Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КЛАССИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ

Г. Я. Попов

(Одесса)

В работе [1] были установлены некоторые свойства многочленов Якоби (и, в частности, Гегенбауэра, Лежандра и Чебышева) и дано их применение к контактным задачам. Здесь дополняются полученные результаты, а именно: устанавливаются аналогичные свойства для многочленов Чебышева — Лагерра и Чебышева — Эрмита и дается применение их к построению приближенного решения пространственной задачи о контакте полубесконечной пластинки с упругим полупространством.

§ 1. Заметим, что если задан линейный оператор L, причем такой, что соответствующее ему интегральное уравнение

$$L\varphi_m = \rho(x)\, x^m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.1}$$

имеет единственное интегрируемое решение вида

$$\varphi_m(x) = \rho(x) \sum_{k=0}^{m} b_k^{(m)} x^k, \qquad b_m^{(m)} \neq b_k^{(k)} \neq 0 \qquad (m, k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.2}$$

то можно построить систему многочленов

$$p_m(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j^{(m)} x^j, \qquad c_m^{(m)} = 1 \qquad (m = 0, 1, 2 \ldots) \tag{1.3}$$

весьма просто связанных с собственными функциями оператора L, т. е.

$$L\,[p_m(x)\,\rho(x)] = \mu_m \rho(x)\, p_m(x) \qquad (m = 0, 1, 2 \ldots) \tag{1.4}$$

и, кроме того,

$$\mu_m = [b_m^{(m)}]^{-1} \tag{1.5}$$

В справедливости высказанного утверждения можно убедиться точно так же, как и в работе [1]. Далее будем опираться на результат работы [2], в которой построено решение интегрального уравнения

$$\frac{2^\mu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2 - \mu)} \int_0^\infty \frac{K_\mu(|t-\tau|)}{|t-\tau|^\mu}\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(t) \qquad \left(t \geqslant 0,\ |\operatorname{Re}\mu| < \frac{1}{2}\right) \tag{1.6}$$

где $K_\mu(z)$ — функция Макдональда.

В частности, из цитируемой работы следует, что при $f(t) = e^{-\sigma t}$ решение $\varphi_\sigma(t)$ уравнения (1.6) имеет вид

$$\varphi_\sigma(t) = \frac{\sin \omega\pi}{\pi}\, \Gamma(\omega)\, (1+\sigma)^\omega \left[\frac{e^{-t}}{t^\omega} + (1-\sigma) \int_0^t \frac{e^{-s}}{s^\omega}\, e^{\sigma(s-t)}\, ds\right] \qquad \left(\omega = \frac{1}{2} - \mu\right) \tag{1.7}$$

и, стало быть, решение такого уравнения

$$\frac{2^\mu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2 - \mu)} \int_0^\infty \frac{K_\mu(|t-\tau|)}{|t-\tau|^\mu}\, \frac{\varphi_m(\tau)}{\tau^{1/2-\mu}}\, d\tau = e^{-t} t^m \qquad (t \geqslant 0) \tag{1.8}$$

будет определяться формулой

$$\varphi_m(t) = (-1)^m t^{1/2-\mu}\left[\frac{d^m}{d\sigma^m}\varphi_\sigma(t)\right]_{\sigma=1}$$

Откуда после m-кратного дифференцирования находим

$$\varphi_m(t) = e^{-t}\sum_{k=0}^{m} b_k^{(m)} t^k, \qquad b_k^{(m)} = \frac{2^{k-m-\mu+1}\,\Gamma(\mu+m-k-1/2)\,m!}{\sqrt{2}\,\Gamma(\mu-1/2)\,(m-k)!\,\Gamma(\mu+k+1/2)} \tag{1.9}$$

Следовательно, собственные числа μ_m интегрального оператора, содержащегося в (1.8), в соответствии с (1.5) и (1.9) будут иметь вид

$$\mu_m = 2^{\mu-1/2}(m!)^{-1}\,\Gamma(1/2+\mu+m) \tag{1.10}$$

Руководствуясь теми же соображениями, что и в работе [1], и учитывая при этом условия ортогональности и нормированности [3] многочленов Чебышева — Лагерра $L_m^\alpha(x)$, можно получить, с одной стороны, интегральное свойство для указанных многочленов

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-\mu)}\int_0^\infty \frac{K_\mu(|t-\tau|)\,e^{-\tau}}{|t-\tau|^\mu\,\tau^{1/2-\mu}}\,L_m^{\mu-1/2}(2\tau)\,d\tau = \frac{\Gamma(1/2+\mu+m)}{\sqrt{2}\,m!}\,e^{-t}L_m^{\mu-1/2}(2t)$$

$$(t \geqslant 0,\ m = 0, 1, 2\ldots) \tag{1.11}$$

а с другой стороны, разложение, сходящееся в среднем

$$\frac{K_\mu(|x-y|)}{|x-y|^\mu} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-\mu)}{2^{-\mu}e^{x+y}}\sum_{m=0}^{\infty} L_m^{\mu-1/2}(2x)\,L_m^{\mu-1/2}(2y) \tag{1.12}$$

