Прикладная математика и механика. Том 28. 1964

ОДНОЖИДКОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Э. Г. Сахновский

(Ленинград)

Известно, что ларморовское вращение заряженных частиц в сильном магнитном поле приводит к анизотропии явлений переноса в ионизованном газе. При этом метод механики сплошных сред не дает информации о тензоре вязких напряжений и векторе потока тепла в законах сохранения количества движения и энергии [1]. Эту информацию можно получить методами статистической механики; поэтому в последние годы появился ряд исследований, рассматривающих при помощи кинетической теории газов явления переноса в плазме. В работах [2,3-8] в рамках различных предположений получены системы уравнений, описывающие поведение в магнитном поле полностью ионизованной плазмы как в двужидкостном приближении, когда плазма представлена в виде проникающих друг в друга ионного и электронного газов, так и в одножидкостном, когда рассматривается смесь в целом. Влиянию нейтральных частиц, подчиняющихся максвелловскому распределению, на процессы переноса в однородном магнитном поле посвящена работа [9]. Наконец, в [10-11] в приближении «13 моментов» метода Грэда найдена замкнутая система уравнений переноса в магнитном поле отдельно для электронного, ионного и нейтрального газов, составляющих частично ионизованную плазму.

Ниже строится замкнутая система уравнений, описывающая поведение такой плазмы как целого.

Из найденной системы вытекают, как частные случаи, известные уравнения изотропной магнитной гидродинамики, а также одножидкостные уравнения динамики полностью ионизованного газа. Наряду с этим, полученные результаты позволяют исследовать некоторые другие предельные случаи, например течения слабо ионизованного газа.

Как и в работе [10], при записи уравнений делаются следующие предположения.

1) Рассматривается одноатомный газ.

2) Взаимодействие между частицами (в том числе и кулоновское) описывается в терминах парных столкновений.

3) Явления, связанные с неупругими столкновениями, не учитываются.

4) Макроскопические параметры газа мало меняются на расстояниях порядка эффективной длины свободного пробега и за времена порядка времени между столкновениями.

5) Температуры $T_e = T_i = T_a = T$; здесь T_α — температура, индекс α указывает компоненту (электрона, иона, нейтрала).

6) Предполагается, что $\sqrt{m_e / m_i} \ll 1$, где m_α — масса α-частицы.

7) Газ предполагается электрически квазинейтральным, т. е. $n_e e_e + n_i e_i + n_a e_a \approx 0$, где n_α и e_α — парциальная числовая плотность и заряд α-компоненты.

Полагая $e_i = -Ze_e = Ze$, имеем условие для концентрации $n_e \approx Zn_i$.

Возможность существования слабого объемного заряда учитывается в уравнениях Максвелла через $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_e$, где $\rho_e = e\,(Zn_i - n_e)$ — объемный заряд, Z — зарядовое число, $\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции.

§ 1. Тензор вязких напряжений. Известно [12], что для изотропной среды в отсутствие магнитного поля тензор вязких напряжений π^{rm} просто связан с тензором скорости сдвигов

$$\pi^{rm} = -\eta e^{rm}, \qquad e^{rm} = \frac{\partial u^r}{\partial x_m} + \frac{\partial u^m}{\partial x^r} - \frac{2}{3}\delta^{rm}\frac{\partial u^e}{\partial x_e} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — средняя массовая скорость газа, δ^{rm} — символ Кронекера, а скалярный коэффициент η носит название коэффициента вязкости. В условиях анизотропной среды эта связь становится более общей, оставаясь линейной, так как рассматриваются малые отклонения от равновесия.

Симметричный тензор e^{rm} со следом, равным нулю, имеет пять линейно независимых составляющих, поэтому общий вид линейной однородной зависимости между π^{rm} и e^{rm} содержит пять независимых коэффициентов пропорциональности; их естественно называть коэффициентами вязкости такой анизотропной среды.

Следуя С. И. Брагинскому [2], введем тензоры

$$\begin{aligned}
W_0^{rm} &= {}^3/_2\,(b^r b^m - {}^1/_3\,\delta^{rm})\,(b^\mu b^\nu - {}^1/_3\,\delta^{\mu\nu})\,e^{\mu\nu} && (\mathbf{b} = \mathbf{B}/B)\\
W_1^{rm} &= (\delta_\perp^{r\mu}\delta_\perp^{m\nu} + {}^1/_2\,\delta_\perp^{rm} b^\mu b^\nu)\,e^{\mu\nu} && (\delta_\perp^{rm} = \delta^{rm} - b^r b^m)\\
W_2^{rm} &= (\delta_\perp^{r\mu} b^m b^\nu + \delta_\perp^{m\nu} b^r b^\mu)\,e^{\mu\nu}\\
W_3^{rm} &= {}^1/_2\,(\delta_\perp^{r\mu}\varepsilon^{m\gamma\nu} + \delta_\perp^{m\nu}\varepsilon^{r\gamma\mu})\,b^\gamma e^{\mu\nu}\\
W_4^{rm} &= (b^r b^\mu \varepsilon^{m\gamma\nu} + b^m b^\nu \varepsilon^{r\gamma\mu})\,b^\gamma e^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции, $\varepsilon^{rm\gamma}$ — перестановочный тензор. Кроме того,

$$W_0^{rm} + W_1^{rm} + W_2^{rm} = e^{rm}, \qquad W_k^{rm} W_n^{rm} = 0 \qquad \text{при } k \neq n \tag{1.3}$$

