Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М. С. Габриелян

(Свердловск)

Рассматривается задача об управляющих силах, стабилизирующих установившееся собственно неустойчивое движение голономной механической системы. Выведены достаточные условия управляемости и стабилизируемости по одной из координат. Выяснены условия наблюдаемости движений системы по одной координате или по одной скорости. Рассмотрена задача об оптимальной стабилизации при неполной обратной связи.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, состояния которой описываются криволинейными координатами $q_i(t)$ $(t \geqslant 0;\ i = 1, \ldots, n)$. Пусть на систему действует управляющее воздействие u, связанное с криволинейными координатами q_i и скоростями dq_i / dt уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(t, q_1, \ldots, q_n, u) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где T — кинетическая энергия системы, Q_i — обобщенная сила, соответствующая координате q_i.

Пусть задано движение $q_i = q_i^\circ(t)$, которое следует из (1.1) при $u \equiv 0$ и при некоторых начальных условиях

$$q_i^\circ(0) = q_{i0} = \text{const}, \qquad (dq_i^\circ / dt)_{t=0} = q_{i0}^{(1)} = \text{const}$$

Предположим, что движение $q_i = q_i^\circ(t)$ неустойчиво в смысле Ляпунова [1]. Задача состоит в определении силы u, стабилизирующей движение $q_i^\circ(t)$. Составим уравнения возмущенного движения [1] (стр. 21) в окрестности $q_i^\circ(t)$. Пусть $s_i = q_i - q_i^\circ(t)$, тогда уравнения (1.1) примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s_i'} - \frac{\partial T}{\partial s_i} = S_i(t, s_1, \ldots, s_n, u) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

которые при $u \equiv 0$ обладают решением $s_i = 0$. Рассмотрим две задачи.

Задача 1.1. Найти функцию

$$u = u(t, s_1, \ldots, s_n, s_1', \ldots, s_n') \tag{1.3}$$

такую, чтобы движение $s_i = 0$ было асимптотически устойчивым по Ляпунову в силу уравнений возмущенного движения (1.2), (1.3).

Задача 1.2. Найти функцию u такую, чтобы движение $s_i(t) = 0$ было асимптотически устойчивым в силу уравнений возмущенного движения (1.2), (1.3) и чтобы при этом на движениях $s_i(t)$, $u(t)$ системы (1.2), (1.3) минимизировался функционал

$$I = \int_0^\infty G\,[t, s_1(t), \ldots, s_n(t), s_1'(t), \ldots, s_n'(t), u(t)]\,dt \tag{1.4}$$

Здесь G — определенно-положительная, аналитическая функция от s_i, s_i', u при $t \geqslant 0$ и имеет место следующее условие

$$G(t, s_1, \ldots, s_n, s_1', \ldots, s_n', u) = \sum_{i,j=1}^{2n} d_{ij} z_i z_j + du^2 + \nu(t, z_1, \ldots, z_{2n}, u)$$

$$(z_{2i-1} = s_i', \ z_{2i} = s_i)$$

Здесь равномерно выполняется соотношение

$$|\nu(t, z_1, \ldots, z_{2n}, u)| \leqslant \varepsilon(z_1^2 + \ldots + z_{2n}^2 + u^2)^{1+\alpha}$$

$$(\varepsilon > 0, \ \rho = (z_1^2 + \ldots + z_{2n}^2 + u^2)^{1/2} < \delta, \ \delta > 0, \ d > 0)$$

Величина

$$\sum_{i,j=1}^{2n} d_{ij} z_i z_j + du^2$$

представляет собой определенно-положительную функцию.

§ 2. Задачи о стабилизации. Будем предполагать, что линейное приближение системы стационарно и уравнения (1.2) имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j'' = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} s_j + b_j u + \gamma_j(t, s, s', u) \qquad (i = 1, \ldots, n) \ \left(S = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i s_j\right) \tag{2.1}$$

где a_{ij}, b_{ij}, b_i — постоянные, причем S — определенно-положительная форма, $b_{ij} = b_{ji}$. Предполагается, что равномерно выполняется условие

$$\gamma_i(t, s_1, \ldots, s_n, s_1', \ldots, s_n|', u)| \leqslant \varepsilon\rho^2 \qquad (\varepsilon > 0, \ \rho < \delta, \ \delta > 0, \ i = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

Не нарушая общности, можем предполагать, что $b_1 \neq 0$, $b_i = 0$ ($i = 2, \ldots, n$). Если $b_i = 0$, а $b_k \neq 0$ при $i \neq k$, то будем говорить, что система подвержена воздействию по k-й координате.

