Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

О СИНХРОНИЗАЦИИ ПОЧТИ ОДИНАКОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К СИСТЕМАМ ЛЯПУНОВА

Р. Ф. Нагаев

(Ленинград)

Теория синхронизации изучает поведение взаимосвязанных систем объектов. В простейшем случае ее задачей является выяснение условий существования и устойчивости периодических режимов. Общая постановка задачи, а также многочисленные примеры явления синхронизации в природе и технике даны в работе И. И. Блехмана [1]. Задача о внутренней синхронизации системы динамических объектов под действием слабых линейных связей рассматривалась нами в статье [2].

Ниже предполагается, что движение изолированного объекта описывается системой дифференциальных уравнений, близкой к системе Ляпунова [3]. Следовательно, в изолированном объекте для порождающего приближения, вообще говоря, реализуем неизохронный периодический режим, период которого изменяется в некотором конечном или бесконечном диапазоне в зависимости от некоторого параметра, связанного так или иначе с начальными условиями. Для возможности настройки объекта на частоту внешнего периодического возмущения, передаваемого на объект с помощью слабой связи, в этом случае требуется лишь, чтобы эта частота была включена в частотный диапазон изолированного объекта. При внутренней синхронизации, т. е. синхронизации автономной в целом взаимосвязанной системы объектов, требуется, естественно, пересечение их частотных диапазонов. По-видимому, тенденция к синхронизации наиболее сильна для систем именно таких объектов.

Работа состоит из четырех параграфов. В первых двух задача рассмотрена в общей постановке для случая почти одинаковых объектов. Выводятся условия существования и необходимые условия устойчивости синхронных режимов. В двух последних параграфах полученные результаты используются при исследовании синхронизации и самофазировки системы почти консервативных объектов, установленных на несущем теле довольно общего вида. Применительно к такой системе устанавливается обобщенный интегральный критерий устойчивости.

1. В отличие от работы [2], будем выписывать уравнения движения взаимосвязанной системы объектов с исключенными координатами связи. Иными словами, будем полагать, что координаты связи представлены в виде известных функций от координат объектов. Впрочем, для случая отсутствия резонанса по координатам связи это можно показать совершенно строго.

Таким образом, будем предполагать, что движение взаимосвязанных объектов описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dx_{si}}{dt} = X_s(x_i) + \mu f_{si}(x_1, \ldots, x_m, t, \mu) \qquad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, n \\ i = 1, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Здесь m — общее число объектов, а n — порядок системы, описывающей движение каждого объекта. В системе (1.1) для краткости обозначения

$$X_s(x_i) = X_s(x_{1i}, \ldots, x_{ni})$$

$$f_{si}(x_1, \ldots, x_m, t, \mu) = f_{si}(x_{11}, \ldots; x_{n1}; \ldots; x_{1m}, \ldots, x_{nm}; t, \mu)$$

При $\mu = 0$ имеем m не связанных одна с другой одинаковых систем Ляпунова

$$\frac{dx_{si}^{\circ}}{dt} = X_s(x_i^{\circ}) \qquad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

допускающих семейство периодических решений

$$x_{si}^{\circ} = \varphi_s(t + \alpha_i, c) \tag{1.3}$$

периода $T = T(c)$, зависящее от $m + 1$ произвольных вещественных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, c и определенное в некоторой области фазового пространства системы.

Функции связи f_{si} полагаются непрерывными по переменным $x_1, \ldots, x_m$ на всех траекториях порождающего решения (1.3), 2π — периодичными по времени t и аналитическими по положительному параметру μ, если μ меньше некоторого μ_0.