Тогда, решая уравнения (2.1), (2.6) работы [10] и суммируя по всем компонентам, будем иметь для тензора вязких напряжений в произвольной декартовой системе координат выражение

$$\pi^{rm} = -\eta^{(0)} W_0^{rm} - \eta^{(1)} W_1^{rm} - \eta^{(2)} W_2^{rm} + \eta^{(3)} W_3^{rm} + \eta^{(4)} W_4^{rm} \tag{1.4}$$

Пять коэффициентов вязкости выражаются через парциальные коэффициенты вязкости электронов, ионов и нейтралов

$$\eta^{(k)} = \sum_{\alpha = e,\, i,\, a} \eta_\alpha^{(k)} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{1.5}$$

При этом последние имеют следующий вид.

1) Коэффициенты вязкости электронов

$$\begin{aligned}
\eta_e^{(0)} &= \eta_e, \qquad \eta_e^{(1)}(\omega_e) = \eta_e^{(2)}(2\omega_e) = \frac{\eta_e^{(0)}}{1 + {}^{16}/_9\,\omega_e^2\tau_e^2}\\
\eta_e^{(3)}(\omega_e) &= \eta_e^{(4)}(2\omega_e) = -\frac{{}^4/_3\,\omega_e\tau_e\eta_e^{(0)}}{1 + {}^{16}/_9\,\omega_e^2\tau_e^2}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

2) Коэффициенты вязкости ионов

$$\begin{aligned}
\eta_i^{(0)} &= (1 + \alpha\tau_a\tau_{ia}^{-1})\,\theta\eta_i, \qquad \eta_i^{(1)}(\omega_i) = \eta_i^{(2)}(2\omega_i) = \frac{\eta_i^{(0)}}{1 + {}^{16}/_9\,\omega_i^2\tau_i^2\theta^2}\\
\eta_i^{(3)}(\omega_i) &= \eta_i^{(4)}(2\omega_i) = \frac{{}^4/_3\,\omega_i\tau_i\theta\eta_i^{(0)}}{1 + {}^{16}/_9\,\omega_i^2\tau_i^2\theta^2}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

3) Коэффициенты вязкости нейтралов

$$\eta_a^{(0)} = (1 + \alpha\tau_i\tau_{ai}^{-1})\,\theta\,\eta_a, \qquad \eta_a^{(1)}(\omega_i) = \eta_a^{(2)}(2\omega_i) = \frac{\eta_a^{(0)} + {}^{16}/_9\,\omega_i^2\tau_i^2\theta^2\eta_a}{1 + {}^{16}/_9\,\omega_i^2\tau_i^2\theta^2}$$

$$\eta_a^{(3)}(\omega_i) = \eta_a^{(4)}(2\omega_i) = \frac{{}^4/_3\,\omega_i\tau_i\theta}{1 + {}^{16}/_9\,\omega_i^2\tau_i^2\theta^2}\,(\eta_a^{(0)} - \eta_a) \tag{1.8}$$

$$\theta^{-1} = 1 - \alpha^2\tau_a\tau_i\tau_{ia}^{-1}\tau_{ai}^{-1}, \qquad \eta_\alpha = {}^2/_3\, n_\alpha kT\tau_\alpha \qquad (\alpha = e,\, i,\, a)$$

Здесь k — постоянная Больцмана, а остальные обозначения такие же, как в работе [10] [1].

Представим тензор вязких напряжений через одножидкостные параметры. Выразим входящие в η_α, τ_α и $\tau_{\alpha\beta}$ числовые плотности частиц n_α через массовую плотность газа ρ и его степень ионизации s.

$$\rho = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha, \qquad s = \frac{n_i}{n_i + n_a}$$

Используя условие для числовой плотности смеси $n = \sum_\alpha n_\alpha$, имеем

$$n_e = Zn_i = \frac{Zs}{1 + Zs}\,n, \quad n_a = \frac{1 - s}{1 + Zs}\,n, \quad n = \frac{1 + Zs}{Zsm_e + m_i}\,\rho \approx \frac{1 + Zs}{m_i}\,\rho \tag{1.9}$$

Таким образом, с точностью до величин порядка m_e/m_i находим

$$n_e = Zn_i = \frac{Zs}{m_i}\,\rho, \qquad n_a = \frac{1 - s}{m_i}\,\rho \tag{1.10}$$

Нетрудно видеть, что существует три характерных направления переноса импульса, в которых вязкость газа различна. Первым является перенос вдоль магнитного поля проекции импульса на орт магнитного поля. Оно характеризуется коэффициентом $\eta^{(0)}(T, s, \rho)$, равным вязкости частично ионизованного газа в отсутствие магнитного поля. В двух других направлениях, характеризуемых коэффициентами $\eta^{(1)}(T, s, \rho, B) = \eta^{(2)}(T, s, \rho, 2B)$ и $\eta^{(3)}(T, s, \rho, B) = \eta^{(4)}(T, s, \rho, 2B)$, вязкость замагниченной частично ионизованной плазмы резко уменьшается.