Линейное приближение для уравнений (1.2) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i} s_i'' = \sum_{i=1}^{n} b_{1i} s_i + u, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ji} s_i'' = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} s_i \qquad (j = 2, \ldots, n) \tag{2.3}$$

При помощи неособого линейного преобразования [2] (стр. 97)

$$s_i = \beta_{i1} y_1 + \ldots + \beta_{in} y_n$$

приведем систему к нормальным координатам

$$y_i'' = \lambda_i y_i + \alpha_{1i} u \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

Здесь y_i — нормальные координаты, действительные числа λ_i — корни уравнения

$$|a_{ij}\lambda - b_{ij}| = 0 \tag{2.5}$$

Числа α_{ki} удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_{kj}\lambda_j - b_{kj}) \alpha_{ki} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

Систему (2.4) заменяем системой

$$x'_{2i-1} = \lambda_i x_{2i} + \alpha_{1i} u, \qquad x_{2i}' = x_{2i-1} \tag{2.7}$$

$$(x_{2i-1} = y_i',\ x_{2i} = y_i;\ i = 1, \ldots, n)$$

Сформулируем условия разрешимости задачи 1.1. Достаточное условие для разрешимости задачи 1.1 следующее [3,4]. Система векторов

$$A, BA, \ldots, B^{2n-1}A \tag{2.8}$$

должна быть линейно независимой, где

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} \\ 0 \\ \ldots \\ \alpha_{1n} \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 & \lambda_1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.9}$$

Из требования линейной независимости векторов (2.8) вытекает что

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & \ldots & \alpha_{11}\lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & \ldots & 0 & \alpha_{11}\lambda_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1n} & 0 & \ldots & \alpha_{1n}\lambda_n^{n-1} & 0 \\ 1 & \alpha_{1n} & \ldots & 0 & \alpha_{1n}\lambda_1^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.10}$$

Имеем

$$\Delta = \alpha_{11}^2 \ldots \alpha_{1n}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \ldots (\lambda_n - \lambda_1)^2 \ldots (\lambda_n - \lambda_{n-1})^2$$

Следовательно, условие (2.10) можно записать в виде

$$1.\quad \lambda_i \neq \lambda_j, \qquad 2.\quad \alpha_{1i} \neq 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j) \tag{2.11}$$

Условия (2.11) — это условия управляемости [5] линейной системы (2.7), т. е. при выполнении (2.11) для любого $T > 0$ и любой начальной точки x° существует [5,6] управление $u(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, переводящее систему (2.7) из точки $x = x^\circ$ в точку $x = 0$ за время T. Более того, при условиях (2.11) можно указать такую окрестность точки $x = 0$, что и для нелинейной системы (1.2), для каждой точки x° из этой окрестности существует [6] управление $u(t)$, переводящее систему (1.2) в положение $x = 0$ за конечное время T. Согласно [7], при условиях (2.11) система (2.7) может быть переведена из любой точки x° в точку $x = 0$ за время T также импульсным управлением

$$u = \eta_1 \delta(t - t_1) + \ldots + \eta_k \delta(t - t_k)$$

Здесь t_j — моменты, когда функция

$$\varphi(t) = |lF^{-1}(t)\alpha|, \qquad \alpha = \{\alpha_{11}, 0, \ldots, \alpha_{1n}, 0\}$$

имеет строгий максимум, $F(t)$ — фундаментальная матрица системы (2.7), а $l = \{l_1, \ldots, l_{2n}\}$ — решение задачи $\min_l \max_\tau |lF^{-1}(t)\alpha|$ при $(x_0 l) =$

$= -1$. Можно проверить, что при условиях (2.11) и $\lambda_j \neq 0$ функция $\varphi(t)$ при любом выборе l может иметь лишь изолированные максимумы. Таким образом, при условиях (2.11) и $\lambda_j \neq 0$ можно построить последовательность импульсов силы, направленной по первой координате, такую, что система (2.7) будет переводиться этими импульсами из точки x° в точку $x = 0$.

Пусть условия (2.11) выполнены, тогда можно найти функцию

$$u = p_1 x_1 + \ldots + p_{2n} x_{2n} \tag{2.12}$$

такую, что система (2.7), (2.12) будет асимптотически устойчивой. Следовательно, по теореме Ляпунова [1] (стр. 127) система (1.2), (1.3) также будет асимптотически устойчива.

