Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

О СКАЧКАХ УПЛОТНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЯХ С ВЫРОЖДЕННЫМ ГОДОГРАФОМ

А. Ф. Сидоров

(Свердловск)

Установившиеся и неустановившиеся пространственные течения с вырожденным годографом, не принадлежащие к классу простых волн, изучались в работах [1-3]. При этом области течения в фазовом пространстве $x_1x_2x_3t$ в пространстве годографа u_1, u_2, u_3 соответствовали либо некоторая поверхность — для случая двойных волн, либо некоторая трехмерная область — для тройных волн (u_i— компоненты вектора скорости).

Для политропного газа в предположении изэнтропичности и потенциальности рассматриваемых движений [1-3] были выведены системы уравнений, описывающие соответствующие классы течений в пространстве годографа.

Ниже исследуются течения за пространственными ударными волнами, причем предполагается, что образом поверхности разрыва является некоторая кривая в пространстве годографа, а течение за ударной волной принадлежит к классу двойных волн. Естественно, рассматриваются лишь ударные (детонационные) волны постоянной интенсивности, так как течение за фронтом волны предполагается изэнтропическим. Для системы уравнений, описывающей двойные волны, вдоль некоторых линий в плоскости независимых компонент скорости ставится задача Коши. Рассматриваемая система уравнений оказывается эллиптической за фронтом ударных волн и гиперболической за нормальными детонационными волнами. Показывается, что в стационарном случае за поверхностью сильного разрыва скорость звука как функции компонент скорости такая же, как и в случае конического автомодельного течения. Это дает возможность получить некоторые точные решения для установившегося пространственного обтекания некоторых тел специальной формы при наличии ударных фронтов.

Течения за поверхностью сильного разрыва в классе плоских нестационарных двойных волн исследовались также в работах [4-5][1].

1. Систему уравнений, описывающую нестационарные пространственные двойные волны, можно записать в следующем виде [2, 3]

$$\begin{aligned} R_{11}\Psi_{22} - 2R_{12}\Psi_{12} + R_{22}\Psi_{11} &= 0 \\ R_{11}\Lambda_{22} - 2R_{12}\Lambda_{12} + R_{22}\Lambda_{11} &= 0 \\ R_{11}X_{22} - 2R_{12}X_{12} + R_{22}X_{11} &= 0 \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Здесь

$$R_{ik} = -[\Lambda_i - \Psi\Psi_i - u_i](\Lambda_k - \Psi\Psi_k - u_k) + \theta(\delta_{ik} + \Psi_i\Psi_k) \qquad (1.2)$$

$$(i,\ k = 1, 2,\ \delta_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k,\ \delta_{ii} = 1)$$

$$\Psi_{ik} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial u_i \partial u_k},\ \Lambda_{ik} = \frac{\partial^2\Lambda}{\partial u_i \partial u_k},\ X_{ik} = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_k},\ \Psi_i = \frac{\partial\Psi}{\partial u_i},\ \Lambda_i = \frac{\partial\Lambda}{\partial u_i},\ X_i = \frac{\partial X}{\partial u_i}$$

$$\theta = \frac{1}{\varkappa}\left[\Lambda - \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + \Psi^2)\right], \qquad \varkappa = \frac{1}{\gamma - 1} \qquad (1.3)$$

$$u_3 = \Psi(u_1, u_2) \qquad (1.4)$$

[1] А. Ф. Сидоров. Некоторые точные решения нестационарной многомерной газовой динамики, Диссертация, Институт Гидродинамики СО АН СССР, 1963.

Течение считается изэнтропическим; уравнение состояния берется в виде

$$p = a^2\rho^\gamma, \quad \theta = c^2, \qquad a = \mathrm{const}$$

Здесь p — давление, γ — показатель адиабаты, ρ — плотность и c — скорость звука.

Компоненты скорости u_1 и u_2 считаются функционально независимыми. После решения системы уравнений (1.1) для функций Ψ, Λ и X течение в фазовом пространстве $x_1x_2x_3t$ находится из соотношений

$$\frac{\partial\nabla}{\partial u_i} = x_i + \Psi_i x_3 \; (i = 1, 2), \quad \nabla = \Lambda(u_1, u_2)\, t + \mathrm{X}(u_1, u_2) \tag{1.5}$$

