

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

П. В. Харламов

(Новосибирск)

Аналитические выражения, получаемые в частных решениях указанной задачи, оказываются обычно весьма сложными, поэтому большое значение придают кинематическому истолкованию найденных решений [1].

Для реализации известного представления движения в виде качения без скольжения подвижного конуса по неподвижному необходимо иметь направляющую линию неподвижного аксоида. Уравнение этой линии известно в немногих частных случаях: Пуансо [2] получил его для решения Эйлера, а Дарбу [3] — для решения Лагранжа.

Ниже требуемое уравнение указано для общего случая тела, имеющего неподвижную точку. Решение Чаплыгина [4] выбрано в качестве примера потому, что на этом решении легко продемонстрировать те возможности, которые дает найденное уравнение, так как все остальные соотношения у Чаплыгина имелись.

§ 1. Подвижный годограф угловой скорости описывается уравнениями

$$\omega_i = \omega_i(\sigma) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

задающими компоненты угловой скорости в системе координат, неизменно связанной с телом, в зависимости от некоторой переменной σ . Так, например, в случае тела, находящегося под действием силы тяжести, из уравнений (1.13) работы [5] могут быть найдены зависимости $y = y(x)$, $z = z(x)$, после чего указанные там же формулы

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= ax + b_1y(x) + b_2z(x) \\ \omega_2(x) &= a_1y(x) + b_1x, \quad \omega_3(x) = a_2z(x) + b_2x \end{aligned}$$

дают подвижный годограф; связь между x и t устанавливается [5] квадратурой из (1.9).

Зная (1.1), можно указать в зависимости от σ некоторый вектор, сохраняющий неизменное направление в неподвижном пространстве. В случае тяжелого твердого тела это вектор γ , зависимость которого от x дана в [5]; в задаче Жуковского [6] о движении по инерции тела, имеющего неподвижную точку и полости, заполненные жидкостью, — это вектор момента количества движения системы; в задаче о движении тела в ньютоновском поле сил [7] — это вектор, идущий из неподвижной точки в центр притяжения.

Обозначим орт такого вектора через ν , а его проекции на оси, связанные с телом, — через $\nu_i^* = \nu_i(\sigma)$. По этому орту направим ось ζ неподвижной цилиндрической системы координат. Осевая и радиальная ком-

поненты угловой скорости определяются формулами

$$\omega_z(\sigma) = \omega(\sigma) \cdot \nu(\sigma), \quad \omega_\rho(\sigma) = |\nu(\sigma) \times \omega(\sigma)| \quad (1.2)$$

Изменение орта ν по отношению к телу описывается уравнением

$$d\nu/dt = \nu \times \omega \quad (1.3)$$

и поэтому

$$\omega_\rho = |d\nu/dt| \quad (1.4)$$

Для определения неподвижного годографа угловой скорости необходимо в дополнение к (1.2) указать зависимость от σ третьей цилиндрической координаты — угла α . Установим эту зависимость.

Конец вектора ω движется по неподвижному и подвижному годографам со скоростью $d\omega/dt$, проекция которой на нормаль к плоскости, содержащей векторы ω , ν , равна

$$\frac{\nu \times \omega}{|\nu \times \omega|} \frac{d\omega}{dt}$$

Но в цилиндрических координатах окружная компонента скорости дается формулой $\omega_\rho d\alpha/dt$, и, следовательно,

$$\omega_\rho \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\nu \times \omega}{|\nu \times \omega|} \frac{d\omega}{dt} \quad (1.5)$$

или в координатной форме, с учетом (1.2),

$$\omega_\rho^2 \frac{d\alpha}{d\sigma} = \begin{vmatrix} \nu_1(\sigma) & \nu_2(\sigma) & \nu_3(\sigma) \\ \omega_1(\sigma) & \omega_2(\sigma) & \omega_3(\sigma) \\ d\omega_1/d\sigma & d\omega_2/d\sigma & d\omega_3/d\sigma \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

Отметим компактную запись уравнения (1.6), вытекающую из (1.5), (1.3), (1.4)

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\nu \cdot d\omega}{d\nu \cdot d\nu}$$

Соотношениями (1.2), (1.6) неподвижный годограф угловой скорости полностью определен. По этой кривой катится без скольжения неизменно связанная с телом кривая (1.1).