Уравнения в вариациях порождающей системы (1.2)

$$\frac{d\xi_{si}}{dt} = p_{s1}(1 + \alpha_i)\,\xi_{1i} + \ldots + p_{sn}(t + \alpha_i)\,\xi_{ni} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, n \\ i = 1, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

где

$$p_{sr}(t) = \frac{\partial X_s[\varphi(t, c)]}{\partial \varphi_r(t, c)} \tag{1.5}$$

допускают m независимых $T(c)$ — периодических решений

$$\xi_{si}^{(l)} = \varphi_s^{\boldsymbol{\cdot}}(t + \alpha_i, c)\,\delta_{il} \qquad (l = 1, \ldots, m) \tag{1.6}$$

которые получаются дифференцированием (1.3) по фазам $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ последовательно, и m линейно возрастающих решений

$$\xi_{si}^{(l)} = \left[-\frac{t + \alpha_i}{T}\frac{dT(c)}{dc}\varphi_s^{\boldsymbol{\cdot}}(t + \alpha_i, c) + y_s(t + \alpha_i, c)\right]\delta_{il} \qquad (l = 1, \ldots, m) \tag{1.7}$$

Последнее решение может быть получено, если за решение одной из подсистем (1.4) принять производную порождающего решения (1.3) по c, а решения других подсистем положить равными нулю. $T(c)$ — периодическая функция $y_s(t, c)$ имеет вид

$$y_s(t, c) = \frac{\partial}{\partial c'}\varphi_s\left[\frac{T(c')}{T(c)}t, c'\right]\Big|_{c'=c} \tag{1.8}$$

и будет решением неоднородной системы

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sn}y_n + \frac{1}{T(c)}\frac{dT(c)}{dc}\varphi_s^{\boldsymbol{\cdot}}(t, c) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.9}$$

при начальных условиях

$$y_s(0, c) = \frac{\partial \varphi_s(0, c)}{\partial c} \tag{1.10}$$

Система уравнений, сопряженная с (1.4)

$$\frac{d\zeta_{si}}{dt} + p_{1s}(t + \alpha_i)\,\zeta_{1i} + \ldots + p_{ns}(t + \alpha_i)\,\zeta_{ni} = 0 \qquad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, n \\ i = 1, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

также имеет m периодических решений с периодом $T(c)$

$$\zeta_{si}^{(l)} = \psi_s(t + \alpha_i, c)\,\delta_{il} \qquad (l = 1, \ldots, m) \tag{1.12}$$

которые вследствие существования $T(c)$-периодического решения у системы (1.9) удовлетворяют условию

$$\sum_{s=1}^{n} \varphi_s^{\bullet}(t, c)\,\psi_s(t, c) = 0 \tag{1.13}$$

Если c является простым корнем уравнения

$$T(c) = 2\pi \tag{1.14}$$

то условие существования синхронного режима во взаимосвязанной системе объектов [3] запишется в виде

$$P_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\int_0^{2\pi} f_{si}\,[\varphi(t+\alpha_1, c), \ldots, \varphi(t+\alpha_m, c);\ t, 0]\times$$
$$\times\,\psi_s(t+\alpha_i, c)\,\delta_{il}\,dt = 0 \quad (l = 1, \ldots, m)$$

или окончательно

$$P_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) =$$
$$= \sum_{s=1}^{n}\int_0^{2\pi} f_{sl}\,[\varphi(t+\alpha_1, c), \ldots, \varphi(t+\alpha_m, c);\ t, 0]\,\psi_s(t+\alpha_l, c)\,dt = 0$$
$$(l = 1, \ldots, m) \tag{1.15}$$

Если при условии некратности корня уравнения (1.14) система (1.15) допускает решение, для которого выполняется неравенство

$$\frac{\partial(P_1, \ldots, P_m)}{\partial(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} \neq 0 \tag{1.16}$$

то этому решению при достаточно малом μ действительно соответствует синхронное движение взаимосвязанной системы с единичной частотой, последовательные приближения к которому можно разыскивать в виде формального ряда по степеням μ

$$x_{si}(t) = \varphi_s(t+\alpha_i, c) + \mu x_{si}^{(1)} + \mu^2 \ldots \tag{1.17}$$

2. Переходя к исследованию устойчивости решения (1.16), составляем уравнения в вариациях полной системы (1.1)

$$\frac{dz_{si}}{dt} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}(t+\alpha_i)\,z_{ri} + \mu\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q_{sr}^{(ij)} z_{rj} + \mu^2 \ldots \quad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, n \\ i = 0, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

где

$$q_{sr}^{(ij)} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 X_s(x_i)}{\partial x_{ri}\,\partial x_{\alpha j}}\right) x_{\alpha j}^{(1)} + \left(\frac{\partial f_{si}(x_1, \ldots, x_m, t, 0)}{\partial x_{rj}}\right) \tag{2.2}$$

