

## К ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

А. К. Никитин, С. А. Подрезов

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается линейная пространственная задача о гравитационных волнах на поверхности вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины, возникающих из состояния покоя под действием поверхностного давления и начального возмущения свободной поверхности. Последовательным применением кратного преобразования Фурье по координатам и преобразования Лапласа по времени решение задачи получено в замкнутой форме. Как частный случай получается решение осесимметричной задачи. Затем получены асимптотические формулы, дающие возможность легко решать конкретные задачи.]

§ 1. Уравнения движения, краевые и начальные условия. Поместим начало прямоугольной декартовой системы координат на свободной поверхности жидкости в положении равновесия, ось  $z$  направим вертикально вверх, а оси  $x$  и  $y$  — в горизонтальной плоскости. Будем предполагать, что в начальный момент времени скорости частиц жидкости равны нулю и задана форма свободной поверхности  $z = \zeta(x, y, 0) = \zeta_0(x, y)$ ; на свободной поверхности задано давление  $p = p_0(x, y, t)$  и отсутствует напряжение трения. При обычных допущениях линейной теории, пренебрегая нелинейными инерционными членами, получим уравнения движения

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x \quad (xyz), \quad p = p_1 + \rho g z \quad (1.1)$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

где  $p_1$  — гидродинамическое давление. Кроме того, будем иметь следующие предельные условия:

$$p_{nn} = -p_0, \quad p_{n\tau_1} = 0, \quad p_{n\tau_2} = 0 \quad \text{на } z = \zeta(x, y, t) \quad (1.3)$$

$$v_x = v_y = v_z = 0 \quad \text{при } z = -\infty, \quad v_x = v_y = v_z = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (1.4)$$

Здесь  $z = \zeta(x, y, t)$  — уравнение свободной поверхности.

Будем предполагать движение медленным, амплитуду волн малой и волны пологими. Тогда можно считать, что нормаль к свободной поверхности мало отклоняется от вертикали, и положить

$$p_{n\tau_1} \approx p_{zx} = 0, \quad p_{n\tau_2} \approx p_{zy} = 0 \quad \text{при } z = \zeta(x, y, t) \quad (1.5)$$

$$p_{nn} \approx p_{zz} = -p_1 + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} = -p + \rho g \zeta + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} = -p_0(x, y, t)$$

Отнесем условия (1.5) к невозмущенной поверхности  $z = 0$ . Учитывая, что для малых колебаний

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = (v_z)_{z=0}, \quad \zeta = \zeta_0(x, y) + \int_0^t (v_z)_{z=0} dt \quad (1.6)$$

получим из (1.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0 \quad \text{при } z = 0 \\ p - \rho g \int_0^t v_z dt - 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} = p_0(x, y, t) + \rho g \zeta_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.7)$$

§ 2. Применение преобразований Фурье и Лапласа. Для решения задачи применим кратное преобразование Фурье [1] по переменным  $x$  и  $y$ , а затем преобразование Лапласа [2] по времени  $t$ .

Умножим уравнения (1.1), (1.2) и условия (1.4), (1.6) и (1.7) на

$$\frac{1}{2}\pi^{-1} \exp [i(\xi x + \eta y)] dx dy$$

и проинтегрируем результаты по  $x$  и  $y$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Предполагая, что величины  $p$ ,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ ,  $\partial v_x / \partial x$ ,  $\partial v_z / \partial x$ ,  $\partial v_x / \partial y$ ,  $\partial v_y / \partial y$ ,  $\partial v_y / \partial x$ ,  $\partial v_z / \partial y$  исчезают при  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $|y| \rightarrow \infty$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{i\xi}{\rho} P + \nu \left( \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \xi^2 X - \eta^2 X \right) \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{i\eta}{\rho} P + \nu \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} - \xi^2 Y - \eta^2 Y \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \xi^2 Z - \eta^2 Z \right) \\ \frac{\partial Z}{\partial z} - i(\xi X + \eta Y) &= 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - i\xi Z = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - i\eta Z = 0 \end{aligned}$$

$$P - \rho g \int_0^t Z dt - 2\mu \frac{\partial Z}{\partial z} = P_0 + \rho g H_0 \quad \text{при } z = 0 \quad (2.2)$$

$$X = Y = Z = 0 \quad \text{при } z = -\infty, \quad X = Y = Z = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (2.3)$$

Здесь через  $X, Y, Z, P, H, H_0, P_0$  обозначены соответственно трансформанты фурье-функций  $v_x, v_y, v_z, p, \zeta, \zeta_0, p_0$ . Предполагается, что к рассматриваемым величинам применимо преобразование Фурье. Учитывая, что движение жидкости возникает из состояния покоя и вызывается поверхностным давлением  $p_0(x, y, t)$  и начальным возмущением свободной поверхности  $\zeta_0(x, y)$ , можно считать, что указанные условия будут выполнены, если к функциям  $p_0(x, y, t)$  и  $\zeta_0(x, y)$  применимы преобразования Фурье. (Если  $p \rightarrow a = \text{const}$  при  $|x| \rightarrow \infty$  и  $|y| \rightarrow \infty$ , то в уравнениях и граничных условиях можно рассматривать вместо  $p$  и  $p_0$  соответственно величины  $p - a$  и  $p_0 - a$ .)