Соотношения (1.11) и (1.12) при $\mu = 0$ преобретают вид

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty K_0(|t-\tau|)\,e^{-\tau}L_m^{-1/2}(2\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \frac{\pi}{(2)^{1/2}}\,\frac{(2m-1)!!}{2m!!}\,e^{-t}L_m^{-1/2}(2t) \tag{1.13}$$

$$\frac{1}{\pi}K_0(|x-y|) = e^{-x-y}\sum_{m=0}^{\infty} L_m^{-1/2}(2x)\,L_m^{-1/2}(2y) \tag{1.14}$$

Учитывая известную связь [3] между многочленами Эрмита и Лагерра

$$H_{2m}(\sqrt{t}) = (-1)^m\,2^{2m}m!\,L_m^{-1/2}(t) \tag{1.15}$$

в соотношениях (1.14) и (1.15) многочлены Лагерра можно заменить, если это окажется более удобным, на многочлены Эрмита.

Кроме того, так как $K_0(ix) = -1/2\pi i H_0^{(2)}(x)$, то нетрудно соотношение (1.13) преобразовать формально в аналогичное соотношение для второй ханкелевой функции $H_0^{(2)}(x)$. Для этого следует в (1.13) сперва сделать замену $t = \mu x$, $\tau = \mu\xi$ ($\mu > 0$), а затем аналитически продолжить полученный результат на комплексные значения μ, взятые из первого квадранта ($0 \leqslant \arg\mu < 1/2\pi$). В результате будем иметь ($\mu = i\lambda$)

$$\int_0^\infty \frac{H_0^{(2)}(\lambda|x-\xi|)}{\sqrt{\xi}\,e^{i\lambda\xi}}\,L_m^{-1/2}(2i\lambda\xi)\,d\xi = \frac{2i\sqrt{\pi}}{\sqrt{2i\lambda}}\,\frac{(2m-1)!!}{2m!!}\,\frac{L_m^{-1/2}(2i\lambda x)}{e^{i\lambda x}} \tag{1.16}$$

Отметим, что интегральный оператор, содержащийся в (1.13), порождает интегральное уравнение первого рода, к которому приводится задача о вдавливании полубесконечного штампа в упругое полупространство [4], а интегральный оператор, содержащийся в (1.16), играет аналогичную роль в задаче Зоммерфельда [5].

§ 2. Известный результат Бэтмена ([6], стр. 171), доказанный им для интегральных уравнений второго рода, остается справедливым и для интегральных уравнений первого рода в следующей формулировке.

Пусть для уравнения

$$\int_a^b k(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{2.1}$$

в некотором классе функций найдена резольвента $\gamma(x, y)$, т. е. функция, при помощи которой решение уравнения (2.1) дается в виде

$$\varphi(x) = \int_a^b \gamma(x, y)\, f(y)\, dy \tag{2.2}$$

Тогда для интегрального уравнения с ядром

$$K_n(x, y) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} k(x, y) & f_1^*(x) & \ldots & f_n^*(x) \\ g_1^*(y) & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ g_n^*(y) & a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix} \tag{2.3}$$

где $f_k^*(x)$ и $g_m^*(y)$ — произвольные функции, а $a_{k,m}$ — произвольные числа, резольвента дается в виде

$$\Gamma_n(x, y) = \frac{1}{\Delta^*}\begin{vmatrix} \gamma(x, y) & \varphi_1^*(x) & \ldots & \varphi_n^*(x) \\ \chi_1^*(y) & \tau_{11} - a_{11} & \ldots & \tau_{1n} - a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi_n^*(y) & \tau_{n1} - a_{n1} & \ldots & \tau_{nn} - a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} \tau_{11} - a_{11} & \ldots & \tau_{1n} - a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_{n1} - a_{n1} & \ldots & \tau_{nn} - a_{nn}\end{vmatrix} \tag{2.4}$$

где

$$\varphi_m^*(x) = \int_a^b \gamma(x, y)\, f_m^*(y)\, dy, \qquad \chi_k^*(x) = \int_a^b \gamma(y, x)\, g_k^*(y)\, dy \tag{2.5}$$

$$\tau_{k,m} = \int_a^b \varphi_m^*(x)\, g_k^*(x)\, dx \tag{2.6}$$

Этот результат, известный в теории линейных операторов, легко доказывается и непосредственной подстановкой функции

$$\varphi_n(x) = \int_a^b \Gamma_n(x, y)\, f(y)\, dy$$

в уравнение (2.1) с ядром вида (2.3).

