ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛАХ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА, ЗАКРЕПЛЕННОГО В ОДНОЙ ТОЧКЕ

И. А. Кейс (Москва)

1. Уравнения движения тяжелого гиростата, закрепленного в одной точке, имеют, как известно [1], вид

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr+m_3r-m_2r=y_0'\gamma_3-z_0'\gamma_2,\quad \frac{d\gamma_1}{dt}=r\gamma_2-q\gamma_3\qquad (x_0'=Mgx_0)\qquad (11)$$

$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,pr+m_1r-m_3p=z_0'\gamma_1-x_1'\gamma_3,\qquad \frac{d\gamma_2}{dt}=p\gamma_3-r\gamma_1$$

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq+m_2p-m_1q=\varkappa_0'\gamma_2-y_0'\gamma_1,\qquad \frac{d\gamma_3}{dt}=q\gamma_1-p\gamma_2$$

Система (1.1) не содержит явно времени, имеет последний множитель Якоби, равный единице и допускает алгебраические интегралы

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2-2\,(x_0'\gamma_1+y_0'\gamma_2+z_0'\gamma_3)=h_1$$

$$(Ap+m_1)\,\gamma_1+(Bq+m_2)\,\gamma_2+(Cr+m_3)\,\gamma_3=h_2,\qquad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1\qquad (1.2)$$

Как показано в [1,2], система уравнений (1.1) сводится к квадратурам при $x_0'=y_0'=z_0'=0$, когда она допускает четвертый алгебраический интеграл

$$(Ap+m_1)^2+(Bq+m_2)^2+(Cr+m_3)^2=L^2$$

и в случае $A=B$, $x_0'=y_0'=0$, $m_1=m_2=0$, когда она имеет интеграл $r=r_0$.

Подставим задачу об изыскании общих условий существования новых алгебраических интегралов системы (1.1), не зависящих от классических интегралов (1.2).

2. В начале покажем, что имеет место теорема Пуанкаре [3–5] для существования нового алгебраического интеграла необходимо, чтобы эллипсоид инерции относительно неподвижной точки был эллипсоидом вращения. Заменим

$$p,\ q,\ r,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3 t \quad \text{на}\quad \lambda^{-2}p,\ \lambda^{-2}q,\ \lambda^{-2}r,\ \lambda^{-4}\gamma_1,\ \lambda^{-4}\gamma_2,\ \lambda^{-4}\gamma_3,\ \lambda^2t+t_0$$

где λ — некоторый произвольный параметр и введем новые переменные

$$y_1=\sqrt{A\,(A-C)}\,p+i\sqrt{B\,(B-C)}\,q,\quad y_2=\sqrt{A\,(A-C)}\,p-i\sqrt{B\,(B-C)}\,q$$

$$z_1=\gamma_1+i\gamma_2,\quad z_2=\gamma_1-i\gamma_2$$

Заменим, как сделано в [4,5]

$$y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2,\ \gamma_3,\ t\quad \text{на}\quad \lambda y_1,\ y_2,\ r,\ \lambda z_1,\ \lambda z_2,\ \lambda\gamma_3,\ -it$$

Используя интегралы (1.2) для уравнений (1.1) в новых переменных, можно доказать, следуя [5], теорему Пуанкаре: если эллипсоид инерции не есть эллипсоид вращения, то при произвольных начальных условиях, кроме случая $x_0'=y_0'=z_0'=0$, не может быть нового алгебраического интеграла системы (1.1).