Применим теперь к уравнениям (2.1) и граничным условиям (2.2) и (2.3) преобразование Лапласа по  $t$ . Учитывая начальные условия (2.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X^\circ}{dz^2} - \left( \frac{s}{\nu} + \xi^2 + \eta^2 \right) X^\circ + \frac{i\xi}{\mu} P^\circ &= 0 \\ \frac{d^2 Y^\circ}{dz^2} - \left( \frac{s}{\nu} + \xi^2 + \eta^2 \right) Y^\circ + \frac{i\eta}{\mu} P^\circ &= 0 \\ \frac{d^2 Z^\circ}{dz^2} - \left( \frac{s}{\nu} + \xi^2 + \eta^2 \right) Z^\circ - \frac{1}{\mu} \frac{dP^\circ}{dz} &= 0 \\ i\xi X^\circ + i\eta Y^\circ - \frac{dZ^\circ}{dz} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} P^\circ - \frac{\rho g}{s} Z^\circ - 2\mu \frac{dZ^\circ}{dz} &= P_0^\circ + \rho g H_0 \quad \text{при } z = 0 \\ \frac{dX^\circ}{dz} - i\xi Z^\circ = 0, \quad \frac{dY^\circ}{dz} - i\eta Z^\circ &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$X^\circ = Y^\circ = Z^\circ = 0 \quad \text{при } z = -\infty \quad (2.6)$$

$$H = H_0 + s^{-1} (Z^\circ)_{z=0} \quad \left( X^\circ(s) = s \int_0^t X(t) e^{-st} dt \right)$$

Здесь  $s$  — параметр преобразования.

Исключая из уравнений (2.4) и граничных условий (2.5)  $X^\circ$ ,  $Y^\circ$  и  $P^\circ$ , получим для  $Z^\circ$  уравнение

$$\frac{d^4 Z^\circ}{dz^4} - \left( \frac{s}{\nu} + 2r^2 \right) \frac{d^2 Z^\circ}{dz^2} + r^2 \left( \frac{s}{\nu} + r^2 \right) Z^\circ = 0 \quad (2.7)$$

$(r^2 = \xi^2 + \eta^2)$

и граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z^\circ}{dz^2} + z^2 Z^\circ &= 0 \quad \text{при } z = 0 \\ \frac{d^3 Z^\circ}{dz^3} - \left( \frac{s}{\nu} + 3r^2 \right) \frac{dZ^\circ}{dz} - \frac{\rho g r^2}{s\mu} Z^\circ &= \frac{r^2}{\mu} (P_0^\circ + \rho g H_0) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$Z^\circ = \frac{dZ^\circ}{dz} = 0 \quad \text{при } z = -\infty \quad (2.9)$$

Решение уравнения (2.7), удовлетворяющее условиям (2.8), (2.9), имеет вид

$$\begin{aligned} Z^\circ = r (\rho g H_0 + P_0^\circ) [\mu \Phi(r, s)]^{-1} [2r^2 \exp(z \sqrt{r^2 + s/\nu}) - \\ - (2r^2 - s/\nu) \exp(rz)] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\Phi(r, s) = (2r^2 + s/\nu)^2 - 4r^3 (r^2 + s/\nu)^{1/2} + gr\nu^{-2}$$

Используя соотношения (2.4) и (2.5) для  $Z^\circ$ ,  $X^\circ$ ,  $Y^\circ$ ,  $H^\circ$  и  $P^\circ$ , находим

$$\begin{aligned} X^\circ &= -\frac{\xi i (\rho g H_0 + P_0^\circ)}{\mu \Phi(r, s)} \left[ 2r \left( r^2 + \frac{s}{\nu} \right)^{1/2} e^{(z \sqrt{r^2 + s/\nu})} - \left( 2r^2 + \frac{s}{\nu} \right) e^{(rz)} \right] \\ Y^\circ &= -\frac{i\eta (\rho g H_0 + P_0^\circ)}{\mu \Phi(r, s)} \left[ 2r \left( r^2 + \frac{s}{\nu} \right)^{1/2} e^{(z \sqrt{r^2 + s/\nu})} - \left( 2r^2 + \frac{s}{\nu} \right) e^{(rz)} \right] \\ H^\circ &= H_0 - \frac{r (\rho g H_0 + P_0^\circ)}{\mu \nu \Phi(r, s)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

§ 3. Нахождение оригиналов. В выражениях (2.10) и (2.11) положим  $u = (r^2 + s/\nu)^{1/2}$ . Затем используем вторую теорему разложения. По справочнику [3] находим оригиналы изображений

$$e^{uz} \doteq \frac{1}{2} \left[ e^{-r|z|} \operatorname{erfc} \left( \frac{|z|}{2\sqrt{\nu t}} - r\sqrt{\nu t} \right) + e^{-r|z|} \operatorname{erfc} \left( \frac{|z|}{2\sqrt{\nu t}} + r\sqrt{\nu t} \right) \right] = f_1(r, z, t) \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{u-u_k} e^{uz} &\doteq \frac{r}{2} \left[ \frac{e^{-r|z|}}{r-u_k} \operatorname{erfc} \left( \frac{|z|}{2\sqrt{\nu t}} - r\sqrt{\nu t} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{|z|}{2\sqrt{\nu t}} + r\sqrt{\nu t} \right) \right] \times \\ &\times \frac{e^{-r|z|}}{r+u_k} + \frac{u_k^2 \exp[-u_k|z| + (u_k^2 - r^2)\nu t]}{u_k^2 - r^2} \operatorname{erfc} \left( \frac{|z|}{2\sqrt{\nu t}} - u_k\sqrt{\nu t} \right) = f_2^k(r, z, t) \end{aligned}$$

$$u(u-u_k)^{-1} \doteq -ru_k \operatorname{erf}(r\sqrt{\nu t}) - r^2 + u_k^2 e^{(u_k^2 - r^2)\nu t} \operatorname{erfc}(u_k\sqrt{\nu t}) = f_3^k(r, t)$$

где  $u_k$  — корни полинома

$$F(r, u) = u^4 + 2r^2u^2 - 4r^3u + r^4 + r g \nu^{-2}$$

Воспользуемся теоремой свертывания. Так как

$$F_1(s) F_2(s) \doteq \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

или

$$\frac{1}{s} F_1(s) F_2(s) \doteq \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