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода с симметричным ядром $K(x, y)$, представимым в виде

$$K(x, y) = k(x, y) - K_*(x, y)$$

причем $k(x, y)$ и $K_*(x, y)$ тоже симметричные ядра. Будем предполагать, что для интегрального оператора, порождаемого ядром $k(x, y)$, в некотором классе функций известен обратный оператор, а также полная система собственных функций $g_m(x)$, таких, что (δ_{mn} — символ Кронекера)

$$\int_a^b k(x, y)\, g_m(y)\, dy = \mu_m g_m(x), \qquad \int_a^b g_m(x)\, g_n(x)\, dx = \lambda_n \delta_{mn} \tag{2.7}$$

Для достаточно общего случая можем получить разложение

$$K_*(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{k,m}\, g_k(x)\, g_m(y) \qquad (a_{k,m} = a_{m,k})$$

Введем далее обозначение

$$K_n(x, y) = k(x, y) - \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} a_{k,m} g_k(x) g_m(y) \tag{2.8}$$

Резольвенту интегрального уравнения первого рода с ядром (2.8) обозначим соответственно через $\Gamma_n(x, y)$. Предполагая известным $\Gamma_n(x, y)$, построим $\Gamma_{n+1}(x, y)$, т. е. резольвенту интегрального уравнения первого рода с ядром $K_{n+1}(x, y)$. Нетрудно проверить, что

$$K_{n+1}(x, y) = -\begin{vmatrix} K_n(x, y) & g_{n+1}(x) & S_n(x) \\ g_{n+1}(y) & 0 & 1 \\ S_n(y) & 1 & -a_{n+1} \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

где

$$a_n = a_{n,n}, \qquad S_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{j,n+1} g_j(x)$$

Приняв во внимание, что согласно (2.7)

$$\int_a^b K_n(x, y) g_{n+1}(y)\, dy = \mu_{n+1} g_{n+1}(x)$$

и введя обозначения

$$\Omega_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{j,n+1} \int_a^b \Gamma_n(x, y) g_j(y)\, dy \tag{2.10}$$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} a_{k,n+1} a_{m,n+1} \int_a^b \int_a^b \Gamma_n(x, y) g_k(x) g_m(y)\, dx\, dy \tag{2.11}$$

в соответствии с (2.4) будем иметь

$$\Gamma_{n+1}(x, y) = \frac{\mu_{n+1}}{\Delta_n^*} \begin{vmatrix} \Gamma_n(x, y) & \mu_{n+1}^{-1} g_{n+1}(x) & \Omega_n(x) \\ \mu_{n+1}^{-1} g_{n+1}(y) & \mu_{n+1}^{-1} \lambda_{n+1} & -1 \\ \Omega_n(y) & -1 & a_{n+1} + T_n \end{vmatrix} \tag{2.12}$$

где

$$\Delta_n^* = \lambda_{n+1}(a_{n+1} + T_n) - \mu_{n+1}$$

Формулу (2.12) после раскрытия определителя можно представить в таком виде

$$\Gamma_{n+1}(x, y) = \Gamma_n(x, y) - \frac{g_{n+1}(x) g_{n+1}(y)}{\mu_{n+1} \lambda_{n+1}} - \frac{1}{\Delta_n^*} [\Omega_n(x) g_{n+1}(y) +$$
$$+ g_{n+1}(x) \Omega_n(y) + \lambda_{n+1} \Omega_n(x) \Omega_n(y) + \lambda_{n+1}^{-1} g_{n+1}(x) g_{n+1}(y)] \tag{2.13}$$

Представив

$$\Gamma_n(x, y) = \gamma(x, y) - \sum_{m=0}^{n} \frac{g_m(x) g_m(y)}{\mu_m \lambda_m} - \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} A_{k,m}^{(n)} g_k(x) g_m(y) \tag{2.14}$$

и используя формулы (2.10) — (2.13), можно обнаружить, что

$$\Gamma_{n+1}(x, y) = \gamma(x, y) - \sum_{m=0}^{n+1} \frac{g_m(x) g_m(y)}{\mu_m \lambda_m} - \sum_{m=0}^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} A_{k,m}^{(n+1)} g_k(x) g_m(y)$$

причем для коэффициентов $A_{k,m}^{(n+1)}$ будут справедливы следующие формулы

$$A_{m,k}^{(n+1)} = A_{m,k}^{(n)} - \frac{\lambda_{n+1} B_k B_m}{\Delta_n} \qquad (m, k \leqslant n)$$

$$A_{m,n+1}^{(n+1)} = A_{n+1,m}^{(n+1)} = \frac{B_m}{\Delta_n} \qquad (m \leqslant n), \qquad A_{n+1,n+1}^{(n+1)} = \frac{-1}{\Delta_n \lambda_{n+1}} \tag{2.15}$$