Если отвлечься от (1.6), то (1.2) — параметрические уравнения кривой в плоскости $\omega_\rho \omega_z$; эту кривую в неподвижном пространстве $\omega_x \omega_y \omega_z$ можно истолковать как меридиан некоторой поверхности вращения. В тех случаях, когда этот меридиан оказывается достаточно простым, движение тела может быть представлено качением без скольжения неизменно связанной с телом кривой (1.1) по неподвижной поверхности вращения. Но для установления линии, описываемой подвижным годографом на этой поверхности, необходимо обратиться к уравнению (1.6).

В решении Эйлера поверхность вращения — плоскость, а (1.6) — уравнение герполодии; в решении Лагранжа поверхность вращения — сфера, а (1.6) — уравнение Дарбу [3].

§ 2. Уравнения

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C) qr + e_2 \gamma_3 - e_3 \gamma_2, \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3 \quad (123), (ABC), (pqr)$$

$$(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1, \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \Gamma^2)$$

при условиях

$$e_2 = e_3 = 0, \quad 9(2B - A)(2C - A) = 4BC \quad (2.1)$$

$$^{1/8}(17 + \sqrt{73}) > 2B/A > 3 > 5C/A > ^{5/16}(1 + \sqrt{73}) \quad (2.2)$$

имеют частное решение, найденное Чаплыгиным

$$(2B - A)(B - C)A^{-1}q^2 = (C - A)^2 p - 3(3A - 2C)sp^{2/3}$$

$$(2C - A)(B - C)A^{-1}r^2 = (A - B)p^2 + 3(3A - 2B)sp^{2/3}$$

$$(2B - A)(2C - A)\gamma_1 = A(B - A)(C - A)p^2 + ^{3/2}A(3A^2 - 4BC)sp^{2/3}$$

$$(2C - A)\gamma_2 = q[(B - A)(C - A)p + C(3A - 2B)sp^{-1/3}]$$

$$(2B - A)\gamma_3 = r[(B - A)(C - A)p + B(3A - 2C)sp^{-1/3}]$$

где

$$s^3 = \frac{4(2B - A)^2(2C - A)^2\Gamma^2}{9A^3(2B + 2C - 3A)(3A - 2B)(3A - 2C)} < 0$$

Чаплыгин указал также и уравнения меридиана поверхности вращения

$$(2B - A)(2C - A)(p^2 + q^2 + r^2) = 4(B - A)(C - A)p^2 + 12s(2A - B - C)Ap^{2/3}$$

$$(2B - A)(2C - A)(p\gamma_1 + q\gamma_2 + r\gamma_3) = 6As(B - A)(C - A)p^{5/3} + \\ + 3s^2(3A - 2B)(3A - 2C)Ap^{1/3}$$

Запишем решение Чаплыгина в виде, удобном для дальнейшего анализа.

Удовлетворяя соотношению (2.1), положим

$$B = ^{3/16}A(3c + 1)/c, \quad C = ^{3/16}A(3 + c)$$

причем, вследствие (2.5),

$$^{1/3}(\sqrt{73} - 8) < c < ^{1/5} \quad (2.3)$$

Отнесем компоненты угловой скорости к величине $(-18s)^{3/4}$ и введем орт $v_i = \gamma_i/\Gamma$, тогда решение Чаплыгина запишется так

$$p = \sigma \sqrt{\sigma}, \quad q = q_* \sqrt{\sigma(\sigma_*^2 - \sigma^2)}, \quad r = r_* \sqrt{\sigma(\sigma_*^2 - \sigma^2)} \quad (2.4)$$

$$q_* = 2c \left(\frac{2(7 - 3c)}{3(3 + c)(1 - c^2)} \right)^{1/2}, \quad r_* = 2 \left(\frac{2(3 - 7c)}{3(1 + 3c)(1 - c^2)} \right)^{1/2}$$

$$v_1 = \frac{(7 - 3c)(3 - 7c)\sqrt{3}}{2(1 - c)\sqrt{(5 - c)(1 - 5c)}} \sigma \left(\frac{9 - 34c + 9c^2}{(7 - 3c)(3 - 7c)} - \sigma^2 \right)$$

$$v_2 = \frac{(3 - 7c)}{4(1 - c)} \left(\frac{(3 + c)(7 - 3c)^3}{2(5 - c)(1 - 5c)(1 - c^2)} (\sigma_*^2 - \sigma^2) \right)^{1/2} \left(\frac{3 + c}{7 - 3c} \sigma_*^2 - \sigma^2 \right) \quad (2.5)$$