Рассмотрим теперь тензор вязких напряжений для частных случаев слабо ионизованного и полностью ионизованного газа. Полагая в (1.5) $s \to 0$, после простых выкладок будем иметь

$$\eta^{(k)} = \begin{cases} [\eta_a]_{s=0} + O(s) & \text{при } k = 0, 1, 2 \\ O(s) & \text{при } k = 3, 4 \end{cases} \qquad \left([\eta_a]_{s=0} = \frac{5kT}{8\Omega_{aa}^{2}(2)}\right) \tag{1.11}$$

Это совпадает с коэффициентом вязкости простого газа по Чепмену — Каулингу [12]. Отсюда следует, что при слабой ионизации газа в рамках сделанных предположений можно пользоваться гидродинамическим тензором вязких напряжений.

Прежде чем перейти к случаю полной ионизации газа, отметим, что при любых s, $\omega_e\tau_e$ и $\omega_i\tau_i\theta$ вкладом электронов в тензор вязких напряжений с точностью до величин порядка $\sqrt{m_e/m_i}$ можно пренебречь. Это

[1] В работе [10] в выражениях для τ_α^{-1} и $(\tau_\alpha^*)^{-1}$ имеется опечатка. В слагаемых вида $0.4\ \tau_{\alpha\alpha}^{-1}$ опущен множитель $A_{\alpha\alpha}^*$.

следует из оценки отношений $\eta_e^{(k)} / \eta_i^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$. Таким образом, вместо (1.5) достаточно брать

$$\eta^{(k)} = \sum_{\alpha=i,\, a} \eta_\alpha^{(k)} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{1.12}$$

Отсюда $\eta^{(k)} = \eta_i^{(k)}$ при $s = 1$ (см. [2, 7]). Тогда полагая $s = 1$ в (1.7) и записывая (1.4) в специальной системе координат с осью z, параллельной $\mathbf{b}$, получим выражения, совпадающие (с точностью до числовых множителей перед коэффициентами) с данными в [7, 8]. Разница обусловлена различием методов решения уравнения Больцмана [2, 10], а именно во второй работе — «13 моментное» приближение Грэда, а в первой — разложение поправки к максвелловской функции распределения по полиномам Сонина, в котором учитываются два члена.

§ 2. Вектор потока тепла. Как видно из формул (1.13), (3.3) и (3.8) работы [10], для того чтобы записать вектор потока тепла частично ионизованного газа в одножидкостном приближении, необходимо иметь выражения для диффузионных скоростей $\mathbf{w}_\alpha$ составляющих его компонент. Пользуясь условием $\Sigma m_\alpha n_\alpha \mathbf{w}_\alpha = 0$ и выражением для тока проводимости $\mathbf{j} = \Sigma n_\alpha e_\alpha \mathbf{w}_\alpha = -n_e e\,(\mathbf{w}_e - \mathbf{w}_i)$, с точностью до величин порядка m_e / m_i будем иметь

$$\mathbf{w}_e = -\frac{m_i}{Ze s\rho}\,\mathbf{j} + (1 - s)\,\mathbf{V}_i, \qquad \mathbf{w}_i = -\frac{m_e}{e\rho}\,\mathbf{j} + (1 - s)\,\mathbf{V}_i$$

$$\mathbf{w}_a = -\frac{m_e}{e\rho}\,j - s\mathbf{V}_i \tag{2.1}$$

Скорость «скольжения» ионов $\mathbf{V}_i = \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_a$ дается выражением (4.8) работы [10], которое перепишем, используя одножидкостные параметры и учитывая вязкий член

$$\begin{gathered}\mathbf{V}_i = \varepsilon\,\frac{m_i}{Ze s\rho}\,[\mathbf{j} + (1 - s)\,\omega_e\tau_{ea}\,(\mathbf{j}\times\mathbf{b})] - \\ -\frac{2\tau_{ia}}{s\rho}\left[\frac{Z+1}{(1+Zs)^2}\,p\,\nabla s + \frac{Zs\,(1-s)}{1+Zs}\,\nabla p - s\,\mathrm{div}\,\pi + \mathrm{div}\,\pi_i\right] - \\ -\frac{1+Zs}{p}\left[\varepsilon\zeta_{ea}\,\frac{\mathbf{h}_e}{Zs} + \frac{1}{2}\,\zeta_{ia}\left(\frac{\mathbf{h}_i}{s} - \frac{\mathbf{h}_a}{1-s}\right)\right] \qquad \left(\varepsilon = 2Z\,\frac{m_e\tau_{ea}^{-1}}{m_i\tau_{ia}^{-1}} \sim Z\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \ll 1\right)\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь p — давление, $\mathbf{h}_\alpha$ — вектор относительного потока тепла α-компоненты [10].