Здесь ∇ — функция «размещения», связанная с потенциалом скоростей φ соотношением

$$\nabla = \sum_k u_k x_k - \varphi \tag{1.6}$$

Пусть пространственная ударная волна, пока произвольной формы, распространяется по неподвижному однородному газу ($u_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ и $\rho = \mathrm{const}$) с постоянной нормальной скоростью D. Из условий Гюгонио для этого случая вытекает, что скачки энтропии S, модуля скорости $|\mathbf{u}|$ и скорости звука c вдоль поверхности разрыва L постоянны. Пусть

$$u_1^2 + u_2^2 + \Psi^2 = A^2 = \mathrm{const} \quad \text{на } L \tag{1.7}$$

Рассмотрим следующую задачу. Каким произволом в решении обладают уравнения гидродинамики и какие свойства характеризуют поверхность разрыва, если ударной волне соответствует некоторая кривая l на сфере (1.7), а течение за фронтом волны принадлежит к классу потенциальных двойных волн. Одновременно с этим будет выяснен вопрос о постановке задач для системы уравнений, соответствующей двойным волнам. Зададим уравнение проекции кривой l на плоскость u_1u_2 в виде

$$u_2 = f(u_1) \tag{1.8}$$

Это всегда можно сделать не умаляя общности. Кривая l тогда определяется уравнениями (1.7) и (1.8), а движение поверхности разрыва определяется соотношениями

$$\Lambda_i t + \mathrm{X}_i = x_i + \Psi_i x_3 \qquad (i = 1, 2) \tag{1.9}$$

вытекающими из (1.5), где вместо u_2 подставлено его выражение через u_1 согласно (1.8).

Рассмотрим произвольный момент времени $t = t_0$ и найдем выражения для двух линейно независимых векторов $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$, лежащих в касательной плоскости к поверхности разрыва, выражение для нормали $\mathbf{n}$ к поверхности разрыва и нормальную скорость ее движения D.

Из (1.9), считая, что поверхность задана параметрически выражениями $x_i = \Phi_i(s, v)$ $(s = u_1, \; v = x_3)$, получим

$$\boldsymbol{\tau}_1 = (\tau_{1s}, \tau_{2s}, 0), \quad \boldsymbol{\tau}_2 = (-\Psi_1, -\Psi_2, 1) \tag{1.10}$$

$$\tau_{is} = t_0(\Lambda_{i1} + \Lambda_{i2}f') + (\mathrm{X}_{i1} + \mathrm{X}_{i2}f') - (\Psi_{i1} + \Psi_{i2}f')\, x_3 \quad (i = 1, 2) \tag{1.11}$$

Для нормали $\mathbf{n}$, так как газ перед фронтом ударной волны покоится, будем иметь

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{u}|}(u_1, u_2, \Psi) \tag{1.12}$$

Наконец, нормальную скорость D, записав уравнения (1.9) в виде $F_i(x_1, x_2, x_3, t, s) = 0$ $(i = 1, 2)$, можно найти из соотношения

$$D = \left|\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(t, s)}\right|\left[\sum_k\left(\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_k, s)}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{1.13}$$

Условия Гюгонио вместе с условиями

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}_i = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{1.14}$$

и уравнением (1.13), где $D = \mathrm{const}$ то же, что и в условиях Гюгонио, дают все соотношения, которые должны выполняться на поверхности разрыва для данного случая. Перейдем к их анализу. Условия (1.14) дают

$$\tau_{1s}u_1 + \tau_{2s}u_2 = 0, \qquad \Psi - u_1\Psi_1 - u_2\Psi_2 = 0 \tag{1.15}$$

Подставим в первое из этих уравнений выражения (1.10) для τ_{is}; тогда, пользуясь тем, что t_0 и x_3 произвольны, находим, что рассматриваемое уравнение эквивалентно трем уравнениям

$$\begin{gathered} u_1(\Psi_{11} + \Psi_{12}f') + u_2(\Psi_{21} + \Psi_{22}f') = 0 \\ u_1(\Lambda_{11} + \Lambda_{12}f') + u_2(\Lambda_{21} + \Lambda_{22}f') = 0 \\ u_1(X_{11} + X_{12}f') + u_2(X_{21} + X_{22}f') = 0 \end{gathered} \tag{1.16}$$

имеющим место вдоль кривой $u_2 = f(u_1)$.

