

Первое условие (4.1) может быть удовлетворено обычным способом [1]. Для удовлетворения второго необходимо установить гироскоп, собственный кинетический момент H_z которого должен изменяться в соответствии с вышеупомянутой зависимостью.

В рамках прецессионной теории гироскопов из соотношений (4.1) вытекает известное [1] условие невозмущаемости гиригоризонткомпаса $H_y = mlR\omega_y$.

5. Предположим теперь, что точка подвеса рамы движется произвольным образом, т. е. расстояние $O^*O = R$ меняется с течением времени.

Допустим, что некоторое устройство, расположенное на гирорама, меняет положение ее центра тяжести по следующему закону

$$l = -kR, \quad k = \text{const} \quad (5.1)$$

В этом случае выполняется соотношение (2.5). Следовательно, рассуждения, проведенные в пункте 2, сохраняют свою силу. Таким образом, условия невозмущаемости в случае произвольного движения точки подвеса принимают форму соотношений (2.8) и (5.1).

Поступила 19 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории гиригоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
2. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики, ч. 2, ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1937.
3. Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ НЕГОЛОНОМНОЙ СВЯЗИ ПОСРЕДСТВОМ СИЛ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

Н. А. Фуфаев (Горький)

На примере саней Чаплыгина показывается, что неголономную связь можно реализовать посредством силы вязкого трения в предельном случае, когда коэффициент вязкого трения равен бесконечности. Полученный результат опровергает вывод Каратеодори о невозможности такой реализации.

1. В 1933 г. Каратеодори [1] рассмотрел движение по инерции саней Чаплыгина [2] в частном случае, когда центр масс системы лежит на прямой, проходящей через плоскость лезвия. В этом случае движение саней описывается дифференциальными уравнениями

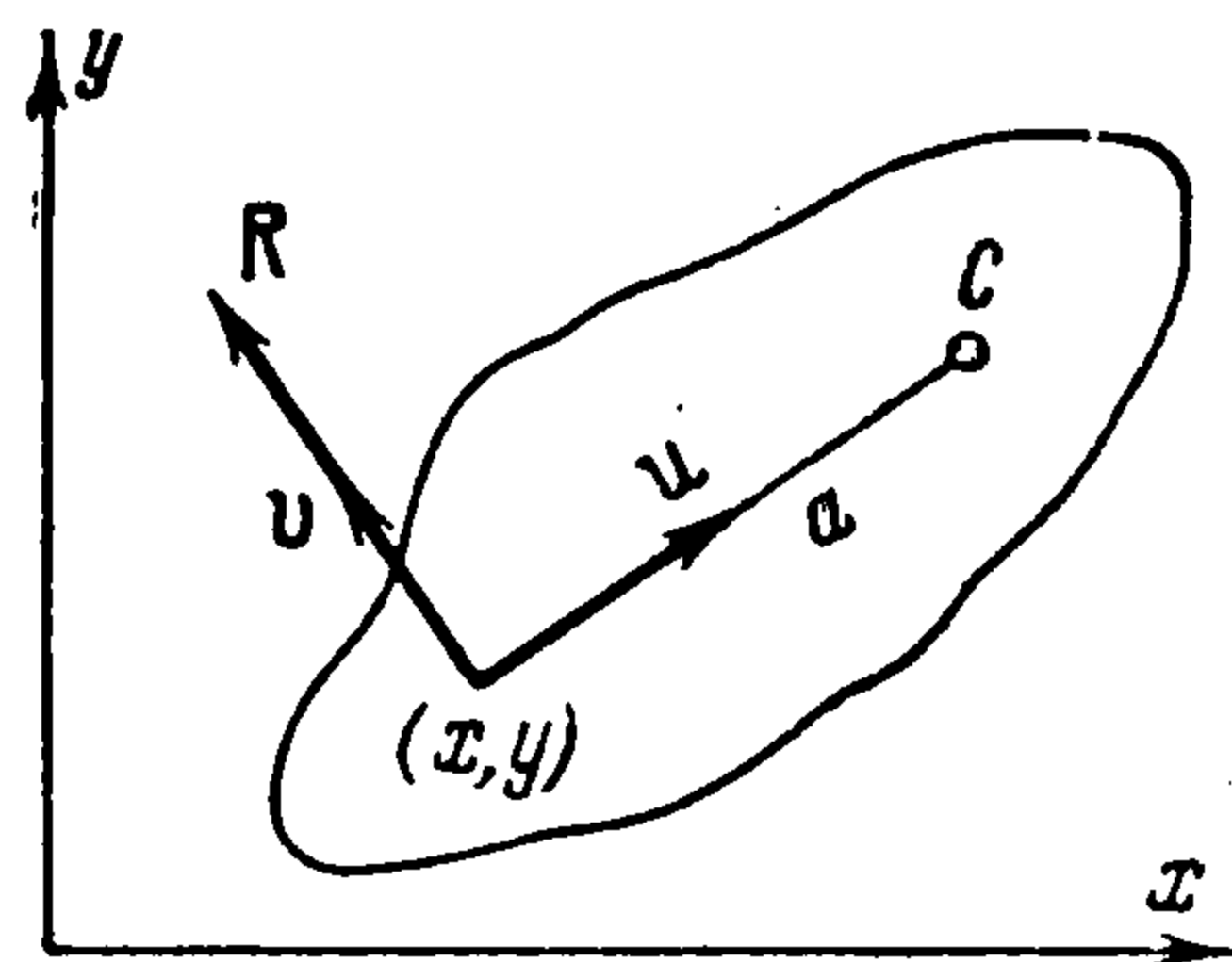
$$u' = a\omega^2, \quad ak^2\omega' = u\omega \quad (k^2 = 1 + J/ma^2) \quad (1.1)$$