Пусть условия (2.11) не выполнены. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \quad \alpha_{1i_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, p), \qquad p < n, \quad \alpha_{1j} \neq 0, \quad j \neq i_k$$

Тогда, если среди чисел λ_{i_k} есть по крайней мере одно положительное, то при любом выборе u (2.12) система (2.7) будет иметь среди корней ее характеристического уравнения положительные числа. Следовательно, по теореме Ляпунова система (2.7) при любом выборе u (2.12) неустойчива.

Если же все числа λ_{i_k} отрицательны, то (2.7) можно рассмотреть, как две независимые системы вида

$$x_{2i_k-1}' = \lambda_{i_k} x_{2i_k}, \qquad x_{2i_k}' = x_{2i_k-1} \qquad (k = 1, \ldots, p) \tag{2.13}$$

$$x_{2i_k-1}' = \lambda_i x_{2j} + \alpha_{1j} u, \qquad x_{2j}' = x_{2j-1} \qquad (j \neq i_k) \tag{2.14}$$

Для системы (2.14) условия (2.11) выполнены, поэтому можно выбрать

$$u = p_1 x_1 + \ldots + p_{2n} x_{2n} \qquad (j \neq i_k) \tag{2.15}$$

такое, чтобы система (2.14), (2.15) была асимптотически устойчива. При таком выборе u система первого приближения (2.7), (2.12) устойчива и среди ее характеристических чисел есть чисто мнимые. Устойчивость полной системы определяется тогда членами высшего порядка малости [1] (стр. 137) [8].

Если все $\lambda_{i_k} \leqslant 0$ и если по крайней мере одно $\lambda_{i_k} = 0$, опять получим критический случай; устойчивость полной системы опять определяется членами высшего порядка малости.

Случай 2. Пусть

$$\lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+p} = \lambda, \qquad \alpha_{1j} \neq 0 \tag{2.16}$$

по крайней мере для одного $j = k, \ldots, k + p$. Не нарушая общности, будем предполагать, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{p+1} = \lambda, \qquad \alpha_{1p+1} \neq 0 \tag{2.17}$$

Совершим преобразование координат

$$z_j = \sum_{k=1}^{p+1} c_{jk} y_k, \qquad z_i = y_i \qquad (j = 1, \ldots, p+1;\ i = p+2, \ldots, n) \quad (2.18)$$

и потребуем, чтобы

$$\sum_{k=1}^{p+1} c_{ik}\alpha_{1k} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p), \qquad \sum_{k=1}^{p+1} c_{p+1k}\alpha_{1k} \neq 0 \quad (2.19)$$

Систему (2.4) приведем к виду

$$z_i'' = \lambda z_i \qquad (i = 1, \ldots, p), \qquad z''_{p+1} = \lambda z_{p+1} + \sum_{k=1}^{p+1} c_{p+1k}\alpha_{1k} u \quad (2.20)$$

$$z_i'' = \lambda_i z_i + \alpha_{1i} u \qquad (i = p+2, \ldots, n)$$

Из (2.20) следует, что если $\lambda > 0$, линейное приближение (2.7), (2.12) неустойчиво, следовательно [1] (стр. 128), полная система также неустойчива.

Если $\lambda \leqslant 0$, то устойчивость системы определяется членами высшего порядка малости.

Известно, что задача 1.2 разрешима, если разрешима задача 1.1 в линейном приближении [9].

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. Если условия (2.11) выполнены, то задачи 1.1 и 1.2 разрешимы. Если условия (2.11) не выполнены, причем:

1) $\alpha_{1i_k} = 0$ $(k = 1, \ldots, p)$ и хотя бы одно из чисел $\lambda_{i_k} > 0$, то задачи 1.1 и 1.2 не разрешимы, при $\lambda_{i_k} \leqslant 0$, но $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq i_k$, $j = i_k$ имеет место критический случай, т. е. возможность разрешимости задачи 1.1 зависит от членов высшего порядка малости;

2) если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{p+1} = \lambda$, но $\alpha_{1p+1} \neq 0$, то задачи 1.1 и 1.2 не имеют решения при $\lambda > 0$ и приводятся к критическим случаям, если $\lambda \leqslant 0$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\alpha_{1i} \neq 0$ при $i > p+1$.