Соотношение (1.13) при помощи (1.15) легко привести к виду

$$D = \frac{|\Lambda_1 u_1 + \Lambda_2 u_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \Psi^2}} \tag{1.17}$$

Интегрируя уравнения (1.16) вдоль $u_2 = f(u_2)$, получим интегралы

$$\Psi = u_1\Psi_1 + u_2\Psi_2 + K_1, \quad \Lambda = u_1\Lambda_1 + u_2\Lambda_2 + K_2, \quad X = u_1X_1 + u_2X_2 + K_3 \quad (K_i = \mathrm{const}) \tag{1.18}$$

Таким образом, из уравнений (1.3), (1.7), (1.17), (1.18) получаем на линии $u_2 = f(u_1)$ следующие начальные данные задачи Коши:

для функции Ψ

$$u_1^2 + f^2 + \Psi^2 = A^2, \quad \Psi = u_1\Psi_1 + u_2\Psi_2, \quad K_1 = 0 \tag{1.19}$$

для функции Λ

$$\begin{gathered} u_1\Lambda_1 + u_2\Lambda_2 = \pm DA, \qquad K_2 = B^2 \mp DA \\ \Lambda = B^2 = \mathrm{const}, \qquad B^2 = \varkappa\theta + {}^1/_2 A^2 \end{gathered} \tag{1.20}$$

Для функции X имеем лишь одно уравнение (1.18) и, следовательно, располагаем в ее определении однофункциональным произволом из формул (1.9) следует, что постоянная K_3 в уравнении (1.18) для X несущественна и ее можно положить равной нулю.

Уравнения (1.9) представим в параметрическом виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{K}(s) + v\mathbf{P}(s), \qquad \mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3) \qquad (s \text{ и } v \text{ — параметры}) \tag{1.21}$$

$$\mathbf{K}(s) = (X_1 + t_0\Lambda_1,\ X_2 + t_0\Lambda_2,\ 0), \qquad \mathbf{P}(s) = (-\Psi_1,\ -\Psi_2,\ 1) \tag{1.22}$$

Из (1.21) следует, что исследуемая поверхность разрыва — линейчатая. Покажем, что она будет развертывающейся поверхностью. Составляя условие развертываемости, будем иметь

$$K'PP' = \begin{vmatrix} -\Psi_1 & -\Psi_2 & 1 \\ -(\Psi_{11}+\Psi_{12}f') & -(\Psi_{21}+\Psi_{22}f') & 0 \\ X_{11}+X_{12}f'+t_0(\Lambda_{11}+\Lambda_{12}f') & X_{21}+X_{22}f'+t_0(\Lambda_{21}+\Lambda_{22}f') & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.23)$$

в силу условий (1.16), т. е. действительно, поверхность разрыва развертывающаяся.

Рассмотрим фиксированный момент времени $t = 0$ (этого всегда можно добиться сдвигом по времени) и кривую, получающуюся в пересечении поверхности разрыва с плоскостью $x_3 = 0$. Из (1.9) следует, что уравнениями этой кривой в плоскости x_1x_2 будут

$$x_i = X_i \qquad (i = 1,\ 2) \tag{1.24}$$

где $u_2 = f(u_1)$. Таким образом, задание на кривой (1.8) второй зависимости для функции X в виде $\Phi(X_1, X_2) = 0$ соответствует заданию некоторой направляющей линии $\Phi(x_1, x_2) = 0$ в плоскости x_1, x_2 для рассматриваемой развертывающейся поверхности. При этом задание зависимости (1.8) определяет положение образующих этой поверхности, т. е. всего при определении поверхности разрыва располагаем произволом в две функции от одного независимого переменного.

Из вышеизложенного вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.1. Если поверхности сильного разрыва соответствует в пространстве годографа некоторая кривая, а течение за разрывом принадлежит к классу потенциальных двойных волн, то эта поверхность будет развертывающейся поверхностью в любой момент времени $t = t_0$ и задача Коши для системы (1.1) может быть поставлена для любой развертывающейся в пространстве x_1, x_2, x_3 при $t = t_0$ поверхности.

Отметим, что после задания формы поверхности разрыва в некоторый момент времени $t = t_0$ положение поверхности разрыва в любой другой момент времени t определяется непосредственно (1.9), в которых Λ_i, X_i и Ψ_i найдены из начальных данных Коши на линии $u_2 = f(u_1)$.

2. Отметим, что коэффициенты уравнений для функции Ψ, Λ и X одинаковы и тип системы (1.1) определяется знаком выражения

$$R = R_{12}^2 - R_{11}R_{22} \tag{2.1}$$

При $R > 0$ система уравнений (1.1) — гиперболического типа, при $R < 0$ — эллиптического.