Круглые скобки в (2.2) означают, что соответствующие величины вычислены для порождающего приближения. Используя подстановку Н. А. Артемьева [4], будем искать частные решения системы (2.1) в виде

$$z_{si} = e^{a(\mu)t}\eta_{si} \tag{2.3}$$

где η_{si} — 2π-периодическое решение системы

$$\frac{d\eta_{si}}{dt} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}(t+\alpha_i)\,\eta_{ri} + \mu\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q_{sr}^{(ij)}\eta_{rj} - a(\mu)\,\eta_{si} + \mu^2 \ldots \tag{2.4}$$

Ограничиваясь рассмотрением приближений лишь к критическим корням, будем полагать $a(0) = 0$. Тогда при $\mu = 0$ система (2.4) обратится в систему в вариациях порождающей системы (1.4), которая допускает m групп решений (1.6) и (1.7), соответствующих критическому нулевому $2m$-кратному корню. Таким образом, все показатели элементарных делителей характеристического определителя порождающей системы, соответствующих нулевому корню, равны двум. Следовательно [4], характеристические показатели системы (2.1), обращающиеся при $\mu = 0$ в нуль, нужно искать в виде рядов по степеням $\mu^{1/2}$

$$a(\mu) = a\mu^{1/2} + a_2\mu + a_3\mu^{3/2} + \ldots \tag{2.5}$$

Если 2π-периодическое решение системы (2.4) искать в виде ряда

$$\eta_{si} = \eta_{si}^{(0)} + \mu^{1/2}\eta_{si}^{(1)} + \mu\eta_{si}^{(2)} + \mu^{3/2} \ldots \tag{2.6}$$

то периодическое нулевое приближение имеет вид

$$\eta_{si}^{(0)} = M_i\varphi_s^{\cdot}(t + \alpha_i, c) \qquad (M_i = \mathrm{const}) \tag{2.7}$$

Система уравнений для определения первого приближения

$$\frac{d\eta_{si}^{(1)}}{dt} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}(t + \alpha_i)\,\eta_{ri}^{(1)} - a_1 M_i\varphi_s^{\cdot}(t + \alpha_i, c) \tag{2.8}$$

согласно (1.9), также допускает 2π-периодическое решение

$$\eta_{si}^{(1)} = -a_1 M_i \frac{2\pi}{dT(c)/dc} y_s(t + \alpha_i, c) + N_i\varphi_s^{\cdot}(t + \alpha_i, c) \tag{2.9}$$

зависящее от $2m$ постоянных M_i и N_i.

Для $\eta_{si}^{(2)}$ получаем уравнения

$$\frac{d\eta_{si}^{(2)}}{dt} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}(t + \alpha_i)\,\eta_{ri}^{(2)} + \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_j q_{sr}^{(ij)}\varphi_r^{\cdot}(t + \alpha_j, c) + \tag{2.10}$$

$$+ a_1^2 M_i \frac{2\pi}{dT(c)/dc} y_s(t + \alpha_i, c) - a_2 M_i\varphi_s^{\cdot}(t + \alpha_i, c) - a_1 N_i\varphi_s^{\cdot}(t + \alpha_i, c)$$

Выпишем без доказательства известные тождества [3]

$$\sum_{s,\, r=1}^{n} \int_0^{2\pi} q_{sr}^{(lj)}\varphi_r^{\cdot}(t + \alpha_j, c)\,\psi_s(t + \alpha_l, c)\,dt = \frac{\partial P_l}{\partial \alpha_j} \tag{2.11}$$

введем в соответствии с (1.13) следующее обозначение

$$\sum_{s=1}^{n} y_s(t, c)\,\psi_s(t, c) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial\varphi_s(0, c)}{\partial c}\psi_s(0, c) = k \tag{2.12}$$

Тогда условия существования 2π-периодического решения системы (2.10) примут вид

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial P_l}{\partial \alpha_j} + \varkappa\delta_{lj}\right)M_j = 0 \qquad (l = 1, \ldots, m) \quad \left(\varkappa = a_1^2\frac{4\pi^2 k}{dT(c)/dc}\right) \tag{2.13}$$