то из (2.10) и (2.11) с учетом (3.1) находим

$$\begin{aligned} H &= H_0 - \frac{r}{\mu\nu} \frac{d}{dt} \int_0^t [\rho g H_0 + P_0(t-\tau)] \left[ \frac{1}{r^4 + r\lambda^3} + \sum_{k=1}^4 \frac{f_3^k(r, \tau)}{u_k F'(u_k)} \right] d\tau = \\ &= H_0 - \frac{r\rho g H_0}{\mu} \left[ -\frac{r}{r^3 + \lambda^3} + \sum_{k=1}^4 (u_k^2 - r^2) \frac{f_3^k(r, \tau)}{u_k F'(u_k)} \right] - \\ &\quad - \frac{r}{\mu} \int_0^t P_0(t-\tau) \left[ -\frac{r}{r^3 + \lambda^3} + \sum_{k=1}^4 (u_k^2 - r^2) \frac{f_3^k(r, \tau)}{u_k F'(u_k)} \right] d\tau \end{aligned}$$

$$Z = \frac{2r^3}{\mu} \frac{d}{dt} \int_0^t [\rho g H_0 + P_0(t-\tau)] \left[ \frac{f_1(r, z, \tau)}{r^4 + r\lambda^3} + \sum_{k=1}^4 \frac{f_2^k(r, \tau)}{u_k F'(u_k)} \right] d\tau = \quad (3.2)$$

$$= -\frac{r}{\mu} e^{-r|z|} \frac{d}{dt} \int_0^t [\rho g H_0 + P_0(t-\tau)] \left[ \frac{r}{r^3 + \lambda^3} + \sum_{k=1}^4 \frac{(u_k^2 - r^2) f_3^k(r, \tau)}{u_k F'(u_k)} \right] d\tau$$

$$Y = -\frac{2i\eta r}{\mu} \frac{d}{dt} \int_0^t [\rho g H_0 + P_0(t-\tau)] \sum_{k=1}^4 \frac{f_2^k(r, z, \tau)}{F'(u_k)} d\tau +$$

$$+ \frac{i\eta}{\mu} \frac{d}{dt} \int_0^t [\rho g H_0 + P_0(t-\tau)] \left[ \frac{r}{r^3 + \lambda^3} + \sum_{k=1}^4 \frac{(u_k^2 - r^2) f_3^k(r, \tau)}{u_k F'(u_k)} \right] d\tau$$

$$P = e^{-r|z|} \frac{d}{dt} \int_0^t [\rho g H_0 + P_0(t-\tau)] \left[ -\frac{r^3}{r^3 + \lambda^3} + \sum_{k=1}^4 \frac{(u_k^4 - r^4) f_3^k(r, \tau)}{u_k F'(u_k)} \right] d\tau$$

$$(\lambda^3 = g/\nu^2, \quad F'(u_k) = 4(u_k^3 + r^2u_k - r^3))$$

§ 4. Обращение Фурье. Используя формулы обращения для трансформант Фурье, получим решение

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, & v_y &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \\ v_z &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Z e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, & p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \\ \zeta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь функции  $X, Y, Z, P, H$  определяются формулами (3.2). В эти функции входят корни полинома  $F(r, u)$ , которые зависят от  $\xi$  и  $\eta$ . Если эти корни известны, то решение рассматриваемой задачи получено в замкнутой форме (4.1). Положим  $u = r\alpha$ . Тогда

$$F(r, u) = r^4 (\alpha^4 - 2\alpha^2 - 4\alpha + 1 + \lambda^3 r^{-3}) = r^4 F_1(r, \alpha) \quad (4.2)$$

Исследование полинома  $F_1(r, \alpha)$  показывает, что при  $r < 1.19813 \lambda$  он имеет две пары комплексно сопряженных корней, а при  $r > 1.19813 \lambda$  — два действительных корня и одну пару комплексно сопряженных корней. В связи с этим интегрирование в (4.1) придется разбить на промежутки  $0 \leq r \leq 1.19813 \lambda$  и  $r > 1.19813 \lambda$ . Подставив в (4.1) выражение для  $H$  из (3.2) и поменяв порядок интегрирования<sup>1</sup> по  $t$  и  $\xi$  и  $\eta$ , получим для свободной поверхности

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_0 - \frac{1}{2\pi\mu\nu} \frac{d}{dt} \int_0^t \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\rho g H_0 + P_0(t - \tau)] \left[ \frac{1}{r^3 + \lambda^3} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^4 r \frac{f_3^k(r, \tau)}{u_k F'(u_k)} \right] e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right\} d\tau = \\ &= \zeta_0 - \frac{\rho g}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_0 \left[ -\frac{r^3}{r^3 + \lambda^3} + \sum_{k=1}^4 \frac{r(u_k^2 - r^2) f_3^k(r, t)}{u_k F'(u_k)} \right] \times \\ &\quad \times e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta - \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_0(t - \tau) \left[ -\frac{r^2}{r^3 + \lambda^3} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^4 \frac{r(u_k^2 - r^2) f_3^k(r, \tau)}{u_k F'(u_k)} \right] e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta d\tau \end{aligned} \quad (4.3)$$

<sup>1</sup> При  $p = 0$  в (4.3) остается только интеграл по  $\xi$  и  $\eta$  и перестановка порядка интегрирования не потребуется. В общем случае законность такой перестановки будет видна в дальнейшем.