Пользуясь (1.2), выражение для R запишем в виде

$$R = \theta\{(\Lambda_1 - \Psi\Psi_1 - u_1)^2 + (\Lambda_2 - \Psi\Psi_2 - u_2)^2 + \tag{2.2}$$
$$+ [\Psi_1(\Lambda_2 - \Psi\Psi_2 - u_2) - \Psi_2(\Lambda_1 - \Psi\Psi_1 - u_1)]^2 - \theta(1 + \Psi_1^2 + \Psi_2^2)]\}$$

Найдем значение R на линии $u_2 = f(u_1)$. Из формул (1.20) для Λ_1 и Λ_2 получим

$$\Lambda_1 = -\frac{Lf'}{f - f'u_1}, \qquad \Lambda_2 = \frac{L}{f - f'u_1} \qquad (L = AD) \tag{2.3}$$

(случай $L = -AD$ соответствует распространению ударной волны по некоторому специальным образом меняющемуся фону и в данной статье рассматриваться не будет). Для Ψ_1 и Ψ_2 из (1.19) будем иметь

$$\Psi_1 = -\frac{f'\Psi^2 + f'f^2 + u_1 f}{\Psi(f - f'u_1)}, \qquad \Psi_2 = \frac{\Psi^2 + u_1^2 + u_1 f f'}{\Psi(f - f'u_1)} \tag{2.4}$$

причем Ψ определяется соотношением (1.7).

Подставив выражения для производных из (2.3), (2.4) и проделав необходимые преобразования, окончательно для R получим

$$R = \frac{\theta\,[\Psi^2(1 + f'^2) + (u_1 + ff')^2]}{\Psi^2 (f - f'u_1)^2}\,[(L - A^2)^2 - \theta A^2] \tag{2.5}$$

Отметим, что случай $f - f'u_1 = 0$ неинтересен и приводит к соотношению $u_1 = 0$. Действительно, полагая $u_2 = pu_1$ ($p = \mathrm{const}$) из (1.19) получим

$$u_1 + p^2 u_1 + \Psi(\Psi_1 + \Psi_2 p) = 0, \qquad \Psi = u_1(\Psi_1 + p\Psi_2)$$

Отсюда

$$u_1(1 + p^2 + (\Psi_1 + \Psi_2 p)^2) = 0, \quad \text{т. е. } u_1 = 0$$

Знак R совпадает со знаком скобки

$$T = (L - A^2)^2 - \theta A^2$$

Вспоминая смысл введенных обозначений, запишем T в виде

$$T = |\mathbf{u}|^2 (D - |\mathbf{u}| - c)(D - |\mathbf{u}| + c) \tag{2.6}$$

На фронте обычной ударной волны, распространяющейся по невозмущенному газу, выполняются неравенства

$$|\mathbf{u}| + c > D \qquad D > |\mathbf{u}| \tag{2.7}$$

(возмущения за фронтом догоняют ударную волну); следовательно, $R < 0$, и система уравнений (1.1) в этом случае эллиптического типа.

Если поверхность разрыва L является фронтом нормальной детонации, на котором выполняется условие Чепмена — Жуге

$$|\mathbf{u}| + c = D \tag{2.8}$$

то из (2.6) следует, что $T = R = 0$, т. е. линия $u_2 = f(u_1)$ будет линией параболичности для системы (1.1), а для определения типа системы (1.1) за фронтом детонации нужно дополнительное исследование.

Заметим, что линия $u_2 = f(u_1)$ не будет характеристикой системы (1.1). Действительно, пользуясь соотношениями (2.3), (2.4), имеем

$$R_{11} du_1^2 + 2R_{12} du_1 du_2 + R_{22}\, du_2^2 = du_1^2\,[R_{11} + 2R_{12} f' + R_{22} f'^2) =$$
$$= du_1^2 \theta\,[1 + f'^2 + (\Psi_1 + \Psi_2 f')^2] > 0 \quad (\text{при } u_1 \neq \mathrm{const}) \tag{2.9}$$

Рассмотрим произвольную точку $M(u_1, u_2, \Psi)$, лежащую на кривой l. Кривая l будет линией пересечения сферы (1.7) и поверхности $u_3 = \Psi(u_1, u_2)$, на которую в пространстве годографа отображается область течения за поверхностью разрыва. За фронтом нормальной детонационной волны давление и модуль скорости убывают, поэтому достаточно рассматривать часть поверхности $u_3 = \Psi(u_1, u_2)$, лежащую внутри сферы (1.7), и исследовать знак R внутри этой сферы.