Рассмотрим теперь линейное приближение задачи 1.2. Если предполагать [10,11], что функционал (1.4) в первом приближении принимает вид

$$I_2 = \int_0^\infty \Big[\sum_{i,k=1}^{2n} d_{ik} x_i x_k + du^2 \Big] dt \quad (2.21)$$

и минимизировать его, получим [12] уравнения для определения u (2.12) и функции Ляпунова V, обеспечивающей асимптотическую устойчивость системы (2.7), (2.12) в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial V(x)}{\partial x_{2k-1}} (\lambda_k x_{2k} + \alpha_{1k} u) + \frac{\partial V(x)}{\partial x_{2k}} x_{2k-1} \right] + \sum_{i,k=1}^{2n} d_{ik} x_i x_k + du^2 = 0 \quad (2.22)$$

$$u = -\frac{1}{2d} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_{2k-1}} \alpha_{1k}$$

Функцию V можно искать в виде квадратичной формы, и определить коэффициенты, приравнивая нулю коэффициенты членов в (2.22).

Полученные алгебраические уравнения имеют решения тогда и только тогда, когда существует управление $u = p_1 x_1 + \ldots + p_{2n} x_{2n}$, удовлетворяющее условиям задачи 1.1 в линейном приближении. Это указывает путь вычисления управления.

§ 3. Задача о наблюдении в линейном приближении. *Задача* 3.1. Найти $2n \times n$ матрицу $V(\vartheta)$ такую, что

$$\int_{t-\tau}^{t} V(\vartheta) \left\| \begin{matrix} \xi(\vartheta) \\ u(\vartheta) \end{matrix} \right\| d\vartheta = \left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_{2n}(t) \end{matrix} \right\|, \qquad \xi(\vartheta) = \sum_{i=1}^{2n} c_i x_i(\vartheta) \qquad (-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0) \tag{3.1}$$

где $x_i(\vartheta)$ будут решением системы (2.7), а $u(\vartheta)$ определяется из (2.12).

Известно, что решение задачи 3.1 дается леммой 4.2 [9], при условиях, которые в стационарном случае принимают следующий вид [5,9,13]. Система (2.7) наблюдаема тогда и только тогда, когда система векторов

$$C, B^*C, \ldots, B^{*2n-1}C \tag{3.2}$$

линейно независима. Здесь

$$C = (c_1, \ldots, c_{2n}), \qquad B^* = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n & 0 \end{matrix} \right\|$$

Рассмотрим когда случай $C = (c_1, 0, c_3, 0, \ldots, c_{2n-1}, 0)$, что соответствует наблюдению системы по некоторой скорости, и случай когда $C = (0, c_2, \ldots, 0, c_{2n})$, что соответствует наблюдению по некоторой криволинейной координате.

Условиями наблюдаемости в первом случае будут

$$c_{2i-1} \neq 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (i, j = 1, \ldots, n), \quad \lambda_i \neq 0 \tag{3.3}$$

а во втором

$$c_{2i} \neq 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j) \tag{3.4}$$

При выполнении условий (3.3) или (3.4) матрица $V(\vartheta)$ определяется по формуле (4.20) работы [9] или в других возможных видах, указанных в цитированной статье.

Отметим в частности, что при условиях (3.3) и (3.4) первый столбец матрицы $V(\vartheta)$ может быть выбран ([9], равенство (4.30)) в виде линейной комбинации δ-функций

$$V_{i1}(\vartheta) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^i \, \delta(\vartheta - \tau_k^i)$$

для конечного числа моментов τ_k^i.

Это означает, что в данный момент состояние $x_1(t), \ldots, x_{2n}(t)$ системы $dx_{2i-1}/dt = \lambda_i^* x_{2i}$, $dx_{2i}/dt = x_{2i-1}$ при условиях (3.3) или (3.4) может быть восстановлено по измерениям величины $\xi(t+\vartheta)$ в дискретные моменты времени $t_k^i = t - \tau_k^i$. Из рассуждений § 2 и 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Механическая система (2.3) наблюдаема по величине

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} c_{2i} x_{2i}$$

тогда и только тогда, когда она управляема силой, направленной в пространстве $\{x_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ по вектору C, система наблюдаема по скорости

$$\xi' = \sum_{i=1}^{n} c_{2i-1} x_{2i-1}$$

тогда и только тогда, когда она управляема силой, направленной в пространстве $\{x_i\}$ по вектору C, и когда все $\lambda_j \neq 0$.

Будем обозначать буквами ζ_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Пусть ζ_i $(i = 1, \ldots, n)$ криволинейные координаты, в которых кинетическая энергия выражается в виде суммы квадратов. Тогда приведенное выше утверждение формулируется следующим образом.