$$v_3 = -\frac{7 - 3c}{4(1 - c)} \left(\frac{(1 + 3c)(3 - 7c)^3}{2(5 - c)(1 - 5c)(1 - c^2)} (\sigma_*^2 - \sigma^2) \right)^{1/2} \left(\frac{1 + 3c}{3 - 7c} \sigma_*^2 + \sigma^2 \right)$$

$$\omega^2 = \omega_*^2 \sigma \left\{ \frac{8}{3} \frac{3 - 14c + 3c^2}{(7 - 3c)(3 - 7c)} - \sigma^2 \right\}, \quad \omega_*^2 = \frac{(3 - 7c)(7 - 3c)}{(3 + c)(1 + 3c)} \quad (2.6)$$

$$\omega_\zeta = \omega_* \sqrt{\sigma(\sigma^2 - \sigma_*^2)}, \quad \omega_* = \frac{(7 - 3c)(3 - 7c)}{2(1 - c)\sqrt{3(5 - c)(1 - 5c)}}$$

$$\sigma = \left(\frac{1 - 5c}{3 - 7c} \right)^{1/2}, \quad \sigma_* = \left(\frac{5 - c}{7 - 3c} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

Отмеченные звездочками постоянные положительны.

Переменная σ определяется из уравнения

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \sqrt{\sigma(\sigma_*^2 - \sigma^2)(\sigma^{*2} - \sigma^2)}, \quad \left(\tau = \frac{1}{3}(-18s)^{3/4}\omega_*t \right) \quad (2.8)$$

Из (2.6) определяем радиальную компоненту угловой скорости

$$\omega_\rho = \sqrt{\omega^2 - \omega_\zeta^2} = \omega^* \sqrt{\sigma(\sigma_3^2 + \sigma^2)(\sigma_4^2 - \sigma^2)} \quad (2.9)$$

где

$$\sigma_3^2 = \frac{4(1-c)R(c) + (3-22c+3c^2)(1-5c)(5-c)}{(3+c)(1+3c)(7-3c)(3-7c)} \quad (2.10)$$

$$\sigma_4^2 = \frac{4(1-c)R(c) - (3-22c+3c^2)(1-5c)(5-c)}{(3+c)(1+3c)(7-3c)(3-7c)}$$

$$R(c) = \sqrt{2(1-5c)(5-c)(9-42c+34c^2-42c^3+9c^4)}$$

Подставим (2.4) и (2.5), (2.9) в (1.6)

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = N \frac{(\sigma_1^2 - \sigma^2)(\sigma_2^2 - \sigma^2)}{(\sigma_3^2 + \sigma^2)(\sigma_4^2 - \sigma^2)\sqrt{(\sigma^{*2} - \sigma^2)(\sigma_*^2 - \sigma^2)}} \quad (2.11)$$

Здесь

$$N = 2\sigma_*\sigma^* \sqrt{3(3+c)(1+3c)}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{9-34c+9c^2+2(1-c)\sqrt{9-34c+9c^2}}{(7-3c)(3-7c)} \quad (2.12)$$