Тогда, пренебрегая в силу имеющихся предположений, влиянием вязкости на тепловой поток и принимая во внимание сделанные в [10] замечания относительно термодиффузионных членов в (2.2), из (1.13), (3.4) и (3.5) работы [10] можно получить следующее общее выражение для вектора потока тепла:

$$\begin{gathered}\mathbf{q} = -\lambda^T\nabla T - \lambda^{T\parallel}\,\mathbf{b}\,(\nabla T\cdot\mathbf{b}) - \lambda^{T\perp}\,(\nabla T\times\mathbf{b}) - \\ -(\lambda^p + \lambda_g^p)\,\nabla p - \lambda^{p\parallel}\,\mathbf{b}\,(\nabla p\cdot\mathbf{b}) - \lambda^{p\perp}\,(\nabla p\times\mathbf{b}) - \\ -(\lambda^s + \lambda_g^s)\,\nabla s - \lambda^{s\parallel}\,\mathbf{b}\,(\nabla s\cdot\mathbf{b}) - \lambda^{s\perp}\,(\nabla s\times\mathbf{b}) - \\ -(\lambda^j + \lambda_g^j)\,\mathbf{j} - \lambda^{j\parallel}\,\mathbf{b}\,(\mathbf{j}\cdot\mathbf{b}) - (\lambda^{j\perp} + \lambda_g^{j\perp})\,(\mathbf{j}\times\mathbf{b})\end{gathered} \tag{2.3}$$

Относительный тепловой поток $\mathbf{h}$ характеризуется коэффициентами теплопроводности

$$\mathbf{h} = \mathbf{q} - \frac{5}{2} \sum_{\alpha=e,\, i,\, a} n_\alpha kT \mathbf{w}_\alpha \tag{2.4}$$

$$\lambda^k (T, s, \rho, B) = \sum_{\alpha=e,\, i,\, a} \lambda_\alpha^k \quad (k = T, T_\parallel, T_\perp;\ p, p_\parallel, p_\perp;\ s, s_\parallel, s_\perp;\ j, j_\parallel, j_\perp)$$

Здесь парциальные коэффициенты теплопроводности электронов, ионов и нейтралов имеют следующий вид:

1) Коэффициенты теплопроводности электронов

$$\begin{gathered}
\lambda_e^T = \lambda_e / [1 + (\omega_e\tau_e^*)^2], \qquad \lambda_e^{T\parallel} = (\omega_e\tau_e^*)^2 \lambda_e^T, \qquad \lambda_e^{T\perp} = -\omega_e\tau_e^*\lambda_e^T \\
\lambda_e^p = -b_e\lambda_e^T, \qquad \lambda_e^{p\parallel} = -b_e\lambda_e^{T\parallel}, \qquad \lambda_e^{p\perp} = -b_e\lambda_e^{T\perp}, \qquad \lambda_e^s = -c_e\lambda_e^T \\
\lambda_e^{s\parallel} = -c_e\lambda_e^{T\parallel}, \qquad \lambda_e^{s\perp} = -c_e\lambda_e^{T\perp}, \qquad \lambda_e^j = -[d_e - (\omega_e\tau_e^*)^2 d_e'] \lambda_e^T \\
\lambda_e^{j\parallel} = -(d_e + d_e')\lambda_e^{T\parallel}, \qquad \lambda_e^{j\perp} = -(d_e + d_e')\lambda_e^{T\perp}
\end{gathered} \tag{2.5}$$

где

$$\begin{gathered}
b_e = \frac{m_i\zeta_{ea}(1-s)}{k(1+Zs)\rho}\,\varepsilon, \qquad c_e = \frac{\zeta_{ea}(Z+1)\,T}{Z(1+Zs)\,s}\,\varepsilon \\
d_e = \frac{m_e m_i}{Z\rho s e k}\left(\frac{\zeta_{ei}}{\tau_{ei}} + \frac{\zeta_{ea}}{\tau_{ea}}\right), \qquad d_e' = \frac{m_e m_i}{Z\rho s e k}\,\frac{1-s}{\tau_e^*}\,\zeta_{ea}\varepsilon
\end{gathered} \tag{2.6}$$

2) Коэффициенты теплопроводности ионов

$$\begin{gathered}
\lambda_i^T = \frac{a_i\vartheta\lambda_i}{1 + (\omega_i\tau_i^*\vartheta)^2}, \qquad \lambda_i^{T\parallel} = (\omega_i\tau_i^*\vartheta)^2 \lambda_i^T, \qquad \lambda_i^{T\perp} = \omega_i\tau_i^*\vartheta\lambda_i^T \\
\lambda_i^p = \frac{b_i}{a_i}\lambda_i^T, \qquad \lambda_i^{p\parallel} = \frac{b_i}{a_i}\lambda_i^{T\parallel}, \qquad \lambda_i^{p\perp} = \frac{b_i}{a_i}\lambda_i^{T\perp}, \qquad \lambda_i^s = \frac{c_i}{a_i}\lambda_i^T \\
\lambda_i^{s\parallel} = \frac{c_i}{a_i}\lambda_i^{T\parallel}, \qquad \lambda_i^{s\perp} = \frac{c_i}{a_i}\lambda_i^{T\perp}, \qquad \lambda_i^j = -[d_i - (\omega_i\tau_i^*\vartheta)^2 d_i']\,\frac{\lambda_i^T}{a_i} \\
\lambda_i^{j\parallel} = -(d_i + d_i')\,\frac{\lambda_i^{T\parallel}}{a_i}, \qquad \lambda_i^{j\perp} = -(d_i + d_i')\,\frac{\lambda_i^{T\perp}}{a_i}
\end{gathered} \tag{2.7}$$