Покажем прежде всего, что в точке M поверхность (1.4) не может касаться сферы (1.7). Векторы, направленные по нормалям к поверхности (1.4) и сфере (1.7) в точке M, можно записать соответственно в виде

$$\mathbf{n}_\psi = (-\Psi_1, \ -\Psi_2, 1), \qquad \mathbf{n}_s = (u_1, u_2, \Psi) \tag{2.10}$$

В случае касания векторы $\mathbf{n}_\psi$ и $\mathbf{n}_s$ пропорциональны

$$\mathbf{n}_\psi = c\mathbf{n}_s, \quad c \neq 0, \text{ или } \quad -\Psi_1 = cu_1, \quad -\Psi_2 = cu_1, \quad 1 = c\Psi \tag{2.11}$$

Сопоставляя (2.11) и (1.19), будем иметь в точке M

$$\Psi(1 + \Psi_1^2 + \Psi_2^2) = 0 \tag{2.12}$$

Получено противоречие, отсюда вытекает что касания поверхностей в точке M не может быть. Пусть уравнения

$$u_1 = u_1(\xi), \qquad u_2 = u_2(\xi), \quad \Psi = \Psi(u_1(\xi), u_2(\xi)) \tag{2.13}$$

определяют произвольную кривую σ, лежащую на поверхности (1.4), такую, что при возрастании параметра ξ кривая проходит через точку M, приближаясь к поверхности сферы (1.7) изнутри.

Вектор, направленный по касательной к кривой σ в точке M, запишем в виде $\boldsymbol{\tau}_\sigma = (u_1', u_2', \psi')$, где штрих означает дифференцирование по ξ и точке M соответствует значение параметра ξ.

Так как поверхности (1.4) и (1.7) не касаются, то в точке M

$$\mathbf{n}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_\sigma > 0 \tag{2.14}$$

Вдоль кривой σ имеем $R = R(u_1, u_2, \Psi) = R(\xi)$. Покажем, что в точке M при выполнении условия (2.14) будет выполняться неравенство

$$dR \,/\, d\xi < 0 \tag{2.15}$$

Тем самым, так как точка M произвольна, будет установлена гиперболичность системы уравнений (1.1) в окрестности линии l на поверхности (1.4). Неравенство (2.14) в развернутом виде записывается так

$$u_1u_1' + u_2u_2' + \Psi\Psi' > 0 \qquad (\Psi' = \Psi_1 u_1' + \Psi_1 u_2') \tag{2.16}$$

При помощи соотношений (2.4) его можно привести к виду

$$\frac{u_2' - u_1'f'}{f - f'u_1} > 0 \tag{2.17}$$

Знак R совпадает со знаком фигурной скобки в (2.2), которую представим в следующей форме

$$P = \varkappa^2(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \varkappa^2(\theta_2\Psi_1 - \theta_1\Psi_2)^2 - \theta(1 + \Psi_1^2 + \Psi_2^2) \tag{2.18}$$

Для θ_1 и θ_2 вдоль линии $u_2 = f(u_1)$ из (2.3), (1.3) и (1.7) получим

$$\theta_2 = -\frac{1}{\varkappa} f' \frac{L - A^2}{f - f'u_1}, \qquad \theta_2 = \frac{1}{\varkappa} \frac{L - A^2}{f - f'u_1} \tag{2.19}$$

Дифференцируя полным образом P по ξ, будем иметь

$$\frac{dP}{d\xi} = P_1u_2' + P_2u_2' \tag{2.20}$$

$$P_i = 2\varkappa^2(\theta_1\theta_{1i} + \theta_2\theta_{2i}) + 2\varkappa^2(\theta_2\Psi_1 - \theta_1\Psi_2)(\theta_{2i}\Psi_1 + \theta_2\Psi_{1i} - \tag{2.21}$$

$$- \theta_{1i}\Psi_2 - \theta_1\Psi_{2i}) - \theta_i(1 + \Psi_1^2 + \Psi_2^2) - 2\theta(\Psi_1\Psi_{1i} + \Psi_2\Psi_{2i}) \qquad (i = 1, 2)$$

Приведя коэффициенты R_{ik} к виду

$$R_{ik} = Q(-1)^{i+k} u_m u_n \qquad (m \neq i,\ n \neq k;\ m, n, i, k = 1, 2) \tag{2.22}$$
$$Q = \frac{\theta}{\Psi^2 (f - f' u_1)^2} [\Psi^2 (1 + f'^2) + (ff' + u_1)^2]$$

при помощи (2.3), (2.4), (2.19) и использовав вытекающие из (1.1), (1.16) вдоль $u_2 = f(u_1)$ соотношения

$$u_1 \Lambda_{1i} + u_2 \Lambda_{2i} = u_1 \Psi_{1i} + u_2 \Psi_{2i} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{2.23}$$

в силу (2.7) и (2.17) получим

$$\frac{dP}{d\xi} = \frac{Q}{\theta} A^2 (L - A^2) \left(2 + \frac{1}{\varkappa}\right) \frac{u_1' f' - u_2'}{f - f' u_1} < 0 \tag{2.24}$$

Так как знаки $dP / d\xi$ и $dR / d\xi$ совпадают, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Если за фронтом пространственной криволинейной нормальной детонационной волны течение газа принадлежит к классу потенциальных двойных волн, а поверхности фронта соответствует некоторая фиксированная кривая в пространстве годографа, то для системы уравнений, описывающих двойные волны, эта кривая является линией параболичности, а за поверхностью фронта детонации упомянутая система уравнений будет всегда гиперболического типа.