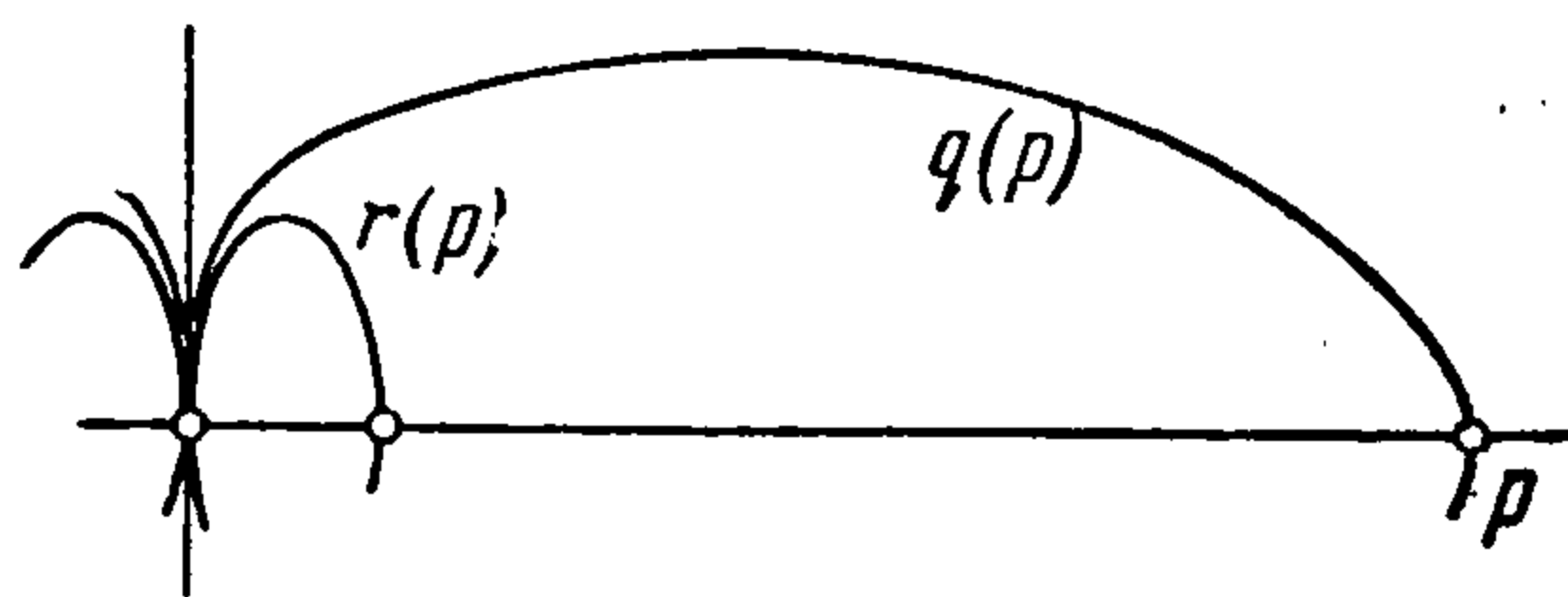
$$\sigma_2^2 = \frac{9-34c+9c^2-2(1-c)\sqrt{9-34c+9c^2}}{(7-3c)(3-7c)}$$

Отметим вытекающие из соотношений (2.3), (2.7), (2.12), (2.10) неравенства

$$\sigma_* < \sigma^* < 1, \quad 0 < \sigma_2 < \sigma_* < \sigma_1, \quad \sigma_* < \sigma_4 \quad (2.13)$$

Величины (2.4) действительны, поэтому при движении тела переменная σ заключена в пределах

$$0 \leq \sigma \leq \sigma_* \quad (2.14)$$



Фиг. 1

и, как следует из (2.8), переходит от одного крайнего значения к другому за конечный промежуток времени. Производная $d^2\sigma/d\tau^2$ при $\sigma = 0$ и $\sigma = \sigma_*$ не равна нулю, поэтому переменная σ не может сохранять неизменными значения 0 или σ_* , и, следовательно, не умаляя общности, можно положить, что в начальный момент $\sigma = 0$.

§ 3. Неизменно связанная с телом кривая (2.4) — подвижный годограф угловой скорости — линия пересечения цилиндрических поверхностей