где

$$\begin{gathered}
a_i = 1 + \frac{\beta\tau_a^*}{\tau_{ia}}, \qquad b_i = \left(a_i - \frac{1}{s}\right)\frac{m_i\zeta_{ia}Z\,s}{2k(1+Zs)\rho} \\
c_i = \left(a_i - \frac{1}{s}\right)\frac{\zeta_{ia}(Z+1)\,T}{2(1-s)(1+Zs)}, \qquad d_i = \left(a_i - \frac{1}{s}\right)\frac{m_e m_i\zeta_{ia}}{2ek(1-s)\rho\tau_{ea}} \\
d_i' = \left(a_i - \frac{1}{s}\right)\frac{m_i^2\zeta_{ia}}{2Zek\rho\tau_i^*\vartheta}, \qquad \vartheta^{-1} = 1 - \frac{\beta^2\tau_i^*\tau_a^*}{\tau_{ai}\tau_{ia}}
\end{gathered} \tag{2.8}$$

3) Коэффициенты теплопроводности нейтралов

$$\lambda_a^T = \frac{a_a\vartheta\lambda_a}{1 + (\omega_i\tau_i^*\vartheta)^2} + \lambda_a, \qquad \lambda_a^{T\parallel} = (\omega_i\tau_i^*\vartheta)^2 (\lambda_a^T - \lambda_a)$$

$$\lambda_a^{T\perp} = \omega_i\tau_i^*\vartheta\,(\lambda_a^T - \lambda_a)$$

$$\lambda_a{}^p = \frac{b_a(\lambda_a{}^T - \lambda_a)}{a_a} + \frac{b_a\lambda_a}{a_a - s^{-1}\beta\tau_i{}^*\tau_{ai}^{-1}}, \qquad \lambda_a{}^{p\parallel} = \frac{b_a}{a_a}\lambda_a{}^{T\parallel} \tag{2.9}$$

$$\lambda_a{}^{p\perp} = \frac{b_a}{a_a}\lambda_a{}^{T\perp}, \qquad \lambda_a{}^s = \frac{c_a(\lambda_a{}^T - \lambda_a)}{a_a} + \frac{c_a\lambda_a}{a_a - s^{-1}\beta\tau_i{}^*\tau_{ai}^{-1}}, \qquad \lambda_a{}^{s\parallel} = \frac{c_a}{a_a}\lambda_a{}^{T\parallel}$$

$$\lambda_a{}^{s\perp} = \frac{c_a}{a_a}\lambda_a{}^{T\perp}, \qquad \lambda_a{}^j = -[d_a - (\omega_i\tau_i{}^*\vartheta)^2 d_a{}']\frac{\lambda_a{}^T - \lambda_a}{a_a} - \frac{d_a\lambda_a}{a_a - s^{-1}\beta\tau_i{}^*\tau_{ai}^{-1}}$$

$$\lambda_a{}^{j\parallel} = -(d_a + d_a{}')\frac{\lambda_a{}^{T\parallel}}{a_a}, \qquad \lambda_a{}^{j\perp} = -(d_a + d_a{}')\frac{\lambda_a{}^{T\perp}}{a_a} - \frac{\omega_i\tau_i{}^*\vartheta\lambda_a d_a{}'}{a_a - s^{-1}\beta\tau_i{}^*\tau_{ai}^{-1}}$$

Здесь

$$a_a = \frac{\vartheta - 1}{\vartheta} + \frac{\beta\tau_i{}^*}{\tau_{ai}}, \qquad b_a = \left(a_a - \frac{1}{s}\frac{\beta\tau_i{}^*}{\tau_{ai}}\right)\frac{m_i\zeta_{ia}Zs}{2k(1 + Zs)\rho}$$

$$c_a = \left(a_a - \frac{\beta\tau_i{}^*}{s\tau_{ai}}\right)\frac{\zeta_{ia}(Z + 1)T}{2(1 - s)(1 + Zs)} \tag{2.10}$$

$$d_a = \left(a_a - \frac{\beta\tau_i{}^*}{s\tau_{ai}}\right)\frac{m_e m_i\zeta_{ia}}{2ek(1 - s)\rho\tau_{ea}}, \qquad d_a{}' = \left(a_a - \frac{\beta\tau_i{}^*}{s\tau_{ai}}\right)\frac{m_i{}^2\zeta_{ia}}{2Z\rho ek\tau_i{}^*\vartheta}$$

Остальные обозначения в (2.5), (2.7) и (2.9) такие же, как в [10], причем в выражениях

$$\lambda_\alpha = {}^5/_2\, km_\alpha{}^{-1}n_\alpha kT\tau_\alpha{}^* \text{ и } \tau_\alpha{}^* \qquad (\alpha = e, i, a)$$

ледует заменить n_α через ρ по формулам (1.10).