Здесь u — величина скорости точки прикосновения лезвия к плоскости, ω — угловая скорость вращения саней, J — центральный момент инерции, m — масса, a — расстояние между точкой (x, y) прикосновения лезвия к плоскости и центром масс C саней (фиг. 1). Сила реакции R препятствует проскальзыванию саней в направлении, перпендикулярном плоскости лезвия, поэтому при обычном движении саней, описываемом уравнениями (1.1), составляющая скорости $v = 0$. Допустив, что R имеет характер силы вязкого трения, Каратеодори представил эту силу в виде

$$R = -Nv \quad (1.2)$$

где N — коэффициент вязкого трения, очень большое число. Если ввести малый параметр $\varepsilon = J / Na^2$, тогда при $v \neq 0$ уравнения движения саней запишутся в виде

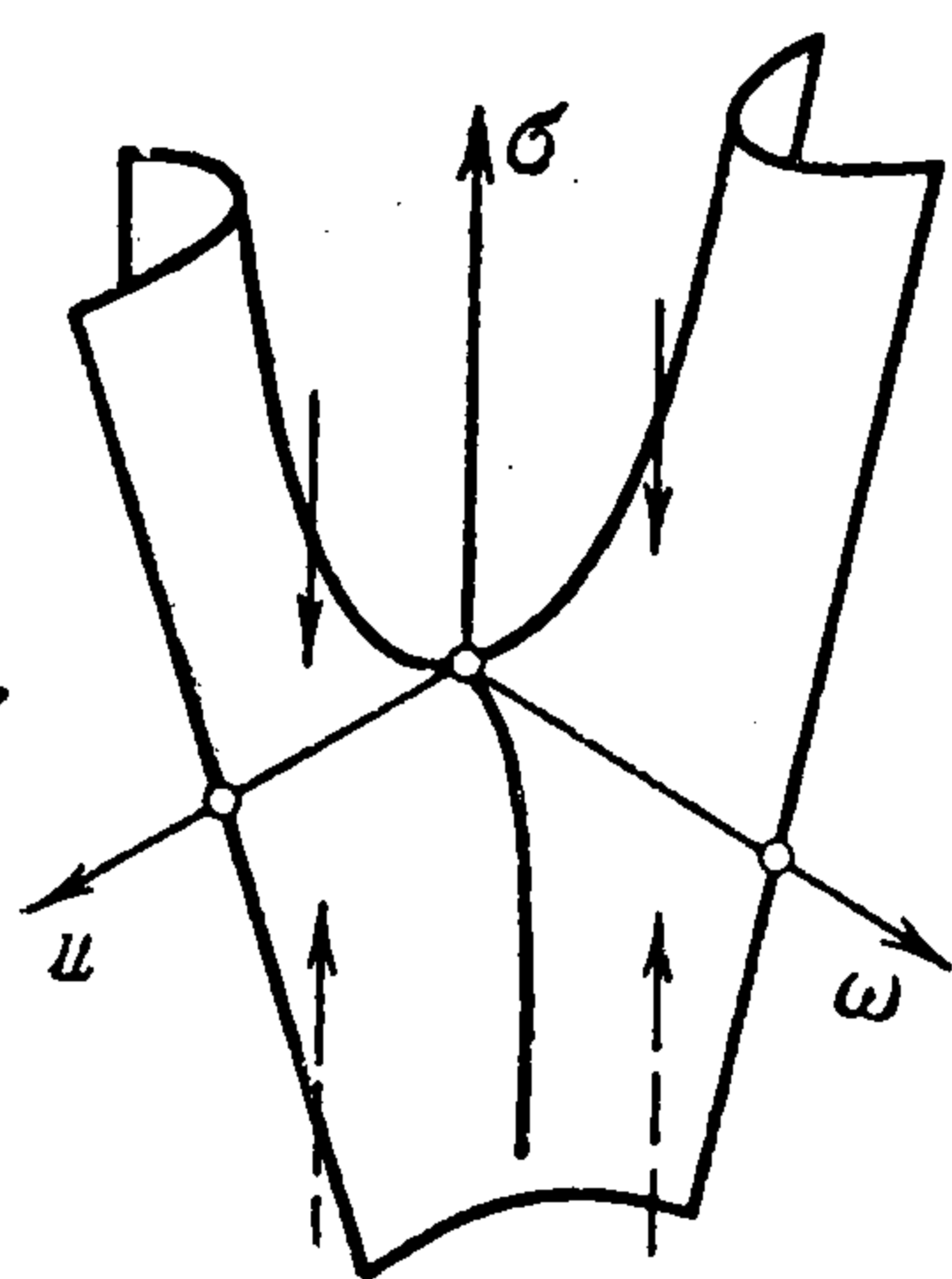
$$v = \varepsilon a\omega', \quad u' = a\omega^2 + \varepsilon a\omega\omega'; \quad ak^2\omega' + u\omega = -\varepsilon a\omega'' \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Из уравнений (1.3) непосредственно видно, что при $\varepsilon = 0$ они превращаются в уравнения (1.1). Далее Каратеодори проводит следующее рассуждение: рассмотрим движение саней при начальных условиях $u_0 = 0, v_0 = 0, \omega_0 = kc$, где $c \neq 0$ — некоторая постоянная величина. Тогда для ω' и ω'' из уравнений (1.3) получаем начальные значения $\omega_0' = 0, \omega_0'' = 0$, а из уравнений (1.1) — значения $\omega_0' = 0, \omega_0'' = -kc^2$. Отсюда Каратеодори пришел к выводу, что при любом сколь угодно малом $\varepsilon \neq 0$ траектория саней отличается от траектории саней при $\varepsilon = 0$, и, следовательно, рассматриваемая неголономная связь не реализуется посредством сил вязкого трения.