Задача Коши для системы (1.1), поставленная вдоль линии $u_2 = f(u_1)$, в данном случае является корректной.

3. Рассмотрим случай стационарного течения в классе двойных потенциальных волн, когда форма поверхности сильного разрыва остается неизменной. Систему, описывающую установившиеся пространственные двойные волны выведенную в [1], получим, полагая в (1.1)

$$\Lambda = K\Psi + M \qquad (K = \text{const},\ M = \text{const}) \tag{3.1}$$

Тогда уравнение для Λ в системе (1.1) выпадает; уравнения (1.5) принимают вид

$$X_i = x_i + \Psi_i (x_3 - Kt) \tag{3.2}$$

и в системе координат x_1, x_2, x_3' будем иметь установившееся движение, если положить $x_3' = x_3 - Kt$ и вместо u_3 ввести скорость $u_3' = u_3 - K$.

Из данных Коши (1.19), (1.20) для Ψ и Λ на линии (1.8) получим

$$\Psi = L / K = \text{const} \tag{3.3}$$

и, следовательно, зависимость (1.8) имеет вид

$$u_1^2 + u_2^2 = A^2 - L^2 / K^2 = a^2 = \text{const} \tag{3.4}$$

(будем считать, что $K > D$). Полагая $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = r$, решение задачи Коши для функции Ψ будем искать в виде $\Psi = \Psi(r)$. Из первого уравнения системы (1.1) получим для Ψ обыкновенное уравнение

$$\theta \Psi'' r + \Psi' \theta (1 + \Psi'^2) - \Psi' (r + \Psi\Psi' - k\Psi')^2 = 0 \tag{3.5}$$

$$\theta = \frac{1}{\varkappa}\left(k\Psi + M - \frac{r^2}{2} - \frac{\Psi^2}{2}\right), \qquad M = B^2 - L \tag{3.6}$$

Условия (1.24) задают для уравнения (3.5) начальные данные Коши

$$\Psi(a) = L / k, \qquad \Psi'(a) = L / Ka \tag{3.7}$$

Таким образом, после задания параметра K, величина которого характеризует наклон прямолинейных образующих поверхности сильного разрыва к оси x_3', функция Ψ находится как решение задачи Коши (3.7) для уравнения (3.5) и полностью определена. В уравнении для функции X и в начальных данных Коши для нее (1.18) и (1.25) перейдем к полярным координатам $u_1 = r\cos\varphi$, $u_2 = r\sin\varphi$; получим

$$r^2 X_{rr} + (1 - s(r))(X_{\varphi\varphi} + rX_r) = 0 \tag{3.8}$$

$$X - rX_r = 0, \quad \Phi\left(X_r \cos\varphi - X_\varphi \frac{\sin\varphi}{r}, \quad X_r \sin\varphi + X_\varphi \frac{\cos\varphi}{r}\right) = 0 \quad \text{при } r = a \tag{3.9}$$

где

$$s(r) = \frac{(r + \Psi\Psi' - K\Psi')^2 - \theta\Psi'^2}{\theta} \tag{3.10}$$

и функция Φ произвольна (можно при $x_3' = 0$ произвольно задать форму направляющей линии).

В случае обычной ударной волны $s(a) < 1$, уравнение (3.8) в окрестности линии $r = a$ эллиптического типа, и, вообще говоря, поставленная задача Коши (3.9) некорректна в классическом смысле. Данная ситуация аналогична ситуации, возникающей в задаче об установившемся обтекании с ударными волнами плоских и осесимметричных тел, когда по заданной форме ударной волны ищется контур обтекаемого тела.