3. Докажем, что при $x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2\neq 0$ и $m_1^2+m_2^2+m'^2\neq 0$ четвертый алгебраический интеграл возможен лишь в случае гиростатического аналога случая Лагранжа [2], определяемого условиями: $A=Bx_0'=y_0'=0$, $m_1=m_2=0$

$$p,\ q,\ r,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ t\quad \text{на}\quad \lambda^{-5}p,\ \lambda^{-5}q,\ \lambda^{-5}r,\ \lambda^{-10}\gamma_1,\ \lambda^{-10}\gamma_2,\ \lambda^{-10}\gamma_3,\ \lambda^5it+t_0$$

и введем в уравнение (1.1) переменные

$$y_1=p+iq,\quad y_2=p-iq,\quad z_1=\gamma_1+i\gamma_2,\quad z_2=\gamma_1-i\gamma_2$$

$$m_1'=m_1+im_2,\quad m_2'=m_1-im_2$$

Положим, согласно теореме Пуанкаре $A=B$; тогда при соответствующем выборе системы координат получим $y_0'=0$. Система (1.1) перейдет в систему

$$A\frac{dy_1}{dt}=(C-A)\,ry_1+z_0'z_1-x_0'\gamma_3+\lambda^5\,(m_3y_1-m_1'r),\quad \frac{dz_1}{dt}=y_1\gamma_3-rz_1$$

$$A\frac{dy}{dt}=(A-C)\,ry_2-z_0'z_2+x_0'\gamma_3+\lambda^5\,(m_2'r-m_3y_2),\qquad \frac{dz_2}{dt^2}=rz_2-y_2\gamma_3\qquad (3.1)$$

$$2C\frac{dr}{dt}=x_0'\,(z_2-z_1)+\lambda^5\,(m_2'y_1-m_1'y_2),\qquad 2\frac{d\gamma}{dt^3}=y_2z_1-y_1z_2$$

Для системы (3.1) имеют место следующие первые интегралы:

$$Ay_1y_2 + Cr^2 - x_0'(z_1 + z_2) - 2z_0'\gamma_3 = h_1 \tag{3.2}$$
$$A(y_1z_2 + z_1y_2) + 2Cr\gamma_3 + \lambda^5(m_1'z_2 + m_2'z_1 + 2m_3\gamma_3) = h_2,\quad z_1z_2 + \gamma_3^2 = h_3$$

Если снова ввести произвольный параметр при помощи замены

$$y_1,\ y_2,\ r,\ z_1,\ z_2,\ \gamma_3,\ t \text{ на } \lambda^2y_1,\ \lambda y_2,\ \lambda r,\ \lambda^3z_1,\ \lambda^2z_2,\ \lambda^3\gamma_3,\ \lambda^{-1}t + t_0$$

то система (3.1) и ее первые интегралы (3.2) приобретут вид

$$A\frac{dy_1}{dt} = -(A-C)ry_1 + z_0'z_1 - x_0'\gamma_3 - \lambda^3(m_1'r - \lambda m_3y_1),\qquad \frac{dz_1}{dt} = -rz_1 + \lambda y_1\gamma_3$$
$$A\frac{dy_2}{dt} = (A-C)ry_2 - z_0'z_2 + \lambda x_0'\gamma_3 + \lambda^4(m_2'r - m_3y_2),\qquad \frac{dz_2}{dt} = rz_2 - \lambda y_2\gamma_3$$
$$2C\frac{dr}{dt} = x_0'(z_2 - \lambda z_1) - \lambda^4(m_1'y_2 - \lambda m_2'y_1),\qquad 2\frac{d\gamma_3}{dt} = y_2z_1 - y_1z_2 \tag{3.3}$$
$$Cr^2 - x_0'z_2 + \lambda(Ay_1y_2 - x_0'z_1 - 2z_0'\gamma_3) = h_1$$
$$A(y_1z_2 + z_1y_2) + 2Cr\gamma_3 + \lambda^3(m_1'z_2 + \lambda m_2'z_1 + 2\lambda m_3\gamma_3) = h_2,\quad z_1z_2 + \lambda^2\gamma_3^2 = h_3 \tag{3.4}$$