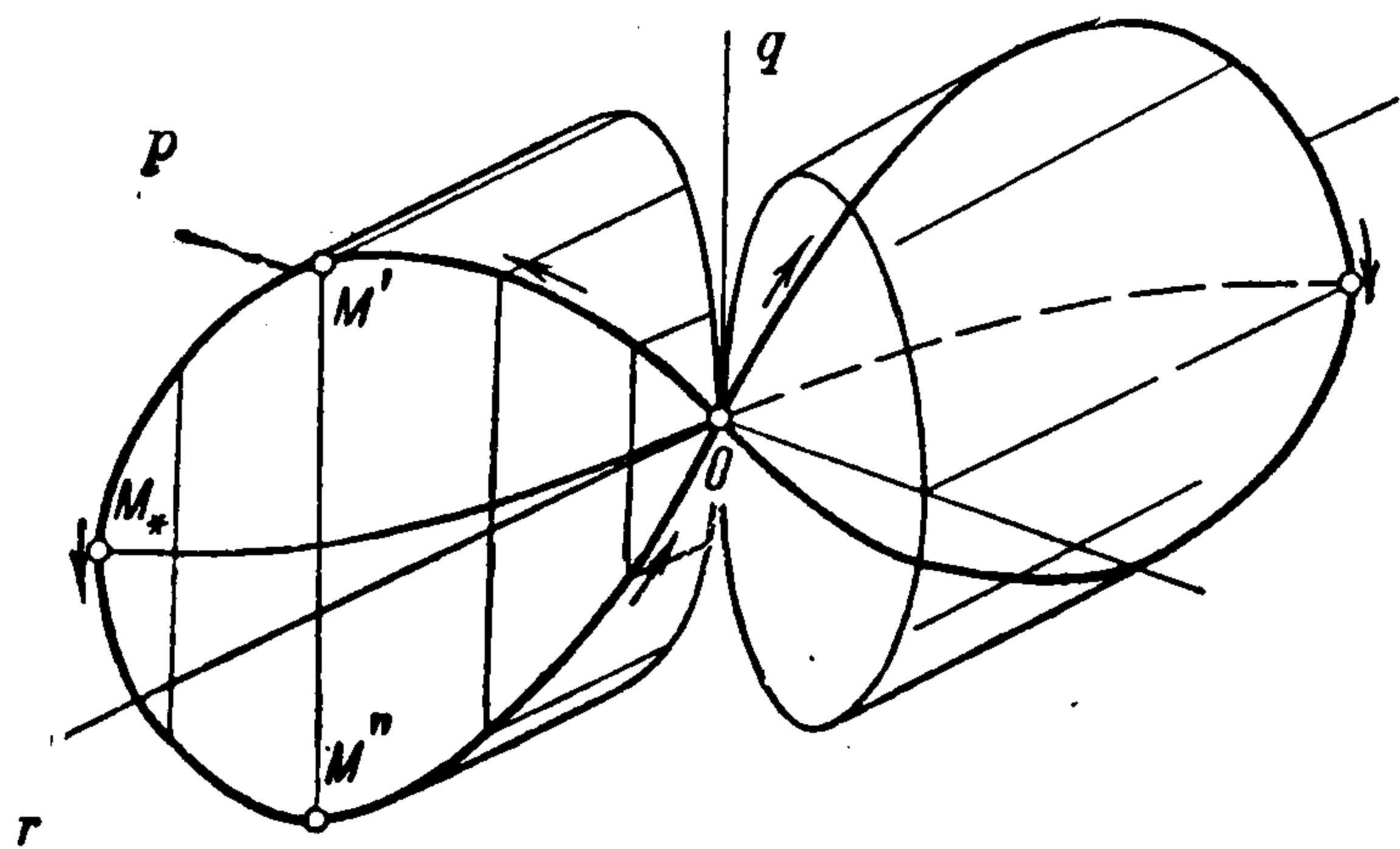
$${}^{3/8}c^{-1}(3+c)(1-c^2)q^2 = (5-c)p^{2/3} - (7-3c)p^2 \quad (3.1)$$

$${}^{3/8}(1+3c)(1-c^2)r^2 = (1-5c)p^{2/3} - (3-7c)p^2$$

Направляющие линии этих цилиндров симметричны относительно координатных осей. Примерный вид их дан на фиг. 1. С целью упрощения чертежа на фиг. 2 показаны лишь две петли подвижного годографа. Остальные две симметричны изображенным по отношению к плоскости pOr .

Проследим за движением точки M — конца вектора ω — по кривой (3.1).

Вследствие (2.13), (2.14) радикал $\sqrt{\sigma^{*2} - \sigma^2}$ сохраняет знак, примем его положительным. Тогда из (2.14), (2.8) следует, что при значениях σ , близких к начальному, знаки радикалов $\sqrt{\sigma}$ и $\sqrt{\sigma^{*2} - \sigma^2}$ одинаковы; для определенности считаем их положительными. При возрастании σ от начального значения $\sigma = 0$ до $\sigma = \sigma_*$ точка M



Фиг. 2

перемещается из точки O через M' к M_* . В точке M_* радикал $\sqrt{\sigma^{*2} - \sigma^2}$ изменяет знак, компонента r и производная $d\sigma/d\tau$ становятся отрицательными. Переменная σ убывает от σ_* до нуля, точка M перемещается из M_* через M'' к точке O , где изменяет знак радикал $\sqrt{\sigma}$, после чего становятся отрицательными p, q , а r — положительной, и конец вектора ω в течение второго полуцикла движется по второй петле, как показано на фиг. 2.

§ 4. Рассмотрим кривую (2.6), (2.9) в плоскости $\omega_\rho \omega_\zeta$. Имеем