Коэффициенты теплопроводности $\lambda_g{}^k$ $(k = p, s, j, j_\perp)$, характеризующие разность $\mathbf{q} - \mathbf{h} = {}^5/_2 \sum n_\alpha kT\mathbf{w}_\alpha$, имеют вид

$$\lambda_g{}^p = b_g\lambda_g, \qquad \lambda_g{}^s = c_g\lambda_g, \qquad \lambda_g{}^j = d_g\lambda_g, \qquad \lambda_g{}^{j\perp} = -\omega_i d_g{}'\lambda_g \tag{2.11}$$

где

$$\lambda_g = \frac{5k^2}{2m_i{}^2}\tau_{ai}(1 - s)T\rho, \qquad b_g = \frac{2m_i Z^2 s^2}{k(1 + Zs)\rho}$$

$$c_g = 2Z(Z + 1)\frac{sT}{(1 - s)(1 + Zs)}, \qquad d_g = \frac{m_i{}^2\tau_{ai}^{-1}}{ek(1 - s)\rho}, \qquad d_g{}' = \frac{2m_i{}^2 s}{ek\rho} \tag{2.12}$$

Полагая $B = 0$ в (2.5), получим для частично ионизованного газа

$$\mathbf{q} = -\lambda^T\nabla T - (\lambda^p + \lambda_g{}^p)\nabla p - (\lambda^s + \lambda_g{}^s)\nabla s - (\lambda^j + \lambda_g{}^j)\,\mathbf{j} \tag{2.13}$$

где, кроме обычной теплопроводности в направлении ∇T (неионизованный газ), появляются диффузионные потоки тепла в направлениях ∇p, ∇s и $\mathbf{j}$, причем член $(\lambda^j + \lambda_g{}^j)\,\mathbf{j}$ описывает эффект Томсона. Сравнивая (2.3) и (2.13), видим, что замагниченность частично ионизованного газа приводит к появлению дополнительных потоков тепла в параллельном и поперечном магнитному полю направлениях, причем члены $\lambda^T(\nabla T \times \mathbf{b})$ и $(\lambda^{j\perp} + \lambda_g{}^{j\perp})(\mathbf{j} \times \mathbf{b})$ описывают эффекты Ригги — Ледюка и Эттингсхаузена. Воспользовавшись формулой $\mathbf{k} = \mathbf{b}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{b})$, где $\mathbf{k} = \nabla T, \nabla p, \nabla s, \mathbf{j}$, выделим три характерных взаимноперпендикулярных направления переноса тепла, в которых различны коэффициенты теплопроводности. Так как магнитное поле не влияет на свободный пробег частиц вдоль поля, то и коэффициенты теплопроводности в этом направлении такие же, как и без поля

$$\lambda^k + \lambda^{k\parallel} = \lambda^k|_{B=0} \qquad (k = T,\ p,\ s,\ j)$$

С другой стороны, расстояния, проходимые заряженными частицами без столкновений поперек поля в замагниченной плазме, уменьшаются, поэтому уменьшаются и коэффициенты λ^k и $\lambda^{k\perp}$, характеризующие эти направления. Нетрудно проверить, что в изотропном случае, когда $\omega_e\tau_e^* \ll 1$ и $\omega_i\tau_i^*\vartheta \ll 1$ (т. е. свободный пробег одинаков во всех направлениях), вектор потока тепла принимает вид (2.13).

Следует заметить, что в выражения для коэффициентов относительного потока тепла $\mathbf{h}$, связанных с диффузионным термоэффектом, входят множители ζ_{ea}, ζ_{ia}, ζ_{ei}. В работе [10] указано, что ζ_{ea} и $\zeta_{ia} \leqslant 0.2$ для реальных потенциалов межмолекулярного взаимодействия и обращаются в нуль для «максвелловских» молекул. Поэтому вклад от соответствующих членов в тепловой поток невелик. Несколько больший вклад вносится электронами, ибо входящий в λ_e^j, $\lambda_e^{j\parallel}$ и $\lambda_e^{j\perp}$ множитель $\zeta_{ei} = -0.6$.

Оценим теперь роль электронов и ионов в переносе тепла. Составляя отношения $\lambda_i^k / \lambda_e^k$ ($k = T,\ T_\parallel,\ T_\perp;\ p,\ p_\parallel,\ p_\perp;\ s,\ s_\parallel,\ s_\perp;\ j,\ j_\parallel;\ j_\perp$) и пренебрегая величинами порядка $\sqrt{m_e / m_i}$, убедимся в том, что, в отличие от тензора вязких напряжений, вектор потока тепла в общем случае определяется как ионами, так и электронами. Однако их относительная роль зависит от силы магнитного поля и направления переноса тепла. Действительно:

1) когда $\omega_e\tau_e^* \leqslant O(1)$

$$\frac{\lambda_i^k}{\lambda_e^k} \sim \begin{cases} \ll 1 & \text{при } k = T,\ T_\parallel,\ T_\perp;\ p_\parallel,\ p_\perp;\ s_\parallel,\ s_\perp;\ j,\ j_\parallel,\ j_\perp \\ O(1) & \text{при } k = p,\ s \end{cases} \qquad (2.14)$$