Гюссон показал, что при $m_1' = m_2' = m_3 = 0$ четвертый алгебраический интеграл существует в случаях Лагранжа ($A = B$, $x_0' = y_0' = 0$) и Ковалевской ($A = B = 2C$, $y_0' = z_0' = 0$), причем для доказательства использовались первые три члена разложения в ряды общего интеграла полученной системы уравнений по степеням параметра λ, который полагался малым. При этом учитывалось, что правые части полученной системы уравнений и ее первые интегралы — полиномы от y_1, y_2, r, z_1, z_2, $\gamma_3\lambda$. Можно заметить, что первые три члена разложений в ряды по степеням λ общего интеграла системы (3.3) и интегралы (3.4) являются полиномами от y_1, y_2, r, z_1, z_2, γ_3, λ и не зависят от m_1', m_2', m_3. Поэтому результат Гюссона следует рассматривать как одно из необходимых условий существования нового четвертого алгебраического интеграла системы (1.1). Таким образом, задача сводится к разысканию новых дополнительных условий к тем, которые имеют место для случаев Ковалевской и Лагранжа.

4. Найдем эти условия для случая Ковалевской. Положим

$$A = B = 2C_1y_0' = z_0' = 0,\ c = x_0C^{-1},\ \mu_i = m_i'C^{-1}\ (i = 1,\ 2)\ m_3' = m_3C^{-1}$$

и заменив в (1.1) величины

$$p,\ q,\ r,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ t \text{ на } \lambda^{-1/2}p,\ \lambda^{-1/2}q,\ \lambda^{-1/2}r,\ \lambda^{-1}\gamma_1,\ \lambda^{-1}\gamma_2,\ \lambda^{-1}\gamma_3,\ \lambda^{1/2}t + t_0$$

введем

$$y_1 = p + qi,\ y_2 = p - qi,\ z_1 = \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_1 - i\gamma_2,\ m_1' = m_1 + im_2,\ m_2 = m_1 - im_2$$

Заменой

$$y_1,\ y_2,\ r,\ z_1,\ z_2,\ \gamma_3,\ t \text{ на } \lambda^{1/2}y_1,\ \lambda^{-1/2}y_2,\ \lambda^{-1/2}r,\ z_1,\ \lambda^{-1}z_2,\ \gamma_3;\ i\lambda^{1/2}t + t_0$$

указанной в [6], получим вместо (1.1) систему уравнений

$$2\frac{dy_1}{dt} = -ry_1 - c\gamma_3 + \lambda m_3'y_1 - \mu_1r,\qquad \frac{dz_1}{dt} = -rz_1 + \lambda y_1\gamma_3$$
$$2\frac{dy_2}{dt} = ry_2 + \lambda c\gamma_3 - \lambda m_3'y_2 + \lambda\mu_2r,\qquad \frac{dz_2}{dt} = rz_2 - \lambda y_2\gamma_3 \tag{4.1}$$
$$2\frac{dr}{dt} = c(z_2 - \lambda z_1) + \lambda^2\mu_2y_1 - \lambda\mu_1y_2,\qquad 2\frac{d\gamma_3}{dt} = y_2z_1 - y_1z_2$$

Для системы (4.1) существуют следующие первые алгебраические интегралы:

$$r^2 - cz_2 + \lambda(2y_1y_2 - cz_1) = h_1 \tag{4.2}$$
$$2y_1z_2 + 2zy_2 + 2r\gamma_3 + \mu_1z_2 + \lambda(\mu_2z_1 + 2m_3'\gamma_3) = h_2,\qquad z_1z_2 + \lambda\gamma_3^2 = h_3$$

Если (4.1) имеет четвертый алгебраический интеграл, то согласно [4]система

$$\frac{dy_2}{dr} = \frac{ry_2 + \lambda c\gamma_3 - \lambda m'_3y_3 + \lambda\mu_2r}{c(z_2 - \lambda z_1) - \lambda\mu_1y_2 + \lambda^2\mu_2y_1},\qquad \frac{d\gamma_3}{dr} = \frac{y_2z_1 - y_1z_2}{c(z_2 - \lambda z_1) - \lambda\mu_1y_2 + \lambda^2\mu_2y_1} \tag{4.3}$$

