# ОБ УСЛОВИЯХ НЕВОЗМУЩАЕМОСТИ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ РАМЫ

Д. М. Климов (Москва)

Рассматривается движение рамы с гироскопами (гироскопической рамы), окруженной сферической оболочкой и подвешенной в жидкости без трения. Предполагается, что центр подвеса гирорамы движется произвольным образом по поверхности неподвижной сферы, окружающей Землю, а силы тяготения рамы к Земле приводятся к единственной силе, приложенной к центру тяжести рамы и направленной по нормали к сфере.

Доказывается следующее утверждение: для того чтобы ось $z$, проходящая через центр подвеса и центр тяжести гирорамы, была направлена по геоцентрической вертикали (нормали к сфере) при произвольном движении точки подвеса по сфере, необходимо и достаточно, чтобы момент количества гиросистемы относительно точки подвеса в абсолютном движении был равен нулю.

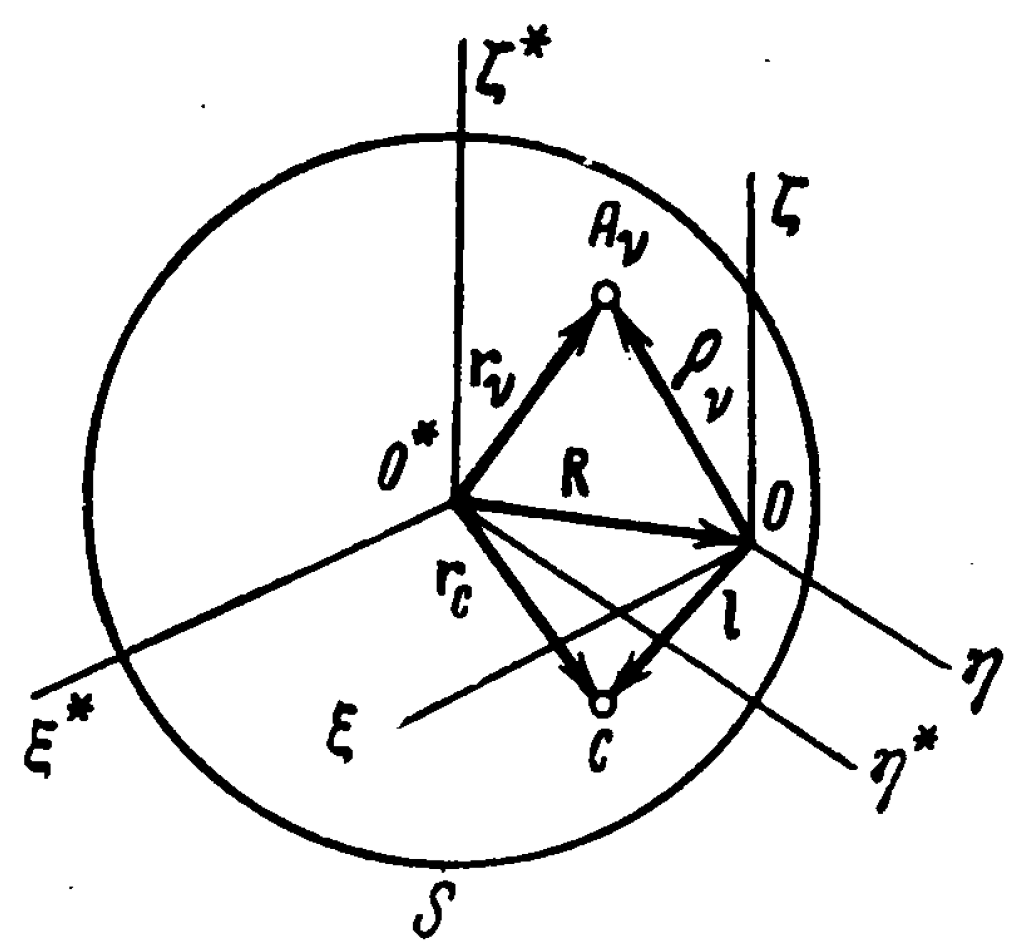
Формулируются точные условия невозмущаемости гирогоризонткомпаса, из которых в рамках прецессионной теории гироскопов получается условие невозмущаемости, впервые полученное А. Ю. Ишлинским [1].