Применяя теорему о свертках для трансформант Фурье, находим

$$\zeta(x, y, t) = \zeta_0 - \frac{\lambda^3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0(x-u, y-w) G_1(u, w, t) du dw - \\ - \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x-u, y-w, t-\tau) G_2(u, w, \tau) du dw d\tau$$

после некоторых преобразований

$$\zeta_0 - \frac{1}{2\pi\mu\nu} \frac{d}{dt} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\rho g \zeta_0(x-u, y-w) + p_0(x-u, y-w, t-\tau)] \times \\ \times G_1(u, w, \tau) du dw d\tau$$

$$G_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(r, t) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \quad (i=1, 2) \quad (4.4)$$

$$\psi_1(r, t) = \frac{1}{r^3 + \lambda^3} + \sum_{k=1}^4 [4\alpha_k (\alpha_k^2 - 1) (\alpha_k^3 + \alpha_k - 1) r^3]^{-1} [-\alpha_k \operatorname{erf}(r\sqrt{\nu t}) - \\ - 1 + \alpha_k^2 \exp[\nu t r^2 (\alpha_k^2 - 1)] \operatorname{erfc}(-r\alpha_k\sqrt{\nu t})] = (r^3 + \lambda^3)^{-1} + \sum_{k=1}^4 \psi_1^k(r, t) \\ \psi_2(r, t) = \sum_{k=1}^4 \frac{[\alpha_k \exp[\nu t r^2 (\alpha_k^2 - 1)] \operatorname{erfc}(-r\alpha_k\sqrt{\nu t}) - \operatorname{erf}(r\sqrt{\nu t})]}{4(\alpha_k^3 + \alpha_k - 1)} = \sum_{k=1}^4 \psi_2^k(r, t)$$

Учитывая симметричность функций  $\psi_i$  относительно осей  $\xi$  и  $\eta$  и переходя к полярным координатам, получим

$$G_i(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \int_0^{\infty} \psi_i(r, t) \cos(Rr \cos \theta) dr d\theta \\ R^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = (R, r) \quad (i=1, 2) \quad (4.5)$$

В зависимости от конкретной задачи можно применять тот или иной вид формулы (4.4).

Чтобы избежать нахождения корней  $\alpha_k$  полинома  $F_1(r, \alpha)$ , целесообразно при вычислении  $G_i$  сделать в подынтегральном выражении следующую замену:

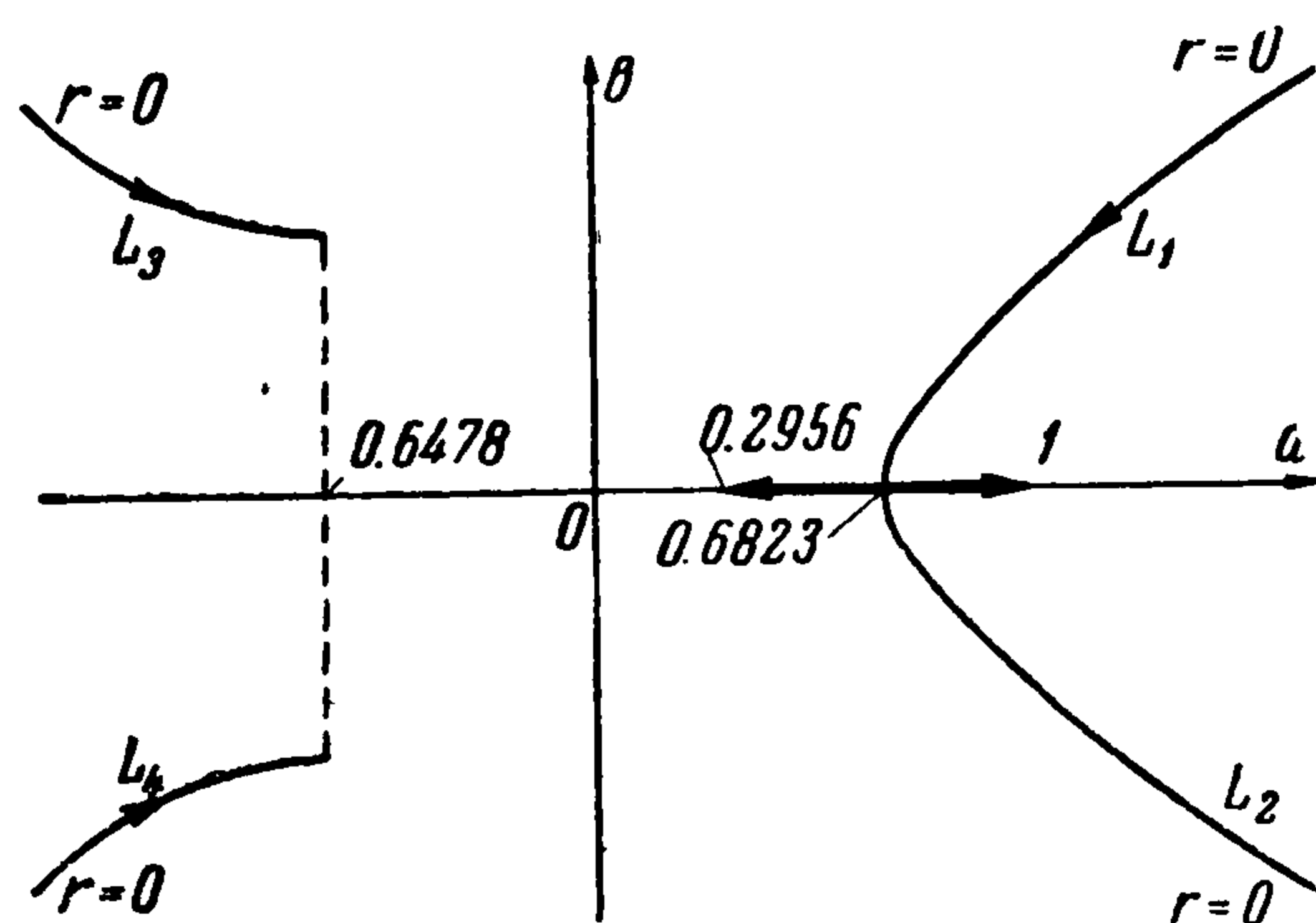
$$r = r(\alpha_k) = -\lambda (\alpha_k^4 + 2\alpha_k^2 - 4\alpha_k + 1)^{-1/3} \quad (4.6)$$

После указанной замены будем иметь

$$G_i(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \sum_{k=1}^4 \int_{L_k} \psi_i^k(r, t) \cos[Rr(\alpha_k) \cos \theta] d\alpha_k d\theta + \\ + \frac{2}{\pi} \gamma_i \int_0^{1/2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(Rr \cos \theta) dr d\theta}{r^3 + \lambda^3}, \quad \gamma_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i=2 \\ 1 & \text{при } i=1 \end{cases} \quad (4.7)$$

Через  $L_k$  обозначена ветвь кривой, соответствующая корню  $\alpha_k$ , по которой нужно проводить интегрирование.