в которой y_1, z_1, z_2 выражены как функции $y_2, r, \gamma_3, h_1, h_2, h_3$ из (4.2), имеет алгебраический интеграл $F(y_2, \gamma_3, r, h_1, h_2, h_3) = \text{const}$. Этот интеграл разлагается в ряд по степеням $\lambda^{1/n}$ в окрестности $\lambda = 0$ (n — целое):

$$F_0(y_2, \gamma_3, r) + \lambda^{1/n} F_1(y_2, \gamma_3, r) + \ldots + \lambda F_n(y_2, \gamma_3, r) + \ldots = \text{const} \tag{4.4}$$

с коэффициентами, являющимися алгебраическими функциями своих аргументов. Величина F_0 обязательно зависит хотя бы от одной из величин y_1 или γ_3. При λ достаточно малом общее решение системы можно разложить в ряды [5] по целым степеням

$$y_1 = y_1^{(0)} + \lambda y_1^{(1)} + \ldots, \qquad y_2 = y_2^{(0)} + \lambda y_2^{(1)} + \ldots, \qquad \gamma_3 = \gamma_3^{(0)} + \lambda\gamma_3^{(1)} + \ldots$$

$$z_1 = z_1^{(0)} + \lambda z_1^{(1)} + \ldots, \qquad z_2 = z_2^{(0)} + \lambda z_2^{(1)} + \ldots$$

Подстановка этого разложения в интеграл (4.4) дает

$$F_0(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r) + \lambda^{1/n} F_1(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r) + \ldots$$

$$\ldots + \lambda\left[F_n + y_2^{(1)}\frac{\partial F_0}{\partial y_2^{(0)}} + \gamma_3^{(1)}\frac{\partial F_0}{\partial \gamma_3^{(0)}}\right] + \ldots + \lambda^2(\;) + \ldots = \text{const}$$

Как показано в [4,5], это соотношение позволяет представить первые интегралы, которыми должна обладать система вида

$$\frac{dy_2^{(0)}}{dr} = \frac{1}{cz_2^{(0)}} ry_2^{(0)}, \qquad \frac{d\gamma_3^{(0)}}{dr} = \frac{1}{cz_2^{(0)}}[y_2^{(0)}z_1^{(0)} - y_1^{(0)}z_2^{(0)}] \tag{4.5}$$

$$\frac{dy_2^{(1)}}{dr} = \frac{1}{cz_2^{(0)}}\left[ry_2^{(1)} + c\gamma_3^{(0)} - m_3' y_2^{(0)} + \mu_2 r - \frac{1}{cz_2^{(0)}}[c(z_2^{(1)} - z_1^{(0)}) - \mu_1 y_2^{(0)}] ry_2^{(0)}\right]$$

$$\frac{d\gamma_3^{(1)}}{dr} = \frac{1}{cz_2^{(0)}}\Big[y_2^{(1)}z_1^{(0)} + y_2^{(0)}z_1^{(1)} - y_1^{(0)}z_2^{(1)} - y_1^{(1)}z_2^{(0)} - \tag{4.6}$$

$$- \frac{1}{cz_2^{(0)}}[c(z_2^{(1)} - z_1^{(0)}) - \mu_1 y_2^{(0)}]\;(y_2^{(0)}z_1^{(0)} - y_1^{(0)}z_2^{(0)})\Big]$$

следующим образом:

$$F_0(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r) = \text{const} \tag{4.7}$$

$$F_n(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r) + y_2^{(1)}\frac{\partial F_0}{\partial y_2^{(0)}} + \gamma_3^{(1)}\frac{\partial F_0}{\partial \gamma^{(0)}} = \text{const} \tag{4.8}$$

Рассмотрим частное решение системы (4.3), полагая

$$h_1 = a^2, \qquad h_2 = \lambda^2, \qquad h_3 = \lambda^2$$

Тогда из (4.2) находим

$$r^2 - cz_2 = a^2, \qquad 2y_1^{(0)}z_2^{(0)} + 2z_1^{(0)}y_2^{(0)} + 2r\gamma_3^{(0)} + \mu_1 z_2^{(0)} = 0, \qquad z_1^{(0)}z_2^{(0)} = 0$$