Условие нетривиальности решения системы (2.13) имеет вид

$$\Delta(\varkappa) = \begin{vmatrix} \partial P_1/\partial\alpha_1 - \varkappa & \ldots & \partial P_1/\partial\alpha_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial P_m/\partial\alpha_1 & \ldots & \partial P_m/\partial\alpha_m - \varkappa \end{vmatrix} = 0 \tag{2.14}$$

Очевидно, что для устойчивости рассматриваемого синхронного режима необходимо, чтобы все корни уравнения (2.14) были вещественны и удовлетворяли условию

$$4\pi^2 a_1^2 = \frac{1}{R}\frac{dT(c)}{dc}\varkappa < 0 \tag{2.15}$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости могут быть получены после вычисления вторых приближений a_2 к характеристическим показателям, а также оценки характеристических показателей, обращающихся при $\mu = 0$ в чисто мнимые корни уравнений в вариациях порождающей системы.

Не останавливаясь, однако, на этих вопросах, рассмотрим кратко случай внутренней синхронизации, предполагающей автономность взаимосвязанной системы объектов в целом. В этом случае функции f_{si} не зависят от времени явно и соотношение (1.14) не имеет места. Условия существования синхронного режима в системе

$$P_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, c) = \qquad (l = 1, \ldots, m) \tag{2.16}$$
$$= \sum_{s=1}^{n} \int_0^{T(c)} f_{sl}\,[\varphi(t+\alpha_1, c), \ldots, \varphi(t+\alpha_m, c); 0]\,\psi_s(t+\alpha_l, c)\,dt = 0$$

удовлетворяют соотношениям

$$P_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, c) = P_l(\alpha_1 + \alpha, \ldots, \alpha_m + \alpha, c) \tag{2.17}$$

где α, ввобще говоря, произвольная постоянная. Эти условия служат для однозначного определения параметра c и разностей порождающих фаз $\alpha_1 - \alpha_m, \ldots, \alpha_{m-1} - \alpha_m$. Необходимые условия устойчивости по-прежнему имеют вид (2.15). Однако один из корней определителя (2.14) ввиду (2.17) обращается в нуль, что, впрочем, не влияет на устойчивость на основании теоремы Андронова — Витта об устойчивости периодических решений автономных систем [5].

3. Рассмотрим систему из m почти одинаковых объектов, расположенных на несущем теле общего вида, которое в этом случае будет играть роль связи. Динамические свойства несущего тела считаем известными. Будем полагать, что для любых двух точек M и N несущего тела однозначно может быть определен симметричный тензор второго ранга $\mathbf{K}(M, N) = \mathbf{K}(N, M)$ такой, что перемещение $\mathbf{u}$ точки M под действием силы $\mathbf{Q}$, приложенной в точке N, будет равно

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(M, N)\,\mathbf{Q} \tag{3.1}$$

Объекты, вообще говоря, близки к консервативным и расположены в точках M_i $(i = 1, \ldots, m)$ несущего тела. При этом, пренебрегая влиянием инерции поворота объекта, будем характеризовать воздействие i-го объекта на связь единственно инерционной силой $\mathbf{F}_i$.

Уравнение малых колебаний связи в форме Фредгольма имеет вид

$$\mathbf{u}(M, t) = \int_{(V)} \mathbf{K}(M, N)\Big[\rho(N)\frac{\partial^2 \mathbf{u}(N, t)}{\partial t^2} + \mathbf{R} + \tag{3.2}$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \mathbf{F}_i \delta(N, M_i) + \mathbf{f}(N, t)\Big]\,dV_N$$

где $\mathbf{u}(M, t)$ — перемещение точки M несущего тела, $\rho(N)$ — масса единицы объема, $\mathbf{R}$ — плотность сил диссипации, $\mathbf{f}(N, t)$ — плотность внешнего 2π-периодического по времени воздействия на несущее тело. Интегрирование ведется по всему объему V несущего тела, причем $\delta(N, M)$ — обобщенная дельта-функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{(\sigma)} \delta(N, M)\, dV_N = \begin{cases} 1 & \text{если } M \in \sigma \\ 0 & \text{если } M \overline{\in} \sigma \end{cases}$$