Подставив  $\alpha = a + ib$  в многочлен  $F_1(r, \alpha)$  и приравняв нулю действительную и мнимую части, получим



Фиг. 1

$$b = 0 \quad (4.8)$$

$$a^4 + 2a^2 - 4a + 1 + \lambda^3 r^{-3} = 0$$

$$b = \pm (a^2 + 1 - a^{-1})^{1/2}$$

$$4a^6 + 4a^4 - 1 + \lambda^3 a^2 r^{-3} = 0 \quad (4.9)$$

Как уже указывалось, второе уравнение (4.8) дает для  $a$  только два вещественных корня при  $r \geq 1.19813 \lambda$ . Первое уравнение системы (4.9) дает зависимость между мнимой и действительной ча-

стями корней, а второе — связь между действительной частью и параметром. Примерный график ветвей  $L_k$  представлен на фигуре; стрелками показано направление обхода ветвей  $L_k$  при изменении  $r$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Раскрывая суммы в (4.7), получим

$$G_i(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{1/2\pi} \int_{0.6823}^1 \varphi_i(\alpha) \cos [Rr(\alpha) \cos \theta] d\alpha d\theta - \right.$$

$$- \int_0^{1/2\pi} \int_{0.2956}^{0.6823} \varphi_i(\alpha) \cos [Rr(\alpha) \cos \theta] d\alpha d\theta +$$

$$+ \int_0^{1/2\pi} \int_{L_1} \varphi_i(\alpha_1) \cos [Rr(\alpha_1) \cos \theta] d\alpha_1 d\theta +$$

$$+ \int_0^{1/2\pi} \int_{L_2} \varphi_i(\alpha_2) \cos [Rr(\alpha_2) \cos \theta] d\alpha_2 d\theta + \quad (4.10)$$

$$+ \int_0^{1/2\pi} \int_{L_3} \varphi_i(\alpha_3) \cos [Rr(\alpha_3) \cos \theta] d\alpha_3 d\theta +$$

$$\left. + \int_0^{1/2\pi} \int_{L_4} \varphi_i(\alpha_4) \cos [Rr(\alpha_4) \cos \theta] d\alpha_4 d\theta + \int_0^{1/2\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma_i \cos (Rr \cos \theta)}{r^3 + \lambda^3} dr d\theta \right\}$$

$$\varphi_1(\alpha) = \frac{r^2(\alpha)}{3\alpha(\alpha^2 - 1)\lambda^3} [-\alpha \operatorname{erf}(r\sqrt{vt}) - 1 + \alpha^2 e^{vtr^2(\alpha^2 - 1)} \operatorname{erfc}(r\alpha\sqrt{vt})]$$

$$\varphi_2(\alpha) = \frac{r^4(\alpha)}{3\alpha\lambda^3} [\alpha^2 e^{vtr^2(\alpha^2 - 1)} \operatorname{erfc}(-r\alpha\sqrt{vt}) - \alpha \operatorname{erf}(r\sqrt{vt})], \quad \gamma_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 1 \\ 0 & \text{при } i = 2 \end{cases}$$

Чтобы свести интегрирование в (4.10) к вещественной области, используем зависимость (4.9) между вещественной и мнимой частями корней и зависимость между  $r$  и вещественной частью корней  $a$ . Имеем

$$b = (a^2 + 1 - a^{-1})^{1/2}, \quad r(a \pm ib) = h(a) = \lambda a^{1/3} (4a^6 + 4a^4 - 1)^{-1/3}$$

$$d\alpha = d(a \pm ib) = da \pm idb = \left(1 \pm \frac{2a + a^{-2}}{2b}\right) da \quad (4.11)$$

Учитывая, что  $\alpha_3, \alpha_4$  и  $\alpha_2, \alpha_1$  — комплексно сопряженные корни, приведем  $G_i(x, y, t)$  к виду

$$\begin{aligned}
 G_i(x, y, t) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \int_{0.6823}^1 \varphi_i(\alpha) \cos [Rr(\alpha) \cos \theta] d\alpha d\theta - \\
 & - \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \int_{0.2956}^{0.6823} \varphi_i(\alpha) \cos [Rr(\alpha) \cos \theta] d\alpha d\theta - \\
 & - \frac{1}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \int_{0.6823}^{\infty} [\varphi_i(a+ib) + \varphi_i(a-ib)] \cos [Rh(a) \cos \theta] da d\theta + \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \int_{-\infty}^{-0.6478} [\varphi_i(a+ib) + \varphi_i(a-ib)] \cos [Rh(a) \cos \theta] da d\theta - \\
 & - \frac{i}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \int_{0.6823}^{\infty} [\varphi_i(a+ib) - \varphi_i(a-ib)] \left(2a + \frac{1}{a^2}\right) \frac{\cos [Rh(a) \cos \theta]}{2b} da d\theta + \\
 & + \frac{i}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \int_{-\infty}^{-0.6478} [\varphi_i(a+ib) - \varphi_i(a-ib)] \left(2a + \frac{1}{a^2}\right) \frac{\cos [Rh(a) \cos \theta]}{2b} da d\theta + \\
 & + \frac{2\gamma_i}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos [Rr \cos \theta]}{r^3 + \lambda^3} dr d\theta \quad (i = 1, 2), \quad \gamma_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 1 \\ 0 & \text{при } i = 2 \end{cases} \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Легко показать, что

$$\operatorname{Re} \{e^{((a+ib)^2-1)h^2(a)\nu\tau} \operatorname{erfc} [-h(a)(a+ib)\sqrt{\nu\tau}]\} = H_1 e^{-h^2(a)\nu\tau}$$

$$H_1 = 2\pi^{-1/2} \int_0^{\infty} e^{-x^2+2ah(a)x\sqrt{\nu\tau}} \cos [2bh(a)x\sqrt{\nu\tau}] dx$$

$$\operatorname{Im} \{e^{((a+ib)^2-1)h^2(a)\nu\tau} \operatorname{erfc} [-h(a)(a+ib)\sqrt{\nu\tau}]\} = H_2 e^{h^2(a)\nu\tau}$$

$$H_2 = 2\pi^{-1/2} \int_0^{\infty} e^{-x^2+2ah(a)x\sqrt{\nu\tau}} \sin [2bh(a)x\sqrt{\nu\tau}] dx$$