1. Рассмотрим движение рамы с гироскопами (гирорамы), окруженной сферической оболочкой и подвешенной в жидкости без трения так, что центр тяжести гирорамы $C$ находится ниже центра подвеса $O$.

Предположим, что центр подвеса гирорамы $O$ перемещается по невращающейся сфере $S$ радиуса $R$, окружающей Землю, а силы тяготения гирорамы к Земле приводятся к силе $F$, приложенной к центру тяжести рамы и направленной по геоцентрической вертикали.

Введем систему координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$, центр которой $O^*$ расположим в центре Земли, а оси направим на неподвижные звезды. Будем считать систему осей $\xi^*\eta^*\zeta^*$ неподвижной, так как движением центра Земли можно пренебречь.

С центром подвеса $O$ свяжем поступательно движущуюся систему координат $\xi\eta\zeta$ (фиг. 1) и систему осей $xyz$, связанных с рамой. Направим ось $z$ так, чтобы центр тяжести $C$ лежал на ее отрицательной части (на фиг. *1* оси $xyz$ не показаны). Расстояние $OC$ обозначим через $l$.




2. Теорема о кинетическом моменте $\mathbf{G}_{O^*}$ системы относительно неподвижной точки $O^*$ имеет вид [2]

$$\frac{d\mathbf{G}_{O^*}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^e \qquad \left(\mathbf{G}_{O^*} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu \times m_\nu \frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt}\right) \tag{2.1}$$

Здесь $m_\nu$ — масса материальной частицы $A_\nu$, $\boldsymbol{r}_\nu$ — ее радиус-вектор, проведенный в точку $A_\nu$ из точки $O^*$, вектор $\mathbf{F}_\nu^e$ — равнодействующая внешних сил, действующих на точку $A_\nu$.

Из фиг. 1 видно, что $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{R} + \boldsymbol{\varrho}_\nu$, где $\mathbf{R}$ — вектор $O^*O$, а $\boldsymbol{\varrho}_\nu$ — радиус-вектор, проведенный в точку $A_\nu$ из точки $O$. Используя это соотношение, получаем

$$\mathbf{G}_{O^*} = \mathbf{R} \times m\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} + \mathbf{G}_O \qquad \left(\mathbf{G}_O = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{\varrho}_\nu \times m_\nu \frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt}, m = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\right) \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{G}_O$ — кинетический момент системы относительно точки подвеса гирорамы в абсолютном движении, $\mathbf{r}_C$— вектор $O^*C$.

Подставляя (2.2) в (2.1) и используя теорему о движении центра масс системы, находим

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} \times m\frac{d\mathbf{r}_C}{dt} + \frac{d\mathbf{G}_O}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{\varrho}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^e \tag{2.3}$$

Предположим, что ось $z$ все время направлена по вертикали при произвольном движении точки подвеса рамы по сфере $S$. Тогда сила тяготения направлена по оси $z$ и ее момент относительно точки $O$ равен нулю, откуда

$$\sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{\varrho}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^e = 0 \tag{2.4}$$

Кроме этого, в рассматриваемом случае

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} \times m \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} = 0 \tag{2.5}$$

Поэтому из (2.3) — (2.5) видно, что вектор $\mathbf{G}_O$ не изменяет своей величины и направления. Будем считать, что $\mathbf{G}_O = 0$, так как именно этот частный случай представляет интерес ввиду возможности его практической реализации в технике.