Отсюда следует, что

$$z_2^{(0)} = \frac{r^2 - a^2}{c}, \quad z_1^{(0)} = 0, \qquad y_1^{(0)} = -\frac{cr}{r^2 - a^2}\gamma_3^{(0)} - \frac{\mu_1}{2}$$

Тогда из (4.5) для определения $y_2^{(0)}$, $\gamma_3^{(0)}$ имеем

$$\frac{dy_2^{(0)}}{dr^2} = \frac{r}{r^2 - a^2} y_2^{(0)}, \qquad \frac{d\gamma_3^{(0)}}{dr} = \frac{r}{r^2 - a^2}\gamma_3^{(0)} + \frac{\mu_1}{2c} \tag{4.9}$$

Уравнениям (4.9) будут удовлетворять следующие частные решения:

$$y_2^{(0)} = 0, \qquad \gamma_3^{(0)} = \frac{\mu_1}{2c}\sqrt{r^2 - a^2}\ln(r + \sqrt{r^2 - a^2}) \tag{4.10}$$

Так как соотношение (4.7) определяет алгебраическую зависимость между указанными аргументами, то остается предположить, что либо F_0 не зависит от $\gamma_3^{(0)}$, либо $\mu_1 = 0$, чтобы устранить противоречие, очевидное при рассмотрении (4.7) и (4.10).

Предположив первое, заменим в (1.1) соответственно

$$p,\ q,\ r,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ t \quad \text{на} \quad \lambda^{-1}p,\ \lambda^{-1}q,\ \lambda^{-1}r,\ \lambda^{-2}\gamma_1,\ \lambda^{-2}\gamma_2,\ \lambda^{-2}\gamma_3\ \lambda t + t_0$$

и запишем ее, сохраняя прежние обозначения и величины, заменяя

$$y_1,\ y_2,\ r,\ z_1,\ z_2,\ \gamma_3,\ t \quad \text{на} \quad \lambda y_1,\ \lambda y_2,\ r,\ \lambda^2 z_1,\ z_2,\ \lambda\gamma_3,\ \lambda^2 t + t_0$$

Аналогично предыдущему задача сводится к рассмотрению систем вида

$$\frac{dy_2}{dr} = \frac{ry_2 + \mu_2 r + c\gamma_3 - \lambda m_3' y_2}{c(z_2 - \lambda^2 z_1) - \lambda^2\mu_1 y_2 + \lambda^2\mu_2 y_1}, \qquad \frac{d\gamma_3}{dr} = \frac{-y_1 z_2 + \lambda^2 y_1 y_2}{c(z_2 - \lambda^2 z_1) - \lambda^2\mu_1 y_2 + \lambda^2\mu_2 y_1} \tag{4.11}$$

в которой y_1, z_1, z_2 необходимо заменить на функции от y_2, r, γ_3, h_1, h_2, h_3 из соотношений

$$r^2 - cz_2 - \lambda^2 cz_1 + 2\lambda^2 y_1 y_2 = h_1, \quad 2r\gamma_3 + \mu_1 z_2 + 2y_1 z_2 + 2\lambda m_3'\gamma_3 + 2\lambda^2 y_2 z_1 + \lambda^2\mu_2 z_1 = h_2$$

$$z_1 z_2 + \gamma_3^2 = h_3 \tag{4.12}$$

Рассмотрим частное решение системы (4.11), определенное следующими значениями произвольных постоянных (4.12)

$$h_1 = a^2, \quad h_2 = \lambda^2, \quad h_3 = \lambda^2 \tag{4.13}$$

Тогда, используя соотношения (4.12), (4.13), переходим от системы (4.11) к системе

$$\frac{dy_2}{dr} = \frac{ry_2^{(0)} + \mu_2 r + c\gamma_3^{(0)}}{cz_2^{(0)}}, \qquad \frac{d\gamma_3^{(0)}}{dr} = -\frac{y_1^{(0)}}{c} \tag{4.14}$$