2. Рассуждение Каратеодори нельзя признать убедительным, потому что при сравнении движений, описываемых уравнениями (1.1) и (1.3), следует иметь в виду, что система уравнений (1.3) описывает движение изображающей точки в трехмерном



Фиг. 2

фазовом пространстве, а система уравнений (1.1) — в двумерном пространстве. Следовательно, при переходе от (1.3) к (1.1) система вырождается. Рассмотрим снова систему уравнений (1.3). Введем малый параметр $\mu = \varepsilon a$ и переменную $\sigma = \omega'$, тогда уравнения (1.3) запишутся в виде трех уравнений первого порядка

$$u' = a\omega^2 + \mu\omega\sigma, \quad \omega' = \sigma, \quad \mu\sigma' = -ak^2\sigma - u\omega \quad (2.1)$$

определяющих движение изображающей точки в пространстве $u\omega\sigma$, а первое уравнение (1.3) превратится в простое соотношение $v = \mu\sigma$, связывающее переменные v и σ . Из последнего уравнения системы (2.1) следует, что при $\mu \rightarrow 0$ пространство $u\omega\sigma$ превращается в область быстрых движений (по координате σ) за исключением поверхности

$$ak^2\sigma + u\omega = 0 \quad (2.2)$$

которая оказывается областью медленных движений, а для быстрых движений — областью устойчивых состояний равновесия (фиг. 2). При $\mu \rightarrow 0$ изображающая точка из любой точки пространства $u\omega\sigma$ приходит на поверхность (2.2) со скоростью