Определим форму обтекаемого тела в рассматриваемом случае. Пусть поверхности обтекаемого тела в плоскости u_1, u_2 соответствует кривая

$$u_2 = \sigma(u_1) \tag{3.11}$$

и соотношения (3.2) являются уравнениями этой поверхности при условии (3.11). Условие отсутствия потока газа через поверхность имеет вид

$$\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{u} = D_\sigma \tag{3.12}$$

где $\mathbf{n}_\sigma$ — нормаль к поверхности, D_σ — нормальная скорость движения обтекаемой поверхности. Точно так же, как в п.1, получим, что условие (3.12) эквивалентно двум соотношениям

$$(\Psi_{11} + \Psi_{12}\sigma')\,\theta_2 - (\Psi_{21} + \Psi_{22}\sigma')\,\theta_1 = 0 \tag{3.13}$$

$$(X_{11} + X_{12}\sigma')\,\theta_2 - (X_{21} + X_{22}\sigma')\,\theta_1 = 0 \tag{3.14}$$

Из (3.13), так как $\theta = \theta(r)$ и $\Psi = \Psi(r)$, получим следствие

$$\theta'\Psi' r^{-2}(u_2 - u_1\sigma') = 0 \tag{3.15}$$

Исключая из рассмотрения тривиальный случай, когда обтекаемая поверхность будет плоскостью ($u_2 - u_1\sigma' = 0$), а также случай $\Psi' = 0$, соответствующий цилиндрической поверхности, заключаем, что уравнение (3.5) необходимо интегрировать, начиная с $r = a$ до такого $r = d$, что $\theta'(d) = 0$. Из (3.2) следует, что обтекаемая поверхность, так же как и поверхность сильного разрыва, будет линейчатой поверхностью. Условие (3.14) можно записать в виде

$$\theta' r^{-1}[(X_{11} - X_{12}\sigma')\,u_2 - (X_{21} + X_{22}\,\sigma')\,u_1] = 0 \tag{3.16}$$

и при $\theta'(d) = 0$ оно также будет выполнено, а зависимость (3.11) имеет, таким образом, вид $u_1^2 + u_2^2 = \mathrm{const}$.

Заметим, что при $X \equiv 0$ получим решение задачи об установившемся обтекании кругового конуса. При этом, если α — угол раствора конуса, соответствующего ударной волне, то $\sin {}^1/_2\alpha = D / K$, а все искомые величины зависят лишь от аргумента $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} / x_3'$ (см. [7]). Угол раствора обтекаемого конуса β находится после численного решения задачи Коши (3.7) для уравнения (3.5) в интервале $[a, d]$ $d > a$ (форма ударной волны предполагается известной) из соотношения $\operatorname{tg} {}^1/_2\beta = \Psi'(d)$.

Таким образом, функцию Ψ для решения задач об установившемся обтекании пространственных тел в классе двойных потенциальных волн можно брать из соответствующей автомодельной задачи об обтекании однородным сверхзвуковым потоком кругового конуса. В определении же функции «размещения» X остается указанный выше произвол.

Из свойств установившегося автомодельного течения около кругового конуса следует, что $\Psi'\Psi'' < 0$ при $r \in [a, d]$. Отсюда, представив 1 — при помощи (3.5) и (3.10) в виде

$$1 - s = - \Psi'' r / \Psi' \tag{3.17}$$

заключаем, что $1 - s > 0$, и уравнение (3.8) во всем кольце $r = a$, $r = d$ эллиптического типа.

Исследуем особенности, которые могут возникнуть при переходе от пространства годографа к физическому пространству. Для этого, после перехода к полярным координатам r и φ в соотношениях (3.2), определяющих течение в пространстве x_1, x_2, x_3', вычислим якобиан $I = \partial (x_1, x_2) / \partial (r, \varphi)$ при фиксированном x_3'.

Пользуясь уравнением (3.8) для I получим выражение

$$I = \frac{\Psi'}{\Psi''} (X_{rr} - \Psi'' x_3')^2 - \frac{1}{r} \left(X_{r\varphi} - \frac{X_\varphi}{r} \right)^2 \tag{3.18}$$

Из неравенства $\Psi'\Psi'' < 0$ заключаем, что $I \leqslant 0$ и I обращается в нуль лишь при условиях

$$X_{rr} - \Psi'' x_3' = 0, \qquad X_{r\varphi} - r^{-1} X_\varphi = 0 \tag{3.19}$$

Если второму уравнению (3.19) соответствуют некоторые кривые $r = r(\varphi)$ в рассматриваемом кольце, то соотношения (3.2) и (3.19) определяют, вообще говоря, некоторые предельные линии, которые могут, таким образом, появляться в исследуемых течениях.

Задавая начальные условия (3.9) не при $x_3' = 0$, как это делалось до сих пор, а при достаточно больших значениях $|x_3'| = N$, из выражения (3.18) для I и из того, что при обтекании кругового конуса $I = \Psi'\Psi'' x_3'$, получим, что область определения решения в физическом пространстве в одном из направлений вдоль оси x_3' неограничена.

