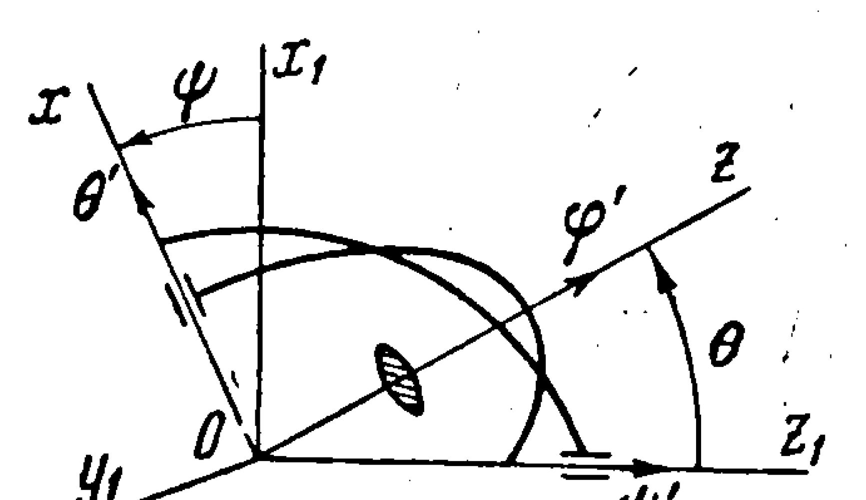
# ЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ЦИКЛИЧЕСКОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ДЛЯ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

А. А. Богоявленский (Москва)

Циклические перемещения, введенные в механику Н. Г. Четаевым [1], дают первые интегралы уравнений движения. Эти перемещения определяются свойствами введенных инфинитезимальных операторов группы бесконечно малых преобразований С. Ли и структурой живой силы и силовой функции.

1. Возьмем симметричный гироскоп в кардановом подвесе [2,3]. Центр тяжести гироскопа и кожуха (внутреннего кольца) расположен на оси симметрии гироскопа (см. фигуру).




Закрепим неизменно с осью вращения внешнего кольца карданова подвеса ось $z_1$ неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$, поместив ее начало в неподвижной точке $O$ гироскопа. Подвижной системой координат $Oxyz$ с началом в той же точке служат оси кожуха. Ось $x$ направлена по оси вращения кожуха, ось $z$ — по оси симметрии гироскопа.

Пусть оси $x$, $y$, $z$ являются главными осями эллипсоида инерции кожуха относительно неподвижной точки $O$.

Введем следующие обозначения: $\psi$ — угол поворота внешнего кольца карданова подвеса; $\theta$ — угол поворота кожуха в кольце; $\varphi$ — угол поворота гироскопа в кожухе (угол собственного вращения гироскопа в кожухе); $A^\circ$, $B^\circ$, $C^\circ$ — главные моменты инерции кожуха, $A$, $B = A$, $C$ — моменты инерции гироскопа относительно осей $x$, $y$, $z$; наконец $I$ — момент инерции внешнего кольца карданова подвеса относительно оси $z_1$. Будем предполагать, что эллипсоид инерции гироскопа относительно точки $O$ есть эллипсоид вращения вокруг оси $z$.

Проекции мгновенной угловой скорости вращения кожуха на оси координат системы $xyz$ равны

$$p^\circ = \theta', \qquad q^\circ = \psi' \sin\theta, \qquad r^\circ = \psi' \cos\theta$$

и мгновенной угловой скорости гироскопа на те же оси равны

$$p = \theta', \qquad q = \psi' \sin\theta, \qquad r = \varphi' + \psi' \cos\theta$$

Удвоенные живые силы внешнего кольца карданового подвеса, кожуха и гироскопа равны соответственно

$$I\psi'^2, \qquad A^\circ p^{\circ 2} + B^\circ q^{\circ 2} + C^\circ r^{\circ 2} \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

Общая удвоенная живая сила системы

$$2T = (A + A^\circ)\,\theta'^2 + [I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\theta]\,\psi'^2 + C(\varphi' + \psi' \cos\theta)^2$$

Предположим, что трения в подшипниках нет, активные силы, действующие на систему, допускают силовую функцию $U$, зависящую, вообще говоря, от углов $\theta$, $\psi$, $\varphi$.