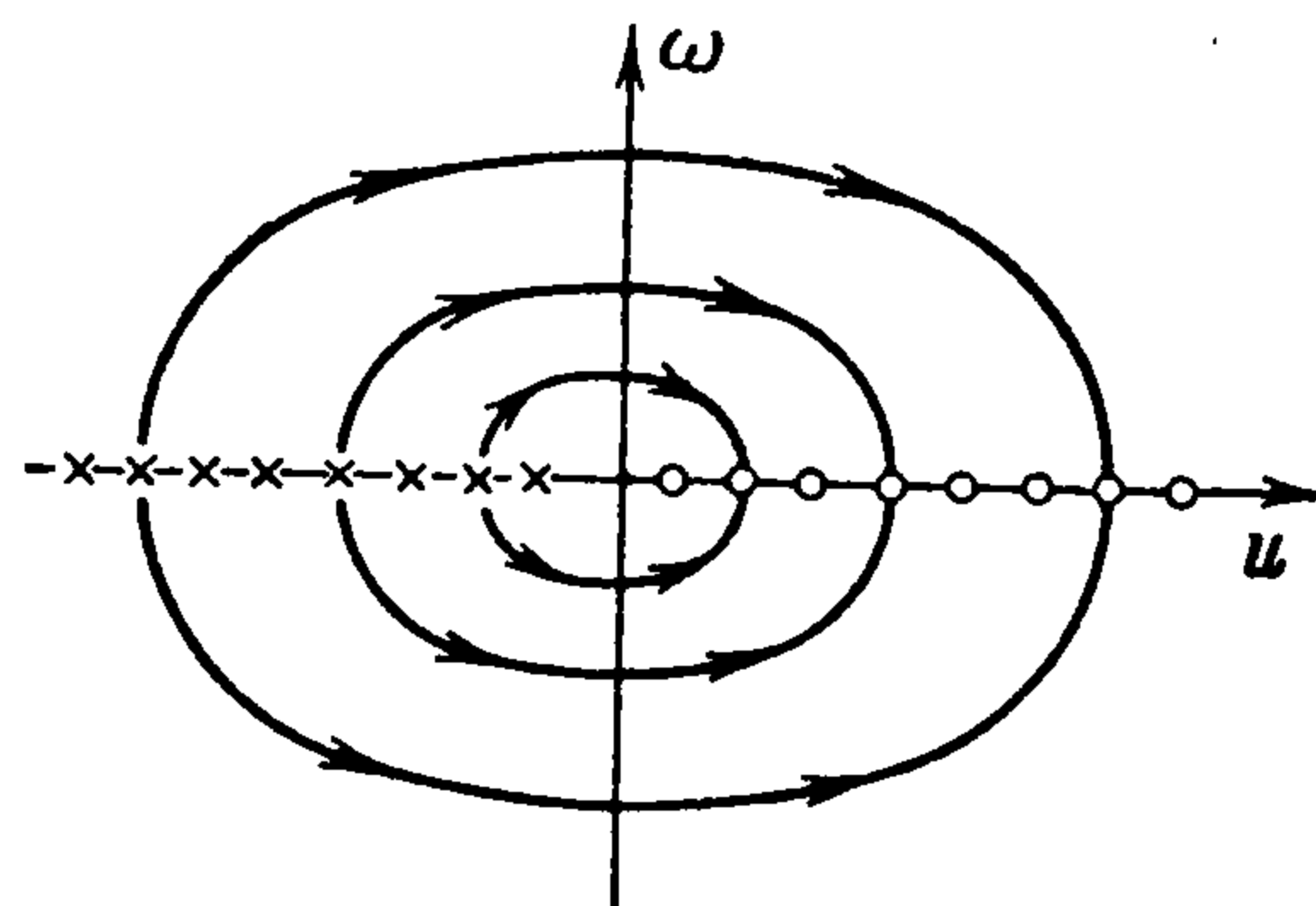
$$\sigma' = -\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{ak^2\sigma + u\omega}{\mu} = \begin{cases} -\infty, & \text{если } ak^2\sigma + u\omega > 0 \\ +\infty, & \text{если } ak^2\sigma + u\omega < 0 \end{cases}$$

и затем движется по этой поверхности в соответствии с уравнениями (1.1), которые получаются из (2.1) при $\mu = 0$. Уравнения (1.1) описывают медленное движение изображающей точки на поверхности (2.2) в проекции на плоскость $u\omega$. Разделив первое уравнение (1.1) на второе, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{d\omega} = -a^2k^2 \frac{\omega}{u}$$