Движение почти одинаковых объектов в подвижной жестко связанной с некоторой малой окрестностью точки крепления системе координат будем характеризовать относительными обобщенными координатами q_{si} $(s = 1, \ldots, n)$. Кинетическая энергия i-го объекта по определению будет

$$T_i = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_{\nu i}\left[\frac{d\mathbf{r}_{\nu i}(q_i)}{dt} + \frac{\partial \mathbf{u}(M_i, t)}{\partial t}\right]^2 =$$

$$= T_{0i}(q_i, q_i^{\cdot}) + \frac{\partial \mathbf{u}(M_i, t)}{\partial t}\frac{d\mathbf{S}(q_i)}{dt} + \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{u}(M_i, t)}{\partial t}\right)^2 \tag{3.3}$$

где $\mathbf{r}_{\nu i}(q_i)$ — радиус-вектор элементарной массы $m_{\nu i}$ объекта с номером i в подвижной системе координат (3.4)

$$m_i = \sum_{\nu=1}^{N} m_{\nu i}, \quad \mathbf{S}_i(q_i) = \sum_{\nu=1}^{N} m_{\nu i}\,\mathbf{r}_{\nu i}(q_i), \quad T_{0i}(q_i, q_i^{\cdot}) = \frac{1}{2}\sum_{s,r=1}^{n} A_{sr}^{(i)}(q_i)\, q_{si}^{\cdot} q_{ri}^{\cdot}$$

Очевидно, что m_i есть полная масса i-го объекта, $\mathbf{S}_i(q_i)$ — векторный статический момент объекта относительно точки крепления, а $T_{0i}(q_i, q_i^{\cdot})$— относительная кинетическая энергия, являющаяся однородной знакоопределенной положительной квадратичной формой обобщенных скоростей $q_{si}^{\cdot}$. Полагая, что потенциальная энергия объекта зависит только от относительных обобщенных координат

$$\Pi_i = \Pi_i(q_i) \tag{3.5}$$

получаем выражение для силы, с которой объект действует на несущее тело в следующем виде:

$$F = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_i}{\partial(\partial u^{\cdot}(M_i, t)/\partial t)} = \frac{d^2\mathbf{S}_i(q_i)}{dt^2} + m_i\frac{\partial^2 \mathbf{u}(M_i, t)}{\partial t^2} \tag{3.6}$$

Уравнение малых колебаний несущего тела (3.2) перепишется так:

$$\mathbf{u}(M, t) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{K}(M, M_i)\, \mathbf{S}_i^{\cdot\cdot}(a_i) + \tag{3.7}$$

$$+ \int\limits_{(V)} \mathrm{K}(M, N)\cdot\left\{\mathbf{R} + \mathbf{f}(N, t) + [\rho(N) + \sum_{i=1}^{m}\delta(N, M_i)\, m_i]\frac{\partial^2\mathbf{u}(N, t)}{\partial t^2}\right\} dV_N$$

Далее будем полагать, что тензор влияния несущего тела может быть представлен в виде билинейного разложения

$$\mathrm{K}(M, N) = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\theta_j(M)\,\theta_j(N)}{\lambda_j} \tag{3.8}$$

где λ_j — собственные числа, а $\theta_j(M)$ — векторные собственные функции тела, удовлетворяющие условиям ортогональности и нормировки

$$\int\limits_{(V)} [\rho(N) + \sum_{i=1}^{m} m_i \delta(N, M_i)]\, \theta_j(N) \cdot \theta_l(N)\, dV_N = \delta_{jl} \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, \infty) \quad (3.9)$$

Будем искать решение уравнения (3.7) в виде ряда

$$\mathbf{u}(M, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(M)\, u_j(t) \qquad (3.10)$$

Введем следующее предположение о характере сил демпфирования колебаний несущего тела

$$\int\limits_{(V)} \theta_j(N) \cdot \mathbf{R}\, dV_N = \beta \lambda_j u_j^{\cdot} \qquad (3.11)$$

где β — положительная постоянная. Эта гипотеза предполагает в определенном смысле пропорциональность силы внутреннего сопротивления скорости изменения восстанавливающей силы и в частном случае обыкновенной балки вырождается в известную гипотезу Фохта. Для чисто качественной оценки влияния сил сопротивления такое допущение вполне приемлемо, тем более, что коэффициент β в дальнейшем будем полагать величиной порядка малого параметра связи.