2. Применим прием, который был использован при нахождении линейного интеграла для твердого тела, заключающего внутри себя подвижные массы [4]. Введем инфинитезимальные операторы группы С. Ли бесконечно малых преобразований следующим образом.

Пусть положение нашей механической системы определяется параметрами Родрига [5], которые примем как переменные Пуанкаре [1, 6] для нашей системы

$$\lambda = \tau \sin {}^1/_2\theta \cos {}^1/_2(\psi - \varphi), \qquad \mu = \tau \sin {}^1/_2\theta \sin {}^1/_2(\psi - \varphi)$$
$$\nu = \tau \cos {}^1/_2\theta \sin {}^1/_2(\psi + \varphi), \qquad \rho = -\tau \cos {}^1/_2\theta \cos {}^1/_2(\psi + \varphi)$$

Эти переменные связаны зависимостью

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = \tau^2 \qquad (\tau = \mathrm{const})$$

Не уменьшая общности, можно для простоты положить $\tau = 1$. За параметры действительных перемещений возьмем

$$\eta_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{\psi'}{a} - \frac{\varphi'}{b}\right), \qquad \eta_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\psi'}{a} + \frac{\varphi'}{b}\right), \qquad \eta_3 = \frac{\theta'}{2}$$
$$(a = \text{const} \neq 0, \quad b = \text{const} \neq 0) \tag{1}$$

Переменные Пуанкаре удовлетворяют дифференциальным соотношениям

$$\begin{aligned} d\lambda / dt &= -\mu\,[(a+b)\,\eta_1 + (a-b)\,\eta_2] + \lambda\varkappa^{-1}\eta_3 \\ d\mu / dt &= \lambda\,[(a+b)\,\eta_1 + (a-b)\,\eta_2] + \mu\varkappa^{-1}\eta_3 \\ d\nu / dt &= -\rho\,[(a-b)\,\eta_1 + (a+b)\,\eta_2] - \nu\varkappa\eta_3 \\ d\rho / dt &= \nu\,[(a-b)\,\eta_1 + (a+b)\,\eta_2] - \rho\varkappa\eta_3 \end{aligned} \qquad \varkappa = \left(\frac{\lambda^2+\mu^2}{\nu^2+\rho^2}\right)^{1/2}$$

Изменение функции положения механической системы $f(t, \lambda, \mu, \nu, \rho)$ на действительном перемещении системы определяется

$$df = \left(X_0 + \sum_{i=1}^{3} \eta_s X_s f\right) dt$$

где инфенитезимальные операторы группы Ли действительных перемещений суть

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ X_1 &= (a+b)\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\mu} - \mu\frac{\partial}{\partial\lambda}\right) + (a-b)\left(\nu\frac{\partial}{\partial\rho} - \rho\frac{\partial}{\partial\nu}\right) \\ X_2 &= (a-b)\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\mu} - \mu\frac{\partial}{\partial\lambda}\right) + (a+b)\left(\nu\frac{\partial}{\partial\rho} - \rho\frac{\partial}{\partial\nu}\right) \\ X_3 &= \varkappa^{-1}\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} + \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right) - \varkappa\left(\nu\frac{\partial}{\partial\nu} + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Операторы группы действительных перемещений

$$X_0, X_1, X_2, X_3$$

перестановочны, так же как операторы подгруппы возможных перемещений

$$X_1, X_2, X_3$$

т. е.

$$(X_i X_k) = 0 \qquad (X_i, X_0) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{3}$$

3. Применим построенные инфенитезимальные операторы для нахождения интеграла циклического перемещения в задаче, поставленной в п. 1.