Механическая система наблюдаема по координате $\xi = \zeta_i$ тогда и только тогда, когда она управляема воздействием по этой координате, система наблюдаема по скорости $\xi' = \zeta_i'$ тогда и только тогда, когда она управляема воздействием по координате ζ_i и все $\lambda_j \neq 0$. Это является конкретным выражением принципа дуальности между управлением и наблюдением [6,13] для рассматриваемых механических систем.

§ 4. Решение задач 1.1 и 1.2 с неполной информацией. Предположим, что невозможно в каждый момент времени измерять x_{2i} $(i = 1, \ldots, 2n)$, а оказывается возможным измерять лишь некоторые функции от них $w_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{2n})$, не разрешимые однозначно относительно x_i и удовлетворяющие условию $\varphi_i(0, \ldots, 0) = 0$. Требуется найти управление, удовлетворяющее условиям задач 1.1 и 1.2.

Следуя [9], ищем управление в виде

$$\frac{du}{dt} = U\,[w_1(t+\vartheta), \ldots, w_l(t+\vartheta), u(t+\vartheta)] \tag{4.1}$$

где U — функционал, определенный на непрерывных функциях $w_i(\vartheta)$, $u(\vartheta)$ $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0,\ \tau = \mathrm{const} > 0,\ i = 1, \ldots, l)$. Решение линейной задачи, соответствующей задаче 1.1, существует при условиях, указанных в статье [9], и может определиться равенством (4.1) работы [9]. Эти условия в данном случае совпадают с условиями (2.11), если наблюдение ведется по координате, или с условиями (2.11) и (3.3), если наблюдение ведется по скорости. Из разрешимости задачи 1.1 в линейном приближении следует разрешимость задачи 1.2. В свою очередь разрешимость задач 1.1 и 1.2 в линейном приближении означает разрешимость соответствующих нелинейных задач [9].

Теорема 4.1. Пусть система (1.2) наблюдается по координате

$$w_i = c_{i1}x_1 + \ldots + c_{in}x_n + \mu_i (x, x')$$

где μ_i и μ_i^* — члены высшего порядка малости. Если выполнено условие (2.11), то движение $s_1 = \ldots = s_n = 0$ может быть стабилизировано управлением

$$\frac{du}{dt} = U [w (t + \vartheta), u (t + \vartheta)] \tag{4.2}$$

Пусть система (1.2) наблюдается по скорости

$$w_i = c_{i1}x_1' + \ldots + c_{in}x_n' + \mu_i^* (x, x')$$

Если выполнены условия (2.11) и (3.3), то движение $s_1' = \ldots s_n' = 0$, может быть стабилизировано управлением (4.2).

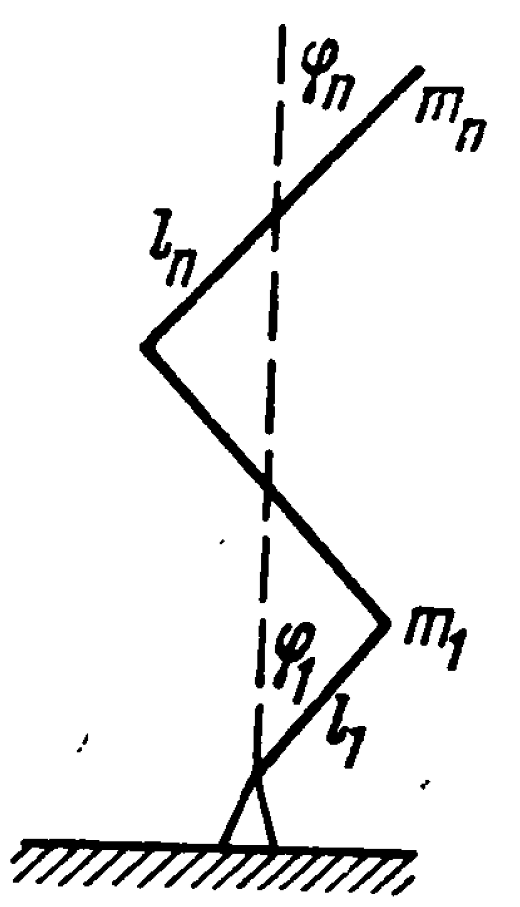
§ 5. *Пример.* Предположим, имеется n стержней с длинами $l_1, \ldots, l_n$, соединенных шарнирно (см. фигуру). В точках крепления стержней и в свободном конце последнего имеются точечные массы $m_1, \ldots, m_n$. Массами стержней пренебрегаем. Предположим, что система находится в вертикальной плоскости; в начальный момент отклонения от вертикали и скорости точек системы считаем малыми величинами.