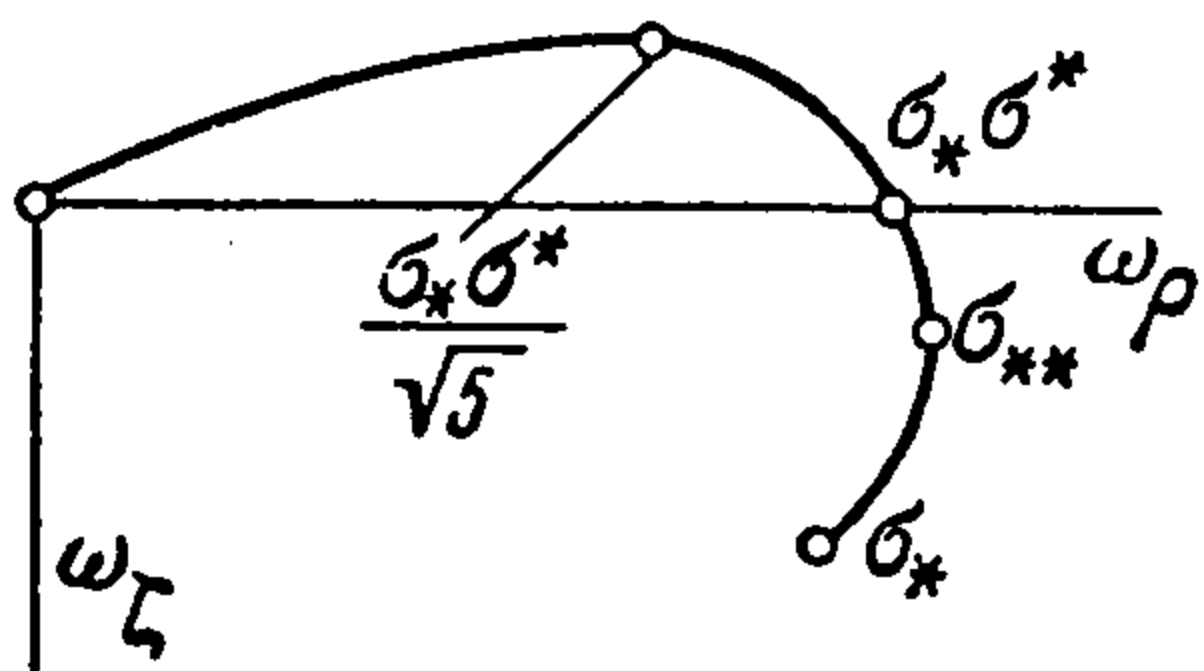
$$\frac{d\omega_\zeta}{d\omega_\rho} = - \frac{(\sigma_*^2 \sigma^{*2} - 5\sigma^2) \sqrt{(\sigma_3^2 + \sigma^2)(\sigma_4^2 - \sigma^2)}}{\sigma_3^2 \sigma_4^2 - 3(\sigma_3^2 - \sigma_4^2)\sigma^2 - 5\sigma^4} = \operatorname{tg} \nu(\sigma) \quad (4.1)$$

Кривая выходит из точки O под углом $\vartheta(0) < 0$, при $\sigma = \sigma_* \sigma^* \sqrt{5}$ имеет горизонтальную касательную, а при $\sigma = \sigma_* \sigma^* < \sigma_*$ будет пересекать ось $O\omega_\rho$ под углом $\vartheta = \vartheta(\sigma_* \sigma^*) > 0$. Отметим еще, что $\omega_\zeta(\sigma_*) > 0$ и $\vartheta(\sigma_*) < 0$.