Из формул (I) следует

$$\psi' = 2a\,(\eta_1 + \eta_2), \qquad \varphi' = -2b\,(\eta_1 - \eta_2), \qquad \theta' = 2\eta_3$$

Живая сила рассматриваемого гироскопа в кардановом подвесе в переменных Пуанкаре — Четаева запишется

$$\begin{aligned} T = {} & 2\,\{a^2K + [a\,(\nu^2+\rho^2-\lambda^2-\mu^2) - b]^2 C\}\,\eta_1^2 + \\ & + 2\,\{a^2K + [a\,(\nu^2+\rho^2-\lambda^2-\mu^2) + b]^2 C\}\,\eta_2^2 + 2\,(A + A^\circ)\,\eta_3^2 + \\ & + 4\,\{a^2K + [a^2\,(\nu^2+\rho^2-\lambda^2-\mu^2)^2 - b^2]\,C\}\,\eta_1\eta_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь

$$K = I + C^\circ + 4\,(A + B^\circ - C^\circ)\,(\lambda^2+\mu^2)\,(\nu^2+\rho^2)$$

Перемещение $X_1$ из (2) будет циклическим по Н. Г. Четаеву в силу (3), что всегда выполняется, и требования $X_1(L) = 0$, что удовлетворяется, если положить

$$X_1(U) = 0$$

Такое требование в переменных Эйлера дает

$$a\frac{\partial U}{\partial\psi} - b\frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0 \tag{5}$$

При условии (5) будет иметь место для циклического перемещения $X_1$ интеграл

$$\frac{1}{4}\frac{\partial T}{\partial \eta_1} = \{a^2K + [a(\nu^2+\rho^2-\lambda^2-\mu^2)-b]^2 C\}\,\eta_1 + $$
$$+ \{a^2K + [a^2(\nu^2+\rho^2-\lambda^2-\mu^2)^2 - b^2]\,C\}\,\eta_2 = \mathrm{const} \tag{6}$$

В переменных Эйлера интеграл имеет вид

$$a\,\{[I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\theta]\,\psi' + Cr\cos\theta\} - b\,Cr = \mathrm{const} \tag{7}$$

Этот интеграл не рассматривался в литературе.

Таким же образом можно показать, требуя, чтобы $X_2$ из (2) был циклическим перемещением, что при условии

$$a\frac{\partial U}{\partial \psi} + b\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \tag{8}$$

имеет место интеграл

$$a\,\{[I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\theta]\,\psi' + Cr\cos\theta\} + bCr = \mathrm{const} \tag{9}$$

Кроме указанных интегралов, уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе имеют известный интеграл живой силы

$$[I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\theta]\,\psi'^2 + (A + A^\circ)\,\theta'^2 + C\,(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2 = 2U + h$$

Требование одновременного наличия циклических перемещений $X_1$ и $X_2$ приводит к двум интегралам (7) и (9) при условиях (5) и (8). Сумма и разность (5) и (8) дают условие

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$$

Интегралы (7) и (9) распадаются на интегралы, указанные Н. Г. Четаевым, который свел интегрирование уравнений движения к квадратурам и рассмотрел вопрос об устойчивости по отношению к углу нутации [2].

**4.** Полученные результаты можно изложить при тех же параметрах возможных перемещений, приняв за переменные Пуанкаре углы Эйлера.

Зная интеграл циклического перемещения (7), можно просто произвести его проверку, используя дифференциальные уравнения движения системы

$$(A + A^\circ)\,\theta'' - \psi'^2\,(A - C + B^\circ - C^\circ)\sin\theta\cos\theta + C\varphi'\psi'\sin\theta = \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt}\,\{[I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\theta\,]\,\psi' + C\cos\theta\,(\varphi' + \psi'\cos\theta)\} = \frac{\partial U}{\partial \psi}$$

$$\frac{d}{dt}\,C\,(\varphi' + \psi'\cos\theta) = \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

Поступила 24 I 1964

## ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре. ПММ, 1941, т. 5, вып. 2; Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд. АН СССР, 1962, стр. 201—210.
2. Четаев Н. Г. О гироскопе в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3; Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд. АН СССР, 1962, стр. 445—448.
3. Богоявленский А. А. Частное решение задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
4. Богоявленский А. А. О линейном интеграле циклического перемещения для твердого тела, заключающего внутри себя подвижные массы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
5. Аппель П. Теоретическая механика, т. 2, Физматгиз, 1960, стр. 138.
6. Poincaré H. Sur une forme nouvelle des équations de la mechanique. Comp. rend. Acad. Sci. Paris, 1901, v. 132, p. 369—371.