Пусть к k-й точке приложена сила, имеющая горизонтальное направление и лежащая в данной вертикальной плоскости. Выясним возможность стабилизации в смысле задачи 1.1 и возможность наблюдения в смысле задачи 3.1.

Выберем за независимые координаты отклонения x_i точек m_i от вертикали (фиг. 1). Имеем в первом приближении

$$2T = \sum_{i=i}^{n} m_i x_i'^2, \quad 2V = -g \sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{l_k} (x_k - x_{k-1})^2 \tag{5.1}$$

Здесь T и V — кинетическая и потенциальная энергии. Уравнения движения принимают вид



$$\begin{aligned} x''_1 &= \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_2 \\ x_2'' &= -\gamma_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \beta_2 x_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n'' &= -\gamma_{n-1} x_{n-1} + \alpha_n x_n \end{aligned} \tag{5.2}$$

где

$$\alpha_i = \frac{g}{m_i l_i} \sum_{k=i}^{n} m_k + \frac{g}{m_i l_{i+1}} \sum_{k=i+1}^{n} m_k$$

$$\beta_i = \frac{g}{m_i l_{l+1}} \sum_{k=i+1}^{n} m_k, \qquad \gamma_{i-1} = \frac{g}{m_i l_i} \sum_{k=1}^{n} m_k \tag{5.3}$$

Уравнение (2.5) в данном случае принимает вид

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & -\beta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & \alpha_2 - \lambda & -\beta_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & -\gamma_2 & \alpha_3 - \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{n-1} - \lambda & -\beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\gamma_{n-1} & \alpha_n - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.4}$$

Из (5.3) следует, что $\beta_i\gamma_i > 0$, следовательно, [14] (стр. 82) корни уравнения (5.4) различные, и ни одна координата любого собственного вектора рассматриваемой матрицы не может быть нулем; поэтому

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \quad \alpha_{kj} \neq 0, \quad \lambda_i \neq 0 \quad (k, i, j = 1, \ldots, n; \ i \neq j) \quad (V \text{ определенно-отрицательна})$$

Это значит, что рассматриваемая система управляема по любой координате x_i и наблюдаема по любой координате x_i и скорости x_i'. Следовательно, справедливы следующие выводы.

1. Система (см. фигуру) стабилизируема силой

$$u\,(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_u')$$

2. Система (см. фигуру) наблюдаема по координате

$$w = x_i + \mu_i\,(x_1, \ldots, x_n)$$

или эта же система наблюдаема по скорости

$$w = x_i' + \mu_i^*\,(x_1', \ldots, x_n')$$

и стабилизируема управлением (4.2).

3. Система (см. фигуру) в линейном приближении может быть приведена в состояние $x_i = 0$ за конечное время T наложением последовательности импульсов силы u.

Примечание. Рассматриваемая стержневая система будет системой Штурма [14]. Приведенные выше выводы распространяются на штурмовские системы общего вида.

Автор признателен Н. Н. Красовскому за ценные советы.

Поступила 6 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения, Гостехиздат, 1955.
3. Курцвейль Я. К аналитическому конструированию регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII, № 6.
4. Кириллова Ф. М. К задаче об аналитическом конструировании регуляторов. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
5. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Труды 1-го Конгресса ИФАК, Изд. АН СССР, 1961, т. 1.
6. Красовский Н. Н. К проблеме существования оптимальных траекторий. Изв. высш. учебн. завед. МВО СССР, 1959, № 6 (13).
7. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. ПММ, 1959, т. XXII, вып. 4.
8. Гальперин Е. А., Красовский Н. Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 6.
9. Красовский Н. Н. О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 4.
10. Альбрехт Э. Г. Об оптимальной стабилизации нелинейных систем. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.
11. Альбрехт Э. Г. К теории аналитического конструирования регуляторов. Тезисы докладов межвуз. конф. по устойчивости движений и аналитической механике. Изд. Казанск. авиац. ин-та, Казань, 1962.
12. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII, № 4.
13. Kalman R. E. New Methods and Results in Sinear Prediction and Filtering Theory. RIAS Technical Report, 1961, No 1.
14. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы ядра и малые колебания механических систем. Гостехиздат, 1950.