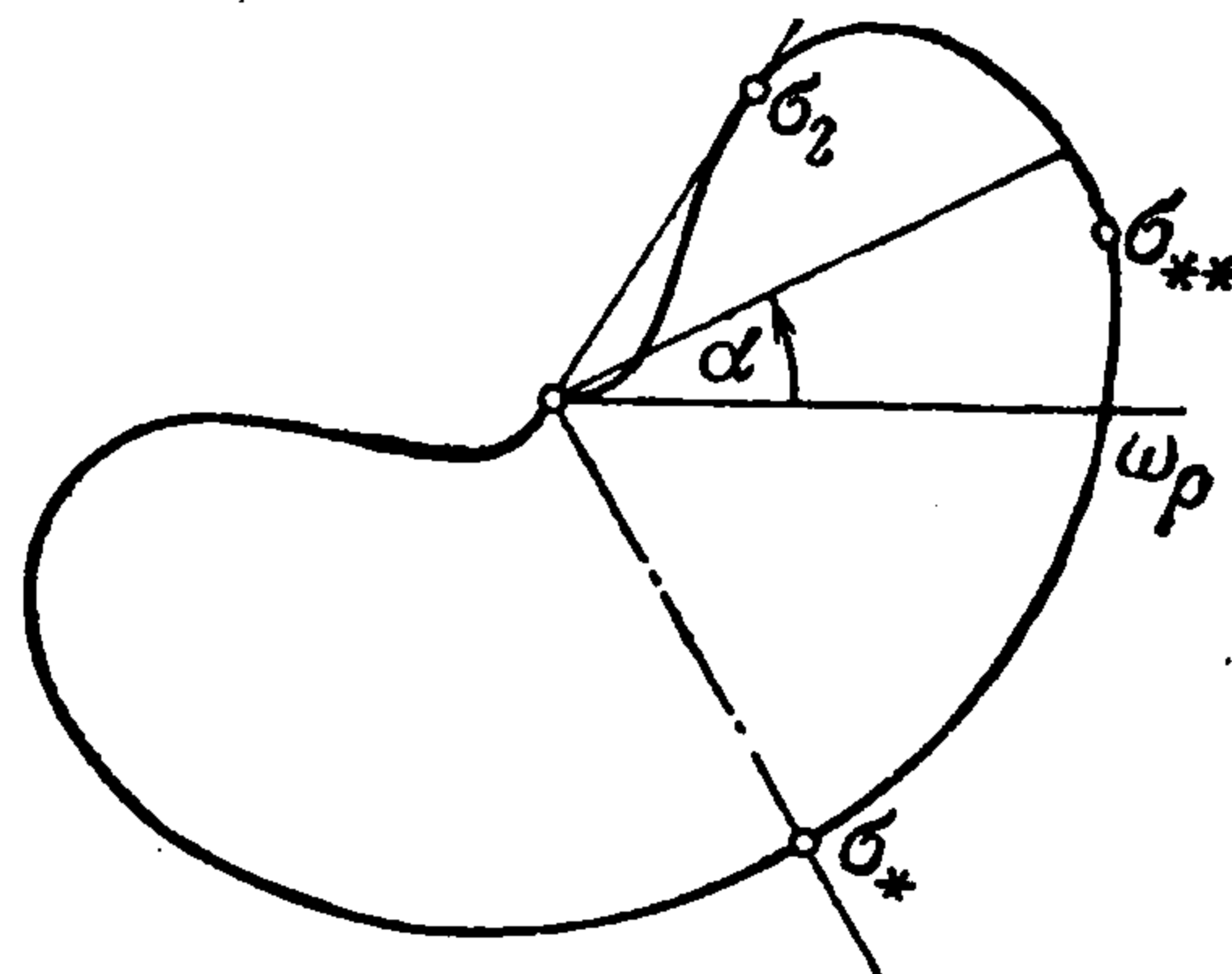
При некотором значении $\sigma = \sigma_{**}$, обращающем в нуль знаменатель правой части (4.1), касательная к кривой (2.7), (2.9) вертикальна. Из неравенств $\vartheta(\sigma_* \sigma^*) > 0$ и $\vartheta(\sigma_*) < 0$ вытекает

$$\sigma_* \sigma^* < \sigma_{**} < \sigma_* \quad (4.2)$$

На фиг. 3 указана часть меридиана (2.7), (2.9) поверхности вращения, соответствующая изменению переменной σ от начального нулевого значения до значения σ^* .



Фиг. 3



Фиг. 4

Отображая эту линию симметрично относительно точки O , получим часть меридиана, соответствующую второму полупериоду движения тела.

Проекцию неподвижного годографа на горизонтальную плоскость (фиг. 4) получаем из (2.9), (2.11). Имеем

$$\frac{\omega_\rho d\alpha}{d\omega_\rho} = 2N \frac{\sigma(\sigma_1^2 - \sigma^2)(\sigma_2^2 - \sigma^2)}{[\sigma_3^2 \sigma_4^2 - 3(\sigma_3^2 - \sigma_4^2)\sigma^2 - 5\sigma^4] \sqrt{(\sigma^{*2} - \sigma^2)(\sigma_*^2 - \sigma^2)}} \quad (4.3)$$