Нахождение подынтегральных функций не представляет особого труда

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(a+ib) + \varphi_1(a-ib) = & \frac{2h^2(a)}{3\lambda^3(a^4+b^4+1+2a^2b^2-2a^2+2b^2)} \times \\
 & \times \left\{ - (a^2-b^2-1) \operatorname{erf}(h(a)\sqrt{\nu\tau}) - \frac{a(a^2-3b^2-1)}{a^2+b^2} + \right. \\
 & \left. + H_1 a(a^2-3b^2-1) e^{-\nu\tau h^2(a)} - H_2 b(b^2-3a^2+1) e^{-\nu\tau h^2(a)} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i[\varphi_1(a+ib) - \varphi_1(a-ib)] = & \frac{2h^2(a)}{3\lambda^3(a^4+b^4+1+2a^2b^2-2a^2+2b^2)} \times \\
 & \times \left\{ 2ab \operatorname{erf}(h(a)\sqrt{\nu\tau}) - \frac{b(b^2-3a^2+1)}{a^2+b^2} - \right. \\
 & \left. - H_1 b(b^2-3a^2+1) e^{-\nu\tau h^2(a)} - H_2 a(a^2-3b^2+1) e^{-\nu\tau h^2(a)} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_2(a+ib) + \varphi_2(a-ib) = & \frac{2h^4(a)}{3\lambda^3} [-\operatorname{erf}(h(a)\sqrt{\nu\tau}) + H_1 a e^{-h^2(a)\nu\tau} - \\
 & - H_2 b e^{-h^2(a)\nu\tau}]
 \end{aligned}$$

$$i[\varphi_2(a+ib) - \varphi_2(a-ib)] = -\frac{2h^4(a)}{3\lambda^3} [H_2 a e^{-h^2(a)\nu\tau} + H_1 b e^{-h^2(a)\nu\tau}]$$

Интегралы  $H_1$  и  $H_2$  не берутся в элементарных функциях, вычисляем их приближенно, применяя метод Лапласа [4].

Теперь легко установить, что подынтегральная функция в (4.3) будет непрерывной и интеграл по  $r$  абсолютно сходится. Следовательно, замена порядка интегрирования в (4.3) является законной.

§ 5. Вычисление интегралов и расчетные формулы. Рассмотрим интегралы

$$\begin{aligned} f_1(a_1, b_1) &= \int_0^{\infty} \exp(-x^2 + 2a_1x) \cos 2b_1x dx \\ f_2(a_1, b_1) &= \int_0^{\infty} \exp(-x^2 + 2a_1x) \sin 2b_1x dx \end{aligned} \quad (5.1)$$

Применяя к вычислению этих интегралов метод Лапласа и добиваясь, чтобы их приближенные значения при  $a_1 = 0$  и  $b_1 = 0$  совпадали с точными, можно записать

$$\begin{aligned} f_1(a_1, b_1) &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \exp(a_1^2 - b_1^2) [\operatorname{erfc}(-a_1) \cos 2a_1b_1 - \operatorname{erf}(b_1) \sin 2a_1b_1] \\ f_2(a_1, b_1) &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \exp(a_1^2 - b_1^2) [\operatorname{erfc}(-a_1) \sin 2a_1b_1 + \operatorname{erf}(b_1) \cos 2a_1b_1] \end{aligned}$$

Полагая здесь  $a_1 = ah(a) \sqrt{\nu\tau}$ ,  $b_1 = bh(a) \sqrt{\nu\tau}$ , получим

$$\begin{aligned} H_1 &\approx \exp[h^2(a)(a^2 - b^2)\nu\tau] \{ \operatorname{erfc}[-ah(a)\sqrt{\nu\tau}] \cos 2abh^2(a)\nu\tau - \\ &\quad - \operatorname{erf}[bh(a)\sqrt{\nu\tau}] \sin 2abh^2(a)\nu\tau \} \\ H_2 &\approx \exp[h^2(a)(a^2 - b^2)\nu\tau] \{ \operatorname{erfc}[-ah(a)\sqrt{\nu\tau}] \sin 2abh^2(a)\nu\tau + \\ &\quad + \operatorname{erf}[bh(a)\sqrt{\nu\tau}] \cos 2abh^2(a)\nu\tau \} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Приступим теперь к вычислению интегралов, входящих в (4.12), применив метод стационарной фазы.

Легко установить, что асимптотическое значение разности интегралов по действительным корням равно нулю. Интегралы, содержащие тригонометрическую часть вида  $\cos[Rh(a)\cos\theta]$ , асимптотически также равны нулю. Рассмотрение интегралов, содержащих множители вида

$$\cos[Rh(a)\cos\theta] \sin 2abh^2(a)\nu\tau = \frac{1}{2} \{ \sin[Rh(a)\cos\theta - 2abh^2(a)\nu\tau] + \sin[Rh(a)\cos\theta + 2abh^2(a)\nu\tau] \}$$

$$\cos[Rh(a)\cos\theta] \cos 2abh^2(a)\nu\tau = \frac{1}{2} \{ \cos[Rh(a)\cos\theta - 2abh^2(a)\nu\tau] + \cos[Rh(a)\cos\theta + 2abh^2(a)\nu\tau] \}$$

приводит к уравнениям для определения стационарных точек

$$\begin{aligned} &-(8a^6 + 4a^4 + 1)(4a^6 + 4a^4 - 1)^{1/3}(a^3 + a - 1)^{1/2} \mp \\ &\mp a^{7/6}\omega(16a^9 + 24a^7 - 52a^6 + 8a^5 - 20a^4 + 20a^3 + 14a - 11) = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} &-(8a^6 + 4a^4 + 1)(4a^6 + 4a^4 - 1)^{1/3}(a^3 + a - 1)^{1/2} \mp \\ &\mp a^{7/6}\omega(16a^9 + 24a^7 + 52a^6 + 8a^5 + 20a^4 + 20a^3 + 14a + 11) = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$(\omega = \lambda\nu\tau(2R\cos\theta)^{-1})$

Найти точную зависимость  $a$  от  $\omega$  очень трудно, но для малых и больших  $\omega$  можно получить приближенные формулы.