Отсюда находим семейство интегральных кривых $u^2 + a^2k^2\omega^2 = \text{const}$, разбивающих плоскость $u\omega$ на траектории (фиг. 3). Прямая $\omega = 0$ заполнена состояниями равновесия системы (1.1), причем на полупрямой ($\omega = 0, u < 0$) находятся неустойчивые состояния равновесия, а на полупрямой ($\omega = 0, u > 0$) — устойчивые. Точки на оси $\omega = 0$ соответствуют прямолинейному движению саней с постоянной скоростью $u = u_0 = \text{const}$. Это движение саней будет неустойчивым, если лезвие находится впереди центра масс, и устойчивым, если лезвие находится сзади центра масс. При перемещении изображающей точки вдоль дуги эллипса лезвие саней описывает одну из клювообразных кривых, аналитическое выражение которых найдено Каратеодори

В случае малых значений параметра μ ($\mu \neq 0$) изображающая точка в пространстве $u\omega\sigma$ из точек вне конечной окрестности поверхности (2.2) приходит в μ -окрестность этой поверхности за время порядка $\mu \ln \mu^{-1}$ и остается в ней в дальнейшем [3].



Фиг. 3

Обратимся теперь к рассуждению Каратеодори. Прежде всего заметим, что при начальных условиях Каратеодори ($u_0 = 0$, $\omega_0 = kc$, $\sigma_0 = 0$) изображающая точка в пространстве $u\omega\sigma$ находится на поверхности (2.2) и, следовательно, в области медленных движений, которой при $\mu \neq 0$ ($\mu \ll 1$) является μ -окрестность поверхности (2.2). Согласно предыдущему, изображающая точка останется в этой области и в дальнейшем. Изучим далее поведение функции $\sigma' = \sigma'(t)$. Для этого рассмотрим движение изображающей точки в пространстве $u\omega\sigma'$. Дифференцируя последнее уравнение (2.1) и исключая переменную σ , получим из (2.1) систему дифференциальных уравнений

$$ak^2 \frac{du}{dt} = a^2k^2\omega^2 - \mu\omega(u\omega + \mu\sigma'), \quad ak^2 \frac{d\omega}{dt} = -u\omega - \mu\sigma' \quad (2.3)$$

$$\mu ak^2 \frac{d\sigma'}{dt} = [\mu(u + \mu\omega^2) - a^2k^4] \sigma' - a^2k^2\omega^3 + \omega u^2 + \mu u\omega^3$$

которые описывают движение изображающей точки в пространстве u, ω, σ' . Из последнего уравнения (2.3) следует, что при $\mu \rightarrow 0$ пространство $u\omega\sigma'$ превращается в область быстрых движений (по координате σ') за исключением поверхности

$$a^2k^4\sigma' = \omega u^2 - a^2k^2\omega^3 \quad (2.4)$$

которая оказывается областью медленных движений (фиг. 4). Эти медленные движения будут устойчивыми по отношению к быстрым движениям. В случае малых значений параметра μ ($\mu \neq 0$) областью медленных движений будет μ -окрестность поверхности

$$[\mu(u + \mu\omega^2) - a^2k^4] \sigma' - a^2k^2\omega^3 + \omega u^2 + \mu u\omega^3 = 0 \quad (2.5)$$

В ограниченной области пространства $u\omega\sigma'$ поверхность (2.5) отличается от (2.4) на малую величину порядка μ и при $\mu \rightarrow 0$ стремится к поверхности (2.4). При начальных условиях Каратеодори ($u_0 = 0$, $\omega_0 = kc$, $\sigma'_0 = 0$) изображающая точка в пространстве (u, ω, σ') находится вне конечной окрестности поверхности (2.5) и, согласно предыдущему, за время порядка $\mu \ln \mu^{-1}$ придет в μ -окрестность этой поверхности. Для значений $u = 0$, $\omega = kc$ на поверхности (2.4) величина $\sigma' = -kc^3$. Следовательно, при $\mu \rightarrow 0$ изменение σ' от $\sigma' = 0$ до $\sigma' = -kc^3$ превращается в мгновенный скачок (см. фиг. 4). Таким образом, противоречие, к которому пришел Каратеодори, разрешается следующим образом: хотя значения $\omega'' = \sigma'$ в начальный момент времени $t = 0$ действительно различны в случаях $\mu = 0$ и $\mu \neq 0$ ($\mu \ll 1$), однако это различие исчезает за промежуток времени порядка $\mu \ln \mu^{-1}$. При $\mu \rightarrow 0$ область медленных движений сжимается к поверхности, а предельное (медленное) движение невырожденной системы (2.1) совпадает с движением предельной (вырожденной) системы (1.1). При этом медленное движение оказывается устойчивым по отношению к быстрым движениям.