После подстановки ряда (3.10) в уравнение (3.7) и преобразований при учете (3.8), (3.9) и (3.11) приходим к бесконечной системе:

$$u_j^{\cdot\cdot} + \beta \lambda_j u_j^{\cdot} + \lambda_j u_j + \sum_{i=1}^{m} \theta_j(M_j) \cdot \mathrm{S}_i^{\cdot\cdot}(q_i) + f_j(t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots) \quad (3.12)$$

Здесь

$$f_j(t) = \int\limits_{(V)} \theta_j(N)\, \mathbf{f}(N, t)\, dV_N \qquad (3.13)$$

Уравнения Лагранжа для движений объектов, составляемые обычным методом при учете соотношений

$$\frac{\partial}{\partial q_{si}^{\cdot}} \frac{d\mathrm{S}_i(q_i)}{dt} = \frac{\partial \mathrm{S}_i(q_i)}{\partial q_{si}}, \qquad \frac{d}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{S}_i(q_i)}{dt_{si}} = \frac{\partial}{\partial q_{si}} \frac{d\mathrm{S}_i(q_i)}{dt} \qquad (3.14)$$

имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{0i}(q_i, q_i^{\cdot})}{\partial q_{si}^{\cdot}} - \frac{\partial T_{0i}(q_i, q_i^{\cdot})}{\partial q_{si}} + \frac{\partial \Pi_i(q_i)}{\partial q_{si}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(M_i) \frac{\partial \mathrm{S}_i(q_i)}{\partial q} u_i^{\cdot\cdot} = Q_{si}(q_i, q_i^{\cdot}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ s = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

причем обобщенные силы Q_{si}, характеризующие приток и убыль энергии, в силу исходного предположения о близости объектов к консервативным, полагаются величинами порядка малого параметра связи.

Введем новые канонические переменные q_{si} и $p_{si} = \partial T_{0i}(q_i, q_i^{\cdot}) / \partial q_{si}^{\cdot}$ и функцию Гамильтона объекта $H_i(q_i, p_i)$. При этом в силу почти одинаковости объектов

$$H_i(q_i, p_i) = H(q_i, p_i) + \Delta H(q_i, p_i), \quad \mathrm{S}_i(q_i) = \mathrm{S}(q_i) + \Delta \mathrm{S}_i(q_i) \qquad (3.16)$$

$$Q_{si}(q_i, q_i^{\cdot}) = Q_s(q_i, q_i^{\cdot}) + \Delta Q_{si}(q_i, q_i^{\cdot})$$

В последних соотношениях вторые слагаемые полагаются величинами порядка малого параметра связи относительно первых. Окончательно уравнения движения взаимосвязанной системы объектов с точностью до величин первого порядка малости включительно имеют вид

$$q_{si}^{\cdot} = \frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial p_{si}} + \left(\frac{\partial \Delta H_i(q_i, p_i)}{\partial p_{si}}\right) \qquad \left(\begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ s = 1, \ldots, n \end{matrix}\right) \tag{3.17}$$

$$p_{si}^{\cdot} = -\frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial q_{si}} + \left(-\frac{\partial \Delta H_i(q_i, p_i)}{\partial q_{si}} + Q_s(q_i, q_i^{\cdot}) - \sum_{j=1}^{\infty} (\theta_i(M_i) \frac{\partial S(q_i)}{\partial q_{si}} u_j^{\cdot\cdot}\right)$$

$$u_j^{\cdot\cdot} + \lambda_j u_j = -\sum_{i=1}^{m} (\theta_j(M_i) S^{\cdot\cdot}(q_i) - f_j(t) - (\beta\lambda_s u_s^{\cdot} + \sum_{i=1}^{m} \theta_j(M_i) \Delta S^{\cdot\cdot}{}_i(q_i))$$

$$(j = 1, 2, \ldots)$$

В (3.17) слагаемые, стоящие в круглых скобках, полагаются малыми, причем группа консервативных членов, отражающих воздействие связи на объект, мала в силу предположения о слабости связей.