Если значения  $\omega < 1/2$ , то их можно считать малыми, если значения  $\omega > 2$ , их можно считать большими.

1. При  $\omega$  малых и  $b = (a^2 + 1 - a^{-1})^{1/2}$

$$\begin{aligned} [h(a) + 4abh^2(a)\omega] \lambda R \cos \theta &\rightarrow a \approx 0.6823 + 0.065\omega^2 \\ [h(a) - 4abh^2(a)\omega] \lambda R \cos \theta &\rightarrow a \approx 1/2 \sqrt{2\omega}^{-3/2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

2. При  $\omega$  малых и  $b_1 = (a^2 + 1 + a^{-1})^{1/2}$

$$\begin{aligned} [h(a) + 4abh^2(a)\omega] \lambda R \cos \theta &\rightarrow \text{стационарных точек нет} \\ [h(a) - 4abh^2(a)\omega] \lambda R \cos \theta &\rightarrow \begin{cases} a \approx 0.6478 + 20\omega^3 & (a < 1.8) \\ a \approx 1/2 \sqrt{2\omega}^{-3/2} & (a > 1.8) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.6)$$

3. При  $\omega$  больших и  $b = (a^2 + 1 - a^{-1})^{1/2}$

$$\begin{aligned} [h(a) + 4abh^2(a)\omega] \lambda R \cos \theta &\rightarrow a \approx 1.02367 - 0.57\omega^{-1} \\ [h(a) - 4abh^2(a)\omega] \lambda R \cos \theta &\rightarrow a \approx 1.02367 + 0.57\omega^{-1} \end{aligned} \quad (5.7)$$

При  $\omega$  больших и  $b_1 = (a^2 + 1 + a^{-1})^{1/2}$  стационарных точек нет. Можно показать, что при  $a < 1.8$  интегралами в (4.12) можно пренебречь.

Будем рассматривать случай малых значений  $\omega$  ( $\omega < 1/2$ ). Метод стационарной фазы дает следующую формулу

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t) e^{ikh(t)} dt = \left[ \frac{2\pi}{|kh''(\tau)|} \right]^{1/2} g(\tau) \exp \left( ikh(\tau) \pm i \frac{\pi}{4} \right) \left[ 1 + O \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right] \quad (5.8)$$

где  $\tau$  — стационарная точка функции  $h(t)$  ( $\alpha < \tau < \beta$ ),  $k$  — большой параметр. Знак у члена в показателе степени ( $\pm i\pi/4$ ) берется одинаковым со знаком  $kh''(\tau)$ .

После подсчетов получим из (4.10)

$$\begin{aligned} G_1 &= - \int_0^{1/2\pi} \frac{\sqrt{g\nu^2\tau^3}}{8R^3 \cos^3 \theta \sqrt{\pi R \cos \theta}} \exp \left( - \frac{\nu\tau^5 g^2}{8R^4 \cos^4 \theta} \right) \cos \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{g\tau^2}{4R \cos \theta} \right] \times \\ &\quad \times \left[ 1 + O \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda R \cos \theta}} \right) \right] d\theta \\ G_2 &= \int_0^{1/2\pi} \frac{\sqrt{g} g\nu\tau^4}{16 (R \cos \theta)^{3/2} \sqrt{\pi}} \exp \left( - \frac{\nu\tau^5 g^2}{8R^4 \cos^4 \theta} \right) \sin \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{g\tau^2}{4R \cos \theta} \right] \times \\ &\quad \times \left[ 1 + O \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda R \cos \theta}} \right) \right] d\theta \quad (\lambda r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла по переменной  $\theta$  снова применим метод стационарной фазы. В этом случае  $\theta = 0$ , откуда следует

$$\begin{aligned} G_1 &= - \frac{\nu^2\tau^2}{8 \sqrt{2} R^3} \exp \left[ - \frac{\nu g^2 \tau^5}{8R^4} \right] \cos \left( \frac{g\tau^2}{4R} \right) \left[ 1 + O \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda R}} \right) + O \left( \sqrt{\frac{4R}{gt^2}} \right) \right] \\ G_2 &= \frac{g\nu\tau^3}{4 \sqrt{2} R^4} \exp \left[ - \frac{\nu g^2 \tau^5}{8R^4} \right] \sin \left( \frac{g\tau^2}{4R} \right) \left[ 1 + O \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda R}} \right) + O \left( \sqrt{\frac{4R}{gt^2}} \right) \right] \\ &\quad (\lambda R \rightarrow \infty, gt^2/4R \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \zeta(x, y, t) &= \zeta_0(x, y) - \frac{1}{16 \sqrt{2\rho\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\rho g \zeta_0(x-u, y-w) + \\ &+ p_0(x-u, y-w, t-\tau)] G_1 du dw d\tau = \\ &= \zeta_0(x, y) + \frac{g}{16 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0(x-u, y-w) G_1(u, w, t) du dw - \\ &- \frac{g}{8 \sqrt{2\rho\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x-u, y-w, t-\tau) G_2(u, w, \tau) du dw d\tau \end{aligned} \quad (5.11)$$