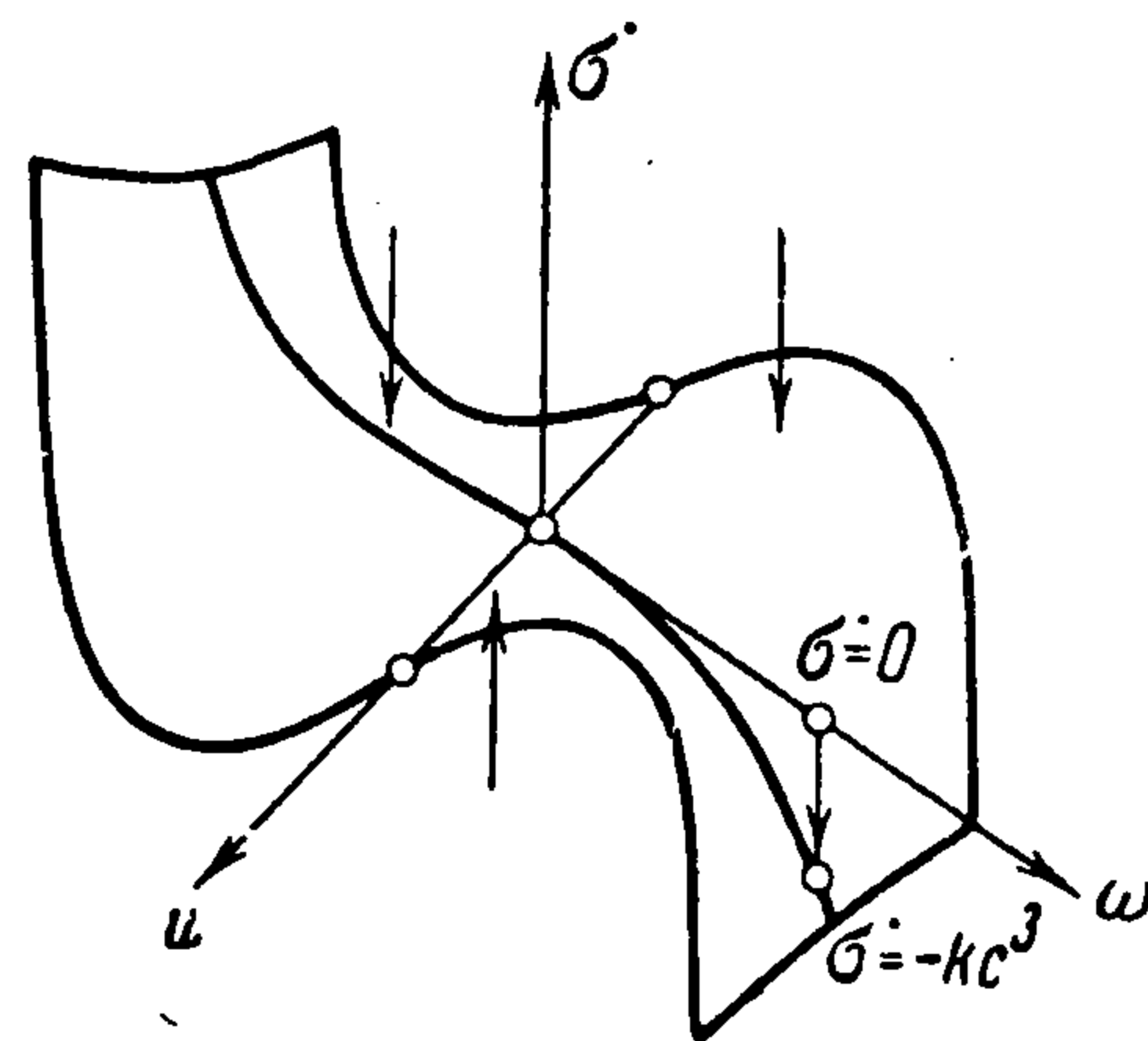
Проведенное рассмотрение приводит к выводу, что неголономная связь, возникающая при движении лезвия по плоскости, может быть реализована посредством сил вязкого трения и соответствует случаю, когда коэффициент вязкого трения равен бесконечности.

В заключение автор пользуется случаем выразить признательность Ю. И. Неймарку и Н. А. Железцову за полезные советы.

Поступила 6 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Caratheodory C. Der Schlitten, ZAMM, 1933, Н. 13.
2. Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Матем. сб., 1911, т. XXVIII, вып. 2.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний, Физматгиз, 1959.



Фиг. 4