Уравнения направляющей линии в этом случае, если вид условия в (3.9) сохраняется, будут иметь вид

$$\begin{aligned} x_1 &= X_r \cos\varphi - X_\varphi r^{-1} \sin\varphi - \Psi' N \cos\varphi \\ x_2 &= X_r \sin\varphi + X_\varphi r^{-1} \cos\varphi - \Psi' N \sin\varphi \end{aligned} \quad \text{при } r = a \tag{3.20}$$

т. е. форма сечения ударной волны близка к окружности, и течение будет полностью определено во всей области между ударной волной и обтекаемым телом для $|x_3'| \geqslant N$.

Простейшие примеры течений рассмотренного типа проще всего получить следующим образом. В коэффициенты уравнения (3.8) переменная φ не входит, и оно допускает разделение переменных. Полагая $X = F(r)\bigtriangledown(\varphi)$, для F и $\bigtriangledown$ получим уравнения

$$r^2F'' + (1 - s)(\lambda F + rF') = 0, \tag{3.21}$$

$$\bigtriangledown'' - \lambda\bigtriangledown = 0, \qquad \lambda = \mathrm{const} \tag{3.22}$$

Взяв, например, решение уравнения (3.8) в виде $X = \cos 2\varphi F_2(r)$, где F_2 определяется из уравнения (3.21) при $\lambda = -4$ и $aF'(a) - F(a) = 0$, получим симметричные относительно плоскостей $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ поверхности ударной волны и обтекаемого тела, задаваемые уравнениями

$$\begin{aligned} x_1 &= F_2' \cos 2\varphi \cos\varphi + 2F_2 \frac{\sin 2\varphi \sin\varphi}{r} - \Psi' \cos\varphi x_3' \quad \text{при } r = a,\ r = d \\ x_2 &= F_2' \cos 2\varphi \sin\varphi - 2F_2 \frac{\sin 2\varphi \cos\varphi}{r} - \Psi' \sin\varphi x_3' \quad \text{при } r = a,\ r = d \end{aligned} \tag{3.23}$$

В случае задания начальных данных при $x_3' = 0$ необходимо в каждом конкретном решении проверять, не обращаются ли в нуль одновременно X_{rr} и $X_{r\varphi} - r^{-1}X_\varphi$. Если оба эти выражения в нуль одновременно не обращаются, то в окрестности плоскости $x_3' = 0$ также возможен переход из пространства годографа в физическое пространство.

Замечание 1. Метод Фурье решения задачи Коши для уравнения (3.8) может быть эффективно применен для построения течений за нормальными детонационными волнами, когда уравнение (3.8) гиперболического типа.

Замечание 2. При $|x_3'| \to \infty$ для любых начальных данных форма ударной волны и обтекаемого тела приближается к форме кругового конуса, а соответствующее течение переходит в течение вокруг кругового конуса.

Замечание 3. Предыдущие рассмотрения позволяют поставить задачу об обтекании тела, поверхность которого является огибающей семейства конусов с вершинами на некоторой кривой в плоскости x_3'=const и таких, что все образующие конусов имеют один и тот же угол наклона к оси x_3'. При этом, по-видимому, для некоторых специальных кривых в плоскости x_3'=const можно получить «полное», без предельных линий, течение. Решение этой задачи связано с нахождением решения задачи Коши для эллиптического уравнения (3.8). Вопросы существования таких решений в данной статье не рассматриваются. Отметим, что вместо задачи Коши, для уравнения (3.8) можно решать нелинейную смешанную задачу в неодносвязной области с условием а) (3.9) при $r = a$ и условием в) (3.9) при $r=d$ (т. е. в кольце), когда при x_3'=const задана форма сечения не ударной волны, а обтекаемого тела.

Поступила 25 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский А. А. О классе адиабатических течений газа, которые в пространстве годографа скорости изображаются поверхностями. 1949; Сб. теор. работ по аэродинамике, Оборонгиз, 1957.
2. Рыжов О. С. О течениях с вырожденным годографом. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 4.
3. Сидоров А. Ф. О нестационарных потенциальных движениях политропного газа с вырожденным годографом. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
4. Сидоров А. Ф. К вопросу об ударных волнах в течениях политропного газа, имеющих прямолинейные характеристики. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2.
5. Сидоров А. Ф. Некоторые точные решения нестационарной двумерной газовой динамики. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.
6. Кибель И. А., Кочин И. Е., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2, 1963.