4. В порождающем приближении имеем m не связанных одна с другой одинаковых автономных консервативных подсистем

$$(q_{si}^{\circ})^{\cdot} = \frac{\partial H(q_i^{\circ}, p_i^{\circ})}{\partial p_{si}^{\circ}}, \qquad (p_{si}^{\circ})^{\cdot} = -\frac{\partial H(q_i^{\circ}, p_i^{\circ})}{\partial q_{si}^{\circ}} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{4.1}$$

допускающих $T(c)$-периодическое решение

$$q_{si}^{\circ} = q_s(t + \alpha_i, c) \qquad p_{si}^{\circ} = p_s(t + \alpha_i, c) \tag{4.2}$$

Каждая из подсистем (4.1) допускает интеграл энергии, который для рассматриваемого решения (4.2) имеет вид

$$H(q, p) = h(c) \tag{4.3}$$

При этом постоянная энергии h положительна и является аналитической функцией параметра c (см. [3]). Порождающее 2π-периодическое решение (4.1) характеризуется наличием соотношения

$$T(c) = 2\pi \tag{4.4}$$

Если функции $v_j(t)$ и $w_j(t)$ есть 2π-периодические решения уравнений

$$v_j^{\cdot\cdot} + \lambda_j v_j = f_j(t), \qquad w_j^{\cdot\cdot} + \lambda_j w_j = S^{\cdot\cdot}(q) \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{4.5}$$

то для колебаний несущего тела в порождающем приближении имеем

$$u_j^{\circ} = -v_j(t) - \sum_{i=1}^{m} \theta_j(M_i) \cdot w_j(t + \alpha_i) \tag{4.6}$$

Разумеется, предполагается наличие неравенства $\lambda_i \neq k$ (где k — целое число) и тем самым исключается из рассмотрения случай резонанса по одной из нормальных координат несущего тела. Уравнения в вариациях порождающей системы имеют m периодических решений

$$q_s^{\cdot}(t + \alpha_i, C)\,\delta_{ik}, \qquad p_s^{\cdot}(t + \alpha_i, c)\,\delta_{ik} \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

с периодом 2π. Соответственно семейство 2π-периодических решений сопряженной системы будет

$$-p_s^{\cdot}(t + \alpha_i, c)\,\delta_{ik}, \qquad q_s^{\cdot}(t + \alpha_i, c)\,\delta_{ik}$$

Согласно (1.15), система уравнений для определения порождающих фаз $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ после несложных преобразований с учетом того, что

$$\int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \Delta H_i(q, p)}{\partial p_s} p_s^{\cdot} + \frac{\partial \Delta H_i(q, p)}{\partial q_s} q_s^{\cdot} \right\} dt = 0 \tag{4.7}$$

приобретает вид

$$P_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, c) = Q(c) + \Phi_k(\alpha_k, c) + R_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, c) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.8}$$

где

$$Q(c) = \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^{n} Q_s(q, q^{\cdot}) \, q_s^{\cdot} \, dt$$

$$\Phi_k(\alpha_k, c) = \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{S}^{\cdot}[q(t + \alpha_k, c)] \cdot \boldsymbol{\theta}_j(M_k) \, v_j(t) \, dt \tag{4.9}$$

$$R_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, c) = \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{m} \mathrm{S}^{\cdot}[q(t + \alpha_k, c)] \cdot \boldsymbol{\theta}_j(M_k) \, \boldsymbol{\theta}_j(M_r) \cdot \mathbf{w}_j^{\cdot\cdot}(t + \alpha_r) \, dt$$

В случае внутренней синхронизации плотность внешнего воздействия на связь $\mathrm{f}(M, t) = 0$ и, как уже говорилось выше, равенство (4.4) не имеет места. При этом условия существования синхронного режима в системе

$$P_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, c) = Q(c) + R_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, c) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.10}$$