Системе (4.14) будут удовлетворять частные решения

$$y_2^{(1)} = \mu_2\varphi(r^2 - a^2) + \frac{\mu_1}{2}\int\limits_{r_0}^{r} \frac{\ln(r + \sqrt{r^2 - a^2})}{r^2 - a^2}\,dr$$

$$\gamma_3^{(0)} = \frac{\mu_1}{2c}\sqrt{r^2 - a^2}\ln(r + \sqrt{r^2 - a^2})$$

где $\varphi(r^2 - a^2)$ — алгебраическая функция указанного аргумента.

При $\mu_1 \neq 0$ функция $F_0(y_2^{(0)}, r)$, аналогично предыдущему, не может зависеть от $y_2^{(0)}$, что противоречит свойству $F_0(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r)$, и остается предположить, следуя [4,5], что $\mu_1 = 0$ есть необходимое условие существования четвертого алгебраического интеграла рассматриваемой задачи. Если $\mu_1 = 0$, то $\mu_2 = 0$, что очевидно. Покажем, что и $m_3' = 0$. Вводя в (1.1) новые переменные, как в предыдущем случае, и заменяя

$$y_1,\ y_2,\ r,\ z_1,\ z_2,\ \gamma_3,\ t, \quad \text{на} \quad \lambda y_1,\ y_2,\ r,\ \lambda z_1,\ z_2,\ \lambda\gamma_3,\ \lambda t + t_0$$

сведем задачу к рассмотрению системы вида

$$\frac{dy_2}{dr} = \frac{ry_2 + \lambda c\gamma_3 - \lambda m_3' y_2}{c(z_2 - \lambda z_1)}, \qquad \frac{d\gamma_3}{dr} = \frac{y_2 z_1 - y_1 z_2}{c(z_2 - \lambda z_1)} \tag{4.15}$$

Аналогично предыдущему, можно показать, что необходимым условием существования алгебраического интеграла системы (4.15) будет $m_3' = 0$.

Таким образом, можно утверждать, что первая совокупность необходимых условий существования нового четвертого алгебраического интеграла системы (1.1) представляется в виде: $A = B = 2C$, $y_0' = z_0' = 0$, $m_1 = m_2 = m_3 = 0$.

5. Докажем теперь утверждение, высказанное в п. 3. В уравнениях (1.1) заменим

$$p,\ q,\ r,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ t \quad \text{на} \quad \lambda^{-1}p,\ \lambda^{-1}q,\ \lambda^{-1}r,\ \lambda^{-2}\gamma_1,\ \lambda^{-2}\gamma_2,\ \lambda^{-2}\gamma_3,\ \lambda t + t_0$$

Тогда для y_1, y_2, r, γ_3 получим уравнения вида

$$\frac{dy_1}{dt} = (m-1)\,y_1 r + z_0 z_1 + \lambda(m_3 y_1 - m_1 r), \qquad \frac{dr}{dt} = \lambda\frac{m_2 y_1 - m_1 y_2}{2m} \tag{5.1}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = (1-m)\,y_2 r - z_0 z_2 + \lambda(m_2 r - m_3 y_2), \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = \frac{y_2 z_1 - y_1 z_2}{2}$$

при этом $m = CA^{-1}$, а $m_i' A^{-1}$, $z_0' A^{-1}$ заменены соответственно на m_i, z_0.