В случае осевой симметрии формула (5.11) принимает вид

$$\begin{aligned} \zeta(r, t) &\sim \zeta_0(r) + \frac{g}{16 \sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \zeta_0(R) t^2 R_1^{-3} \exp\left(-\frac{\nu t^5 g^2}{8R_1^4}\right) \cos \frac{gt^2}{4R_1} R dR d\varphi - \\ &- \frac{g}{8 \sqrt{2\rho\pi}} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} p_0(R, t-\tau) \tau^3 R_1^{-4} \exp\left(-\frac{\nu \tau^5 g^2}{8R_1^4}\right) \sin \frac{g\tau^2}{4R_1} R dR d\varphi d\tau = \\ &= \zeta_0(r) - \frac{1}{16 \sqrt{2\rho\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} [\rho g \zeta_0(R) + p_0(R, t-\tau)] \tau^2 R_1^{-3} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{\nu g^2 \tau^5}{8R_1^4}\right) \cos \frac{g\tau^2}{4R_1} R dR d\varphi d\tau \end{aligned}$$

$$R_1 = R^2 + r^2 + 2rR \cos \varphi \quad (\lambda R \rightarrow \infty, gt^2/4R \rightarrow \infty)$$

Так как для воды  $\lambda = (gv^{-2})^{1/3}$  величина большая, то формулы (5.11) и (5.12) практически пригодны для всех отличных от нуля значений  $r$ .

Формулы (5.11) — (5.12) дают асимптотические выражения для определения вида свободной поверхности при малых  $\omega$  ( $\omega < 1/2$ ). Дальнейшее решение возможно только после задания вида функций  $\zeta_0(x, y)$  и  $p_0(x, y, t)$ .

§ 6. Частные случаи. Для механической интерпретации полученных результатов рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть

$$p_0 \equiv 0, \quad \zeta_0 = A (2\pi r)^{-1} \delta(r), \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Такое задание условий на свободной поверхности соответствует поднятию конечного объема жидкости в малой окрестности начала координат. Так как  $r^{-1} \delta(r) \sim 0$ , то из (5.12) получим

$$\begin{aligned} \zeta(r, t) &= A \frac{gt^2}{16 \sqrt{2r^3}} \exp\left(-\frac{\nu g^2 t^5}{8r^4}\right) \cos \frac{gt^2}{4r} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda r}}\right) + O\left(\sqrt{\frac{4r}{gt^2}}\right)\right] \\ &(\lambda r \rightarrow \infty, gt^2(4r)^{-1} \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь использована формула

$$\int_0^{\infty} f(r) \delta(r) dr = f(0)$$

Допустим, что наблюдается колебание уровня в данном месте. Тогда из формулы (6.2) вытекает, что вследствие наличия множителя  $t^2$  амплитуды колебаний в пер-

вое время растут, а период колебаний уменьшается. Но вследствие присутствия показательного множителя амплитуда колебаний с увеличением времени начинает стремиться к нулю. С увеличением времени в месте наблюдения обнаруживается безграничное уменьшение размахов и периодов колебаний. Это обстоятельство не встречается в задаче Коши — Пуассона для идеальной жидкости. Свободная поверхность вязкой жидкости в этом случае представляет собой ряд кольцевых волн, распространяющихся со скоростью  $c = 2rt^{-1}$ .

2. Пусть

$$\zeta_0 \equiv 0, \quad p_0 = Q\delta(x)\delta(y)\delta(t)$$

Это означает, что в начальный момент на поверхность жидкости в малой окрестности начала координат подействовал импульс давления. Из формулы (5.11) находим

$$\zeta = -\frac{Qgt^3}{8\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\nu g^2 t^5}{8r^4}\right) \sin \frac{gt^2}{4r} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda r}}\right) + O\left(\sqrt{\frac{4r}{gt^2}}\right)\right] \\ (\lambda r \rightarrow \infty, \quad gt^2(4r)^{-1} \rightarrow \infty) \quad (6.2)$$

Из полученного выражения видно, что картина свободной поверхности в общем совпадает с соответствующей картиной для идеальной жидкости. Отличие состоит в том, что при  $r \rightarrow 0$  нет неограниченного роста амплитуды, который имеется в идеальной жидкости. При  $\nu = 0$  получим известный результат для идеальной жидкости [5]. Формула (6.2) позволяет решить задачу о корабельных волнах на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины при прямом и круговом курсах корабля.

3. Пусть

$$\zeta_0 \equiv 0, \quad p_0(x, y, t) = Q\delta(x)\delta(y)(1 - \cos \sigma t)$$

Можно считать, что в малой окрестности начала координат на жидкость действует вибратор. Используя формулу (5.11) и применяя метод стационарной фазы, получаем

$$\zeta = \frac{Q\sigma^3}{\rho g^2 \sqrt{2\pi g r}} \exp\left(-\frac{8\sigma^5 \nu r}{g^3}\right) \sin \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma^2 r}{g} + \sigma t\right] \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda r}}\right) + \right. \\ \left. + O\left(\sqrt{\frac{4r}{gt^2}}\right) + O\left(\sqrt{\frac{g}{\sigma^2 r}}\right)\right] \quad (6.3)$$

$$(\lambda r \rightarrow \infty, \quad (4r)^{-1} gt^2 \rightarrow \infty, \quad g(\sigma^2 r)^{-1} \rightarrow \infty)$$

Свободная поверхность представляет собой прогрессивные волны, амплитуда которых затухает с удалением от начала координат, и распространяющиеся со скоростью  $c = g\sigma^{-1}$ .

Во всех случаях при  $\nu = 0$  получаем известные для идеальной жидкости результаты.

Поступила 9 VII 1963

Ростовский университет

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИЛ, 1955.
2. Лурье А. И. Операционное исчисление. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1950.
3. Диткин В. А. и Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1951.
4. Эрдейн А. Асимптотические разложения. Физматгиз, 1962.
5. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. ИЛ, 1959.