надо ввиду (2.18) рассматривать как систему уравнений относительно неизвестных c, $\alpha_1 - \alpha_m, \ldots, \alpha_{m-1} - \alpha_m$. Функции Q и R_k в (4.10) определяются согласно (4.9), однако интегрировать при этом надо в пределах от 0 до $T(c)$. Обращаясь к исследованию величин R_k, проинтегрируем последнее соотношение (4.9) по частям, после чего при учете (4.5) получаем

$$R_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, c) = -\int_0^{2T(c)} -\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{m} [\mathbf{w}_j^{\cdot\cdot}(t + \alpha_k) + \lambda_j w_j^{\cdot}(t + \alpha_k)] \cdot \boldsymbol{\theta}_j(M_k) \times \\ \times \boldsymbol{\theta}_j(M_r) \cdot w_j^{\cdot}(t + \alpha_r) \, dt \tag{4.11}$$

Из (4.11) немедленно следует, что

$$\sum_{k=1}^{m} R_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, c) = -\int_0^{T(c)} \sum_{j=1}^{\infty} (u_j^{\cdot\cdot\circ} + \lambda_j u_j^{\circ}) \, u_j^{\cdot\circ} dt = 0 \tag{4.12}$$

Если теперь просуммировать (4.10) по k, то ввиду (4.12) будем иметь

$$Q(c) = 0 \tag{4.13}$$

Частота синхронного режима, очевидно, при появлении связи в порождающем приближении не сдвигается. Уравнения для определения порождающих фаз

$$R_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, c) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.14}$$

ввиду (4.11) имеют частное решение $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \alpha$, если

$$\boldsymbol{\theta}_j(\mathrm{M}_k) = \boldsymbol{\theta}_j(\mathrm{M}_r) \, b_{kr}^{(j)}$$

где $b_{kr}^{(j)}$ — некоторые скалярные множители.

Составляя выражение для средней за период функции Лагранжа несущего тела в порождающем приближении

$$\Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, c) = \int_0^{T(c)} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (u_j^{\cdot \circ 2} - \lambda_j u_j^{\circ 2})\, dt \qquad (4.15)$$

легко убеждаемся в наличии равенств

$$R_k = -\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_k} \qquad (k = 1, \ldots, m) \qquad (4.16)$$

Переходя к исследованию устойчивости, заметим, что константа k для консервативных объектов приобретает отчетливый физический смысл. Действительно, на основании (2.12), (4.1) и (4.3)

$$k = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\bigg|_{t=0} \frac{\partial q_s(0, c)}{\partial c} + \frac{\partial H}{\partial p_s}\bigg|_{t=0} \frac{\partial p_s(0, c)}{\partial c} \right) = \frac{dh(c)}{dc} \qquad (4.17)$$

Таким образом, для устойчивости найденного синхронного режима во взаимосвязанной автономной системе необходимо, чтобы все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha_1^2} - \varkappa \ldots \dfrac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_m} \ldots \dfrac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha_m^2} - \varkappa \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.18)$$

кроме одного, равного нулю, удовлетворяли условию

$$\frac{dT(c)/dc}{dh(c)/dc}\, \varkappa < 0 \qquad (4.19)$$

Вещественность корней определителя (4.18) обеспечивается его симметричностью.

В случае механических вибраторов [1] период вращения убывает с ростом энергии вибратора. Следовательно $dT/dh < 0$, и приходим к условию минимума, впервые сформулированному И. И. Блехманом и Б. П. Лавровым [6], а затем доказанному И. И. Блехманом [7] применительно к системам механических вибраторов или их математических аналогов. Между прочим, это условие в упомянутой задаче ввиду специфического, отличного от принятого в настоящей работе способа введения малого параметра, является не только необходимым, но и достаточным.

Поступила 2 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И. И. Проблема синхронизации динамических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
2. Нагаев Р. Ф. О внутренней синхронизации почти одинаковых динамических объектов под действием слабых линейных связей. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
3. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1955.
4. Кушуль М. Я. О квазигармонических системах, близких к системам с постоянными коэффициентами. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
5. Андронов А. А. и Витт А. А. Об устойчивости по Ляпунову. Ж. эксперим. и теор. физ., 1933, т. 3, вып. 5.
6. Блехман И. И. и Лавров Б. П. Об одном интегральном критерии устойчивости. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
7. Блехман И. И. Обоснование интегрального признака устойчивости движения. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.