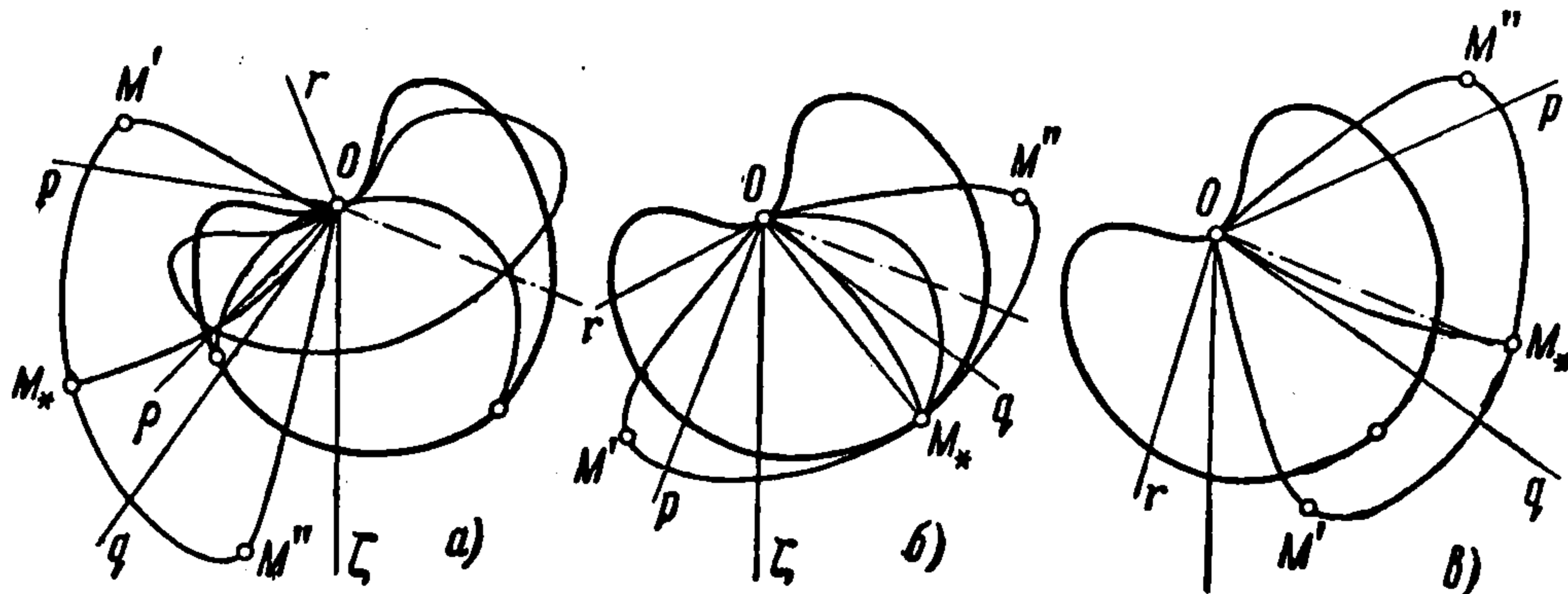
Кроме того,

$$\sigma_*^2 \sigma^{*2} - \sigma_2^2 = \frac{2(1-c)(5-c)(1-5c)}{(7-3c)(3-7c)[2(1-c) + \sqrt{9-34c+9c^2}]} > 0 \quad (4.4)$$

и, вследствие соотношений (4.4),

$$\sigma_2 < \sigma_{**}$$

На фиг. 5 показана одна петля неподвижного годографа, полученная перенесением проекции, данной на фиг. 4, на поверхность вращения с меридианом, указанным на фиг. 3. Фиг. 5а соответствует начальному значению $\sigma = 0$. В этот момент, как видно из (2.5), $v_1 = 0$, и, следовательно, ось тела Op , несущая центр тяжести, горизонтальна. При возрастании σ от 0 до σ_* подвижный годограф переходит в положение,



Фиг. 5

указанное на фиг. 5б. В этом положении $v_3 = 0$, горизонтальной оказывается ось Or . При последующем убывании σ от σ_* до 0 подвижный годограф переходит в положение, указанное на фиг. 5в. Ось Op снова горизонтальна.

В дальнейшем движении тела точка касания кривых, указанных на фиг. 5, движется по этим кривым в обратном направлении: от положения, указанного на фиг. 5в, через положение 5б к положению 5а. Конец вектора ω описывает при этом в теле и в пространстве кривые, симметричные изображенным на фиг. 5 по отношению к неподвижной точке O . В конце этого этапа движения восстанавливается положение 5а, после чего процесс повторяется.

Поступила 11 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О значении геометрического истолкования в теоретической механике. Собр. соч., т. 7, Гостехиздат, 1950.
2. Poinsot L. Théorie nouvelle de la rotation des corps. J. math. pures et appl., 1852, v. 18, 1 ser.
3. Darboux M. G. Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, fixe par un point de son axe. J. math. pures et appl., 1885, v. 1, 4 ser.
4. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Собр. соч., т. 1, Гостехиздат, 1948.
5. Харламов П. В. Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
6. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. III, ОНТИ, 1936.
7. Харламова Е. И. О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил. Изв. Сибирск. отд. АН СССР, 1959, № 6.