Итак, если ось $z$ гирорамы направлена по вертикали при произвольном движении ее точки подвеса по поверхности неподвижной сферы, то кинетический момент гирорамы относительно точки подвеса в абсолютном движении равен нулю. Иначе

$$\mathbf{G}_O = 0 \tag{2.6}$$

Очевидно, соотношение (2.6) при соответствующих начальных условиях ввиду единственности решения уравнения (2.1) будет и достаточным условием невозмущаемости, выполнение которого обеспечивает вертикальность оси $z$ при произвольном движении гирорамы по поверхности Земли.

Соотношение (2.6) можно записать в другой форме

$$\mathbf{l} \times m\mathbf{v} + \mathbf{K}_O = 0 \qquad \left(\mathbf{K}_O = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{\varrho}_\nu \times m_\nu \frac{d\boldsymbol{\varrho}_\nu}{dt}\right) \tag{2.7}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость точки подвеса рамы, $\mathbf{K}_O$ — кинетический момент гирорамы относительно точки $O$ в движении относительно системы осей $\xi\eta\zeta$, вектор $\mathbf{l}$ равен $OC$.

Наконец, проектируя (2.7) на оси $x, y, z$, получим вместо (2.6) условия невозмущаемости в скалярной форме

$$mlv_y + K_x = 0, \qquad -mlv_x + K_y = 0, \qquad K_z = 0 \tag{2.8}$$

3. Оказывается, что соотношения (2.8) можно удовлетворить в ряде случаев надлежащим выбором параметров гиросистемы.

Первоначально сформулируем условия невозмущаемости физического маятника. Для него из (2.8) имеем

$$mlv_y + I_x\omega_x = 0, \qquad -mlv_x + I_y\omega_y = 0, \qquad I_z\omega_z = 0 \tag{3.1}$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции угловой скорости маятника, $I_x, I_y, I_z$ — главные моменты инерции маятника относительно осей $x, y, z$.

Ось $z$ нормальна к сфере $S$, следовательно [1]

$$v_x = \omega_y R, \qquad v_y = -\omega_x R, \qquad v_z = 0 \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) получаем известные [3] выражения моментов инерции невозмущаемого физического маятника

$$I_x = I_y = mlR, \qquad I_z = 0$$

4. Предположим теперь, что гирорама является чувствительным элементом гирогоризонткомпаса. При движении объекта ось $x$ рамы направлена по вектору абсолютной скорости $\mathbf{v}$ точки подвеса, ось $z$ — по вертикали. Проекции угловой скорости гирорамы [1]

$$\omega_x = 0, \qquad \omega_y = \frac{v(t)}{R}, \quad \omega_z = \Omega(t)$$

Первое соотношение (2.8) удовлетворяется тождественно, два оставшихся принимают вид

$$(mlR - I_y)\,\omega_y - H_y = 0, \qquad I_z\Omega + H_z = 0 \tag{4.1}$$

Здесь $H_y$ и $H_z$ — суммарные проекции собственных кинетических моментов гироскопов на оси $y$ и $z$, $H_x = 0$.

Первое условие (4.1) может быть удовлетворено обычным способом [1]. Для удовлетворения второго необходимо установить гироскоп, собственный кинетический момент $H_z$ которого должен изменяться в соответствии с вышеупомянутой зависимостью.

В рамках прецессионной теории гироскопов из соотношений (4.1 вытекает известное [1] условие невозмущаемости гирогоризонткомпаса $H_y = mlR\omega_y$.

**5.** Предположим теперь, что точка подвеса рамы движется произвольным образом, т. е. расстояние $O^*O = R$ меняется с течением времени.

Допустим, что некоторое устройство, расположенное на гирораме, меняет положение ее центра тяжести по следующему закону

$$\mathbf{l} = -k\mathbf{R}, \quad k = \text{const} \tag{5.1}$$

В этом случае выполняется соотношение (2.5). Следовательно, рассуждения, проведенные в пункте 2, сохраняют свою силу. Таким образом, условия невозмущаемости в случае произвольного движения точки подвеса принимают форму соотношений (2.8) и (5.1).

Поступила 19 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
2. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики, ч. 2, ОНТИ НКТП СССР, М.— Л., 1937.
3. Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.