2) когда $\omega_e\tau_e^* = O((m_i / m_e)^{1/4})$

$$\frac{\lambda_i^k}{\lambda_e^k} \sim \begin{cases} \ll 1 & \text{при } k = T_\parallel,\ T_\perp;\ p_\parallel;\ s_\parallel;\ j_\parallel \\ O(1) & \text{при } k = T;\ p_\perp;\ s_\perp;\ j,\ j_\perp \\ \gg 1 & \text{при } k = p,\ s \end{cases} \qquad (2.15)$$

3) когда $\omega_e\tau_e^* \gg 1$ и $\omega_i\tau_i^*\vartheta \geqslant O(1)$

$$\frac{\lambda_i^k}{\lambda_e^k} \sim \begin{cases} \ll 1 & \text{при } k = T_\parallel \\ O(1) & \text{при } k = T_\perp,\ p_\parallel,\ s_\parallel,\ j_\parallel \\ \gg 1 & \text{при } k = T,\ p,\ p_\perp,\ s,\ s_\perp,\ j,\ j_\perp \end{cases} \qquad (2.16)$$

Наконец, рассмотрим вектор потока тепла для частных случаев слабо ионизованного и полностью ионизованного газов. Полагая в (2.5), (2.7), (2.9) и (2.11) $s \to 0$, после несложных выкладок будем иметь

$$\lambda^k = \begin{cases} [\lambda_a]_{s=0} + O(s) & \text{при } k = T \\ O(s) \quad \text{при } k = T_\parallel, T_\perp, p, p_\parallel, p_\perp & \left([\lambda_a]_{s=0} = \dfrac{75k^2T}{32m_a\Omega_{aa}^{2}(2)} = \dfrac{5}{2}\,\dfrac{3k}{2m_a}\,\eta_a\right) \\ \sum\limits_{\alpha=e,i,a,g} [\lambda_\alpha^k]_{s=0} + O(s) & \text{при } k = s,\ s_\parallel,\ s_\perp,\ j,\ j_\parallel,\ j_\perp \end{cases} \qquad (2.17)$$

Это совпадает с коэффициентом теплопроводности простого газа по Чепмену — Каулингу [12].

Полагая в (2.5), (2.7) и (2.11) $s = 1$ и записав (2.3) в специальной системе координат с осью z, параллельной вектору $\mathbf{b}$, для вектора потока тепла полностью ионизованного газа получим выражения, совпадающие (с точностью до числовых множителей) с данными [7, 8].

§ 3. Система уравнений анизотропной магнитогазодинамики. Уравнения сохранения массы, количества движения и энергии в одножидкостном приближении, в рамках сделанных во введении предположений, имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0 \tag{3.1}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p - \operatorname{div} \pi + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \qquad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\right) \tag{3.2}$$

$$\frac{3}{2} \frac{dp}{dt} + \frac{5}{2} p \operatorname{div} \mathbf{u} = -\operatorname{div} \mathbf{q} - \pi^{rm} \frac{\partial u^r}{\partial x_m} + \mathbf{j}(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{3.3}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля, а вместо π^{rm} и $\mathbf{q}$ следует подставить выражения (1.4) и (2.3). Уравнение состояния дается кинетической теорией в виде $p = nkT$. Учитывая связь (1.10) числовой плотности n с массовой плотностью газа, будем иметь

$$p = \frac{1 + Zs}{\mu_a} \rho R T = (1 + Zs) \rho R' T \qquad \left(R' = \frac{R}{\mu_a}\right) \tag{3.4}$$

Здесь $\mu_a \approx \mu_i$ — «молекулярный вес» нейтрального (или ионного) газа, R — газовая постоянная для грамм-молекулы. Воспользовавшись (3.4), (3.1) и определением [12] теплоемкости единицы массы α-газа при постоянном объеме $c_{v_\alpha} = {}^3/_2\,(k/m_\alpha)$, уравнение энергии (3.3) можно представить в виде

$$(1 + Zs)\, c_{v_a} \rho \frac{dT}{dt} + Z c_{v_a} \rho T \frac{ds}{dt} =$$

$$= -p \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{q} - \pi^{rm} \frac{\partial u^r}{\partial x_m} + \mathbf{j}(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{3.5}$$

Вводя тепловую энергию единицы массы α-компоненты смеси $\varepsilon_\alpha = c_{v_\alpha} T$, получим

$$(1 + Zs) \rho \frac{d\varepsilon_a}{dt} + Z \rho \varepsilon_a \frac{ds}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{q} - \pi^{rm} \frac{\partial u^r}{\partial x_m} + \mathbf{j}(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{3.6}$$

Входящую в (1.4), (2.3), (3.3) и (3.4) местную степень ионизации $s(x, y, z, t)$ можно найти из уравнения неразрывности для α-компоненты частично ионизованного газа

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} (n_\alpha \mathbf{w}_\alpha + n_\alpha \mathbf{u}) = 0 \tag{3.7}$$

Учитывая (1.10), (2.1) и (3.1), получим

$$\rho \frac{ds}{dt} - \frac{m_e}{e} \mathbf{j} \nabla s + \operatorname{div} \rho s (1 - s) \mathbf{V}_i = 0 \tag{3.8}$$

Здесь скорость «скольжения» ионов $\mathbf{V}_i$ дается выражением (2.2).

