = -\frac{h_1\tau}{2} + u_0, \qquad \tau = \frac{\varepsilon r_0 t}{\gamma_0''}, \qquad k^2 = 1 - \frac{h_2^2}{h_1^2}, \qquad \mu = \frac{c\gamma_0''}{r_0}$$

$$h_j^2 = \gamma_0''^2 - 2\varepsilon\mu^2\sqrt{1 - \gamma_0''^2} - 2\mu^4 - (-1)^j\, 2\mu^2\,[1 - \gamma_0''^2 + 2\varepsilon\mu^2\sqrt{1 - \gamma_0''^2} + \mu^4] \qquad (j = 1, 2)$$

Здесь μ — малый параметр. Отметим зависимость

$$\begin{gathered}k^2 = 4\mu^2\,\frac{\sqrt{1 - \gamma_0''^2} + \varepsilon\mu^2}{h_1^2} + \mu^6\,(\ldots) \\ h_1 = \gamma_0''\left[1 - \frac{k^2(\varepsilon - 1)}{4}\right] + k^4\,(\ldots), \qquad u_0 = \frac{\pi\,(1 - \varepsilon)}{4} + k^2\,(\ldots)\end{gathered} \tag{1.4}$$

2. Для анализа движения гироскопа Ковалевской введем углы Эйлера θ, φ, ψ

$$\cos\theta = \gamma'', \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{p\gamma + q\gamma'}{1 - \gamma''^2}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = r - \frac{d\psi}{dt}\cos\theta \qquad \left(\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0'}\right) \qquad (2.1)$$

Из первой формулы (2.1) и соотношений (1.3), (1.4) получим

$$\cos\theta = \gamma_0''\left[1 + \mu^2\frac{\varepsilon\sqrt{1-\gamma_0''^2}}{\gamma_0''^2}(\cos r_0 t - 1)\right] + \mu^4(\ldots) \qquad (2.2)$$

Выражение для угла прецессии примет вид [3]

$$\psi - \psi_0 = -\frac{\varepsilon\mu^2\sin r_0 t}{\gamma_0''\sqrt{1-\gamma_0''^2}} + \frac{\mu^3 cN(m_0)}{2\gamma_0''^2}t + \ldots \qquad (2.3)$$

$$N(m_0) = \frac{m_0 + {}^1/_2}{4m_0(m_0+1)} + \frac{3}{2} + m_0(3 - 2\varepsilon), \qquad m_0 = \frac{\gamma_0''^2}{1-\gamma_0''^2}$$

Отметим на основании (1.2), что $N(m_0) > 0$; отсюда следует, что постоянная слагающая скорости прецессии при достаточно малом μ никогда в нуль не обращается.

Из последних двух формул (2.1) для угла собственного вращения имеем

$$\varphi - {}^1/_2\pi = \left(r_0 - \frac{Mgx_0}{Cr_0}\sqrt{1-\gamma_0''^2}\right)t + \mu^2(\ldots) \qquad (2.4)$$

К трем произвольным постоянным $\cos\theta_0 = \gamma_0''$, ψ_0, r_0 (r_0 — велико), которые входят в эти формулы, при помощи замены t на $t + h$ можно добавить [1] четвертую произвольную постоянную φ_0, связанную с h на основании (2.4) зависимостью

$$\varphi_0 = {}^1/_2\pi + r_0 h + \mu(\ldots)$$

Сравнивая полученные приближенные выражения для углов Эйлера с аналогичными выражениями работы [1], убеждаемся, что они совпадают, за исключением постоянной скорости прецессии, порядок малости которой μ^3 выше учитываемого в упомянутой работе. Поэтому центр сферического прямоугольника, в который вписан эллипс, являющийся в первом приближении траекторией оси симметрии гироскопа на неподвижной единичной сфере [1], будет перемещаться вдоль соответствующей параллели. Скорость перемещения будет равна постоянной слагающей скорости прецессии.

Собственное вращение гироскопа Ковалевской, как это следует из формулы (2.4), будет мало отличаться от равномерного вращения с большой угловой скоростью r_0.

3. Рассмотрим движение гироскопа Ковалевской при $\gamma_0'' = 0$ и $\gamma_0'' = 1$.

При $\gamma_0'' = 0$ ($r_0 \neq 0$) получаем соотношения $p_0 = 0$, $\gamma'' = 0$, которые приводят к случаю физического маятника.

Для исследования случая $\gamma_0'' = 1$ выберем подвижную ось координат x так, чтобы $x_0 > 0$. Тогда, полагая $\gamma_0 = \gamma_0' = u_0 = 0$, $\gamma_0'' = \varepsilon = h_1 = 1$, $k = 2\mu^2$, $u = {}^1/_2 r_0 t$, по формулам п. 1 и 2, ограничиваясь первыми членами разложения в ряды по степеням μ и опуская несущественные для дальнейшего произвольные постоянные, имеем

$$\cos\theta = 1 - 2\mu^4\sin^2({}^1/_2 r_0 t) + \ldots, \qquad \psi = {}^1/_2 r_0 t, \qquad \varphi = {}^1/_2 r_0 t + \ldots \qquad (3.1)$$

Опишем вокруг неподвижной точки неподвижную сферу единичного радиуса и рассмотрим на этой сфере окружность радиуса a ($a = \sqrt{2}\mu^2$) с центром в точке пересечения сферы с направленной вниз вертикалью. Тогда траекторией оси симметрии гироскопа в этом случае будет кривая $\theta = a\sin\psi$, состоящая из двух касающихся одна другой окружностей радиуса ${}^1/_2 a$. Описывая эту синусоидальную спираль, ось симметрии будет совершать в первом приближении периодическое движение с периодом $T = 4\pi / r_0$. Собственное вращение тела, как это следует из последней формулы (3.1), будет мало отличаться от равномерного с большой угловой скоростью ${}^1/_2 r_0$.

Поступила 20 IX 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский Ю. А. О движении приведенного в быстрое вращение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 5.
2. Аппельрот Г. Г. Не вполне симметричные тяжелые гироскопы. Сб. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Изд. АН СССР, 1940.
3. Архангельский Ю. А. Об одном движении уравновешенного гироскопа в ньютоновском поле сил. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 6.