---

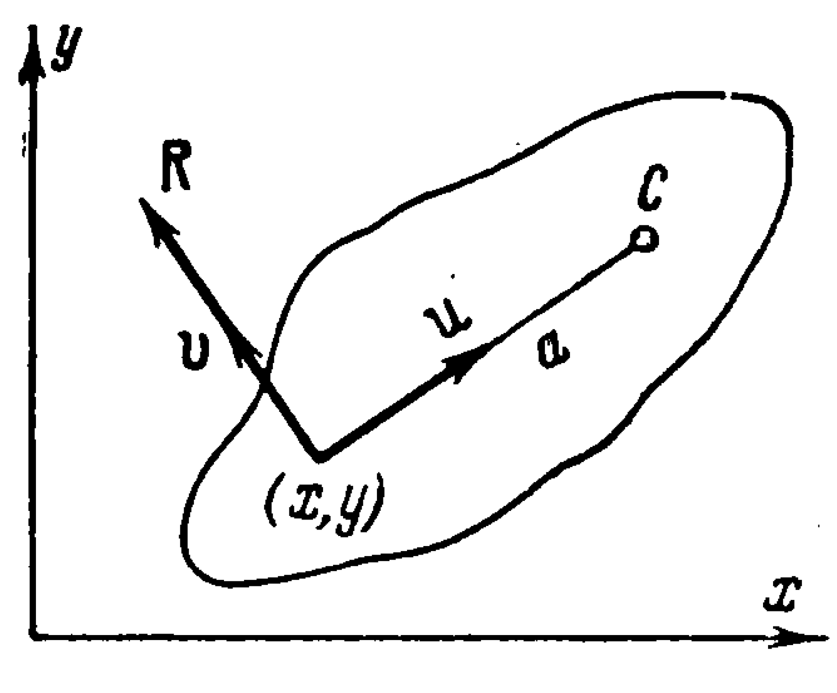
## О ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ НЕГОЛОНОМНОЙ СВЯЗИ ПОСРЕДСТВОМ СИЛ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

**Н. А. Фуфаев** (Горький)

На примере саней Чаплыгина показывается, что неголономную связь можно реализовать посредством силы вязкого трения в предельном случае, когда коэффициент вязкого трения равен бесконечности. Полученный результат опровергает вывод Каратеодори о невозможности такой реализации.

**1.** В 1933 г. Каратеодори [1] рассмотрел движение по инерции саней Чаплыгина [2] в частном случае, когда центр масс системы лежит на прямой, проходящей через плоскость лезвия. В этом случае движение саней описывается дифференциальными уравнениями

$$u^{\cdot} = a\omega^2, \quad ak^2\omega^{\cdot} = u\omega \quad (k^2 = 1 + J/ma^2) \tag{1.1}$$




Фиг. 1

Здесь $u$ —величина скорости точки прикосновения лезвия к плоскости, $\omega$ — угловая скорость вращения саней, $J$ — центральный момент инерции, $m$ — масса, $a$ — расстояние между точкой $(x, y)$ прикосновения лезвия к плоскости и центром масс C саней (фиг. 1). Сила реакции $R$ препятствует проскальзыванию саней в направлении, перпендикулярном плоскости лезвия, поэтому при обычном движении саней, описываемом уравнениями (1.1), составляющая скорости $v = 0$. Допустив, что $R$ имеет характер силы вязкого трения, Каратеодори представил эту силу в виде

$$R = -Nv \tag{1.2}$$

где $N$ — коэффициент вязкого трения, очень большое число. Если ввести малый параметр $\varepsilon = J / Na^2$, тогда при $v \neq 0$ уравнения движения саней запишутся в виде

$$v = \varepsilon a\omega^{\cdot}, \qquad u^{\cdot} = a\omega^2 + \varepsilon a\omega\omega^{\cdot}; \qquad ak^2\omega^{\cdot} + u\omega = -\varepsilon a\omega^{\cdot\cdot} \tag{1.3}$$