К записанной выше системе уравнений необходимо добавить уравнения электродинамики

$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}=\mathbf{j}+\frac{\partial\varepsilon_0\mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0, \quad \operatorname{div}\varepsilon_0\mathbf{E}=\rho_e \tag{3.9}$$

а также обобщенный закон Ома, который с точностью до величин порядка $\sqrt{m_e/m_i}$ дается формулой (4.10) работы [10]. При этом следует учесть влияние вязкого переноса импульса на диффузию заряженных частиц.

Используя одножидкостные параметры, будем иметь

$$\sigma^j\mathbf{j}+\sigma^{j\parallel}\mathbf{b}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{b})+\sigma^{j\perp}(\mathbf{j}\times\mathbf{b})=$$
$$=\sigma_0\,[\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}+\sigma^T\nabla T+\sigma^{T\parallel}\mathbf{b}(\nabla T\cdot\mathbf{b})+\sigma^{T\perp}(\nabla T\times\mathbf{b})+\sigma^p\nabla p+$$
$$+\sigma^{p\perp}(\nabla p\times\mathbf{b})+\sigma^s\nabla s+\sigma^{s\perp}(\nabla s\times\mathbf{b})+\sigma^{\pi\perp}(s\operatorname{div}\pi-\operatorname{div}\pi_i)\times\mathbf{b}] \tag{3.10}$$

где

$$\sigma_0=\frac{n_e e^2\tau_0}{m_e}=\frac{Ze^2}{m_e m_i}s\rho\tau_0, \qquad \sigma^j=1-\frac{\Delta_0}{1+(\gamma\omega_e\tau_0)^2}+\delta_0(\omega_e\tau_0)^2$$

$$\sigma^{j\parallel}=-\delta_0(\omega_e\tau_0)^2-\frac{\Delta_0(\gamma\omega_e\tau_0)^2}{1+(\gamma\omega_e\tau_0)^2}, \qquad \sigma^{j\perp}=\omega_e\tau_0+\frac{\Delta_0\gamma\omega_e\tau_0}{1+(\gamma\omega_e\tau_0)^2} \tag{3.11}$$

$$\sigma^T=-\frac{\alpha_T k/e}{1+(\gamma\omega_e\tau_0)^2}, \qquad \sigma^{T\parallel}=(\gamma\omega_e\tau_0)^2\sigma^T, \qquad \sigma^{T\perp}=-\gamma\omega_e\tau_0\sigma^T$$

$$\sigma^p=\frac{m_i}{e(1+Zs)\rho}, \qquad \sigma^{p\perp}=-\delta_0\omega_e\tau_0\sigma^p, \qquad \sigma^s=\frac{m_i p}{e(1+Zs)^2 s\rho}$$

$$\sigma^{s\perp}=-\frac{Z+1}{Z}\frac{\delta_0\omega_e\tau_0}{1-s}\sigma^s, \qquad \sigma^{\pi\perp}=\frac{m_i\delta_0\omega_e\tau_0}{Ze(1-s)s\rho}$$

Остальные обозначения такие же, как в работе [10].

Итак, нами получена замкнутая система 17 уравнений (3.1) — (3.4), (3.8), (3.9) и (3.10) с 17 неизвестными $\mathbf{u}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{j}$, p, ρ, s, T и ρ_e, описывающая динамику частично ионизованного газа в магнитном поле.

Поступила 27 XII 1963

Физико-технический ин-т
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. Физматгиз, 1962.
2. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. Сб. Вопросы теории плазмы, Госатомиздат, вып. 1, 1963.
3. Everett Willis L. Generalized magnetohydrodynamic equations for nonequilibrium plasma systems. Rarefied gas dynamics (third symposium), v. I, Academic press, N. Y., London, 1963.
4. Herdan R., Liley B. S. Dynamical equations and transport relationships for a thermal plasma. Rev. Mod. Phys., 1960, v. 32, p. 731.
5. Marshall W. The kinetic theory of an ionized gas. III, AERE NT/R 2419, 1960.
6. Cabannes H. Théorie cinétique des gaz ionisés étude des propriétés d'un courant ionique. ONERA Publ. 101, 1961.
7. Губанов А. И., Лунькин Ю. П. Уравнения магнитной плазмодинамики. Ж. техн. физ., 1960, т. XXX, вып. 9.
8. Баранов В. Б. К выводу уравнений анизотропной магнитной гидродинамики. ПММ, 1962, т. XXVI, № 6.
9. Wright J. P. Effect of neutral particles on the transport properties of a plasma in a uniform magnetic field. Phys. fluids, 1961, v. 4, № 11.
10. Жданов В. М. Явления переноса в частично ионизованном газе. ПММ, 1962, т. XXVI, № 2.
11. Алиевский М. Я., Жданов В. М. Уравнения переноса для неизотермической многосортной плазмы. ПМТФ, 1963, № 5.
12. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. ИЛ, 1960.