Направив ось Ox вдоль направляющего вектора экваториальной составляющей $\mathbf{m}$, получим $m_1 = m_2$. Рассмотрим величины

$$\xi = \lambda^{-1}(y_1 + y_2), \qquad \eta = y_1 - y_2, \qquad \alpha = z_1 + z_2, \qquad \beta = \lambda^{-2}(z_1 - z_2), \qquad u = \lambda^{-1} r$$

Для их определения имеем уравнения

$$\frac{d\xi}{du} = 2m\frac{(m-1)\,[u + m_3/(m-1)]\eta + \lambda z_0\beta}{m_1\eta}, \qquad \frac{d\gamma_3}{du} = \frac{m}{2}\frac{-\eta\alpha + \lambda^3\xi\alpha}{m_1\eta} \tag{5.2}$$

Аналогично предыдущему, получаем в новых переменных систему интегралов уравнений (1.1) в виде

$$-\eta^2 - 8z_0\gamma_3 + \lambda^2(\xi^2 + 4mu^2) = h_1, \quad \xi\alpha + 2m_1\alpha + 4m\,(u + m_3/m)\gamma_3 - \lambda\eta\beta = h_2]$$
$$\alpha^2 + 4\gamma^2{}_3 - \lambda^4\beta^2 = h_3 \tag{5.3}$$

Из системы (5.2) и интегралов (5.3) для ξ_0, $\gamma_3^{(0)}$ имеем уравнения

$$\frac{d\xi_0}{du} = 2m\frac{m-1}{m_2}\left(u + \frac{m_3}{m-1}\right), \qquad \frac{d\gamma_3^{(0)}}{\sqrt{h_3 - 4\gamma_3^{(0)2}}} = -\frac{m}{2m_1}\,du \tag{5.4}$$

которые обладают следующим частным решением

$$\xi_0 = 2\frac{m(m-1)}{m_1}\int\limits_{u_0}^{u}\left(u + \frac{m_3}{m-1}\right)du, \qquad \gamma_3^{(0)} = -\frac{\sqrt{h_3}}{2}\sin\left(\frac{m}{m_1}u\right)$$

Аналогично [4, 5] заключаем, что если существует четвертый алгебраический интеграл, то он может зависеть лишь от ξ и u.

Рассмотрим частные решения при значениях $h_1 = h_2 = \lambda^2$, $h_3 = 4\lambda^2$. В этом случае из (5.2) и (5.3) для определения ξ_1 и $\gamma_3^{(1)}$ найдем уравнения

$$\frac{d\xi_1}{du} = -\frac{m[\xi_0 + 2m\,(u + m_3/m) + 2m_1 i]\,\gamma_1 + i\gamma_0\xi_1}{2m_1\gamma_0}, \qquad \frac{d\gamma_3^{(1)}}{du} = -\frac{im}{m_1}\gamma_3^{(1)} \tag{5.5}$$

которые обладают следующими частными решениями:

$$\xi_1 = \exp\left(\frac{-imu}{2m_1}\right) \qquad \gamma_3^{(1)} = 0$$

Отсюда видно, что четвертый алгебраический интеграл не зависит также и от ξ, но это противоречит свойству интеграла, или же рассуждения не имеют места, что возможно лишь при $m_1 = m_2 = 0$. В этом случае, как следует из работы [2], существует классический интеграл $r = r_0$ и утверждение п. 3, что при $x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 \neq 0$ и $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \neq 0$ четвертый алгебраический интеграл возможен лишь при $A = B$, $x_0' = y_0' = 0$, $m_1 = m_2 = 0$, полностью доказано.

Автор приносит благодарность Ю. А. Архангельскому и П. В. Мясникову за ценные указания.

Поступила 2 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes. Acta Mathematica, years 1898—1899, vol. 22, 201—341.
2. Кейс И. А. О существовании некоторых интегралов уравнений движения гиростата. Вестн. МГУ, 1963, № 6, стр. 55—62.
3. Poincaré H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste, 1892, vol. 1.
4. Husson E. D. Sur un théoréme de H. Poincaré relativement au mouvement d'un solide pesant. Acta Mathematica, 1908, vol. 31, p. 71—88. Recherche des intégrals algebriques dans le mouvement d'un solide pesant outor d'un point fixe. Ann. d. I. faculté des sciences de l'univ. de Toulouse, year 1906, 2 série vol. VIII, p. 119—152.
5. Архангельский Ю. А. Об одной теореме Пуанкаре, относящейся к задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
6. Архангельский Ю. А. Об алгебраических интегралах в задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.