где

$$B_m^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} a_{r,n+1} \lambda_r A_{m,r}^{(n)}, \qquad \Delta_n = \mu_{n+1} - \lambda_{n+1} \left(a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_{k,n+1} \lambda_k B_k^{(n)}\right)$$

С другой стороны, нетрудно показать, что

$$\Gamma_0(x, y) = \gamma(x, y) - \frac{g_0(x) g_0(y)}{\mu_0 \lambda_0} - \frac{g_0(x) g_0(y)}{\lambda_0 (a_0 \lambda_0 - \mu_0)}$$

Отсюда

$$A_{0,0}^{(0)} = \lambda_0^{-1} (a_0 \lambda_0 - \mu_0)^{-1} \tag{2.16}$$

Таким образом, зная $A_{00}^{(0)}$ и пользуясь рекуррентными формулами (2.15), можем построить резольвенту для интегрального уравнения первого рода с ядром (2.8).

В случае интегрального уравнения второго рода

$$\varphi(x) + \int_a^b k(x, y) \varphi(y)\, dy = f(x), \qquad \left[k(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m^*(x) g_m^*(y)\right] \tag{2.17}$$

которое можно записать в виде уравнения первого рода

$$\int_a^b [\delta(x - y) + k(x, y)] \varphi(y)\, dy = f(x) \qquad [\delta(x) \text{ — импульсная функция}]$$

для коэффициентов $A_{k,j}^{(n)}$, определяющих резольвенту

$$\Gamma_n(x, y) = \delta(x - y) - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} A_{k,j}^{(n)} f_k^*(x) g_j^*(y) \tag{2.18}$$

уравнения

$$\int_a^b \left[\delta(x - y) + \sum_{m=0}^{n} f_m^*(x) g_m^*(y)\right] \varphi_n(y)\, dy = f(x)$$

можно аналогичным путем установить рекуррентные формулы

$$A_{k,j}^{(n+1)} = A_{k,j}^{(n)} + \Delta_n^{-1} B_k^{(n)} C_j^{(n)} \qquad (k, j \leqslant n)$$

$$A_{n+1,j}^{(n+1)} = \frac{C_j^{(n)}}{\Delta_n} \ (j \leqslant n), \qquad A_{k,n+1}^{(n+1)} = \frac{B_k^{(n)}}{\Delta_n} \ (k \leqslant n), \qquad A_{n+1,n+1}^{(n+1)} = \frac{1}{\Delta_n} \tag{2.19}$$

где

$$B_k^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} A_{k,j}^{(n)} a_{n+1,j}, \qquad C_j^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} A_{k,j}^{(n)} a_{k,n+1}, \qquad a_{k,j} = \int_a^b f_k^*(x) g_j^*(y)\, dy$$

$$\Delta_n = 1 + a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} A_{k,j}^{(n)} a_{n+1,j} a_{k,n+1} \qquad (a_{k,k} = a_k)$$

При этом нетрудно обнаружить, что

$$A_{0,0}^{(0)} = (1 + a_0)^{-1}$$

§ 3. Укажем возможные пути применения полученных результатов к построению приближенных решений некоторых интегральных уравнений математической физики.

Пусть требуется построить приближенное решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) + \frac{\lambda}{\pi}\int_0^a K_0(|x-s|)\,\varphi(s)\,ds = f(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant a) \tag{3.1}$$

Удержав в разложении (1.14) $n+1$ член, для ядра интегрального уравнения получим следующее приближенное представление

$$K_0(|x-s|) \approx \pi e^{-x-s}\sum_{m=0}^{n} L_m^{-1/2}(2x)\,L_m^{-1/2}(2s) \qquad (x,\ s \geqslant 0)$$

использование которого приведет (3.1) к интегральному уравнению типа (2.17). Стало быть, если обозначить решение уравнения (3.1) с ядром, определяемым последней формулой, через $\varphi_n(x)$ ($n+1$ — приближение к точному решению), то в соответствии с (2.18) будем иметь

$$\varphi_n(x) = f(x) - \int_0^a \Gamma_n^*(x,y)\,f(y)\,dy \tag{3.2}$$

где

$$\Gamma_n^*(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} A_{k,j}^{(n)} L_k^{-1/2}(2x)\,L_j^{-1/2}(2y)\,e^{-x-y}$$

Для коэффициентов $A_{k,j}^{(n)}$ справедливы рекуррентные формулы (2.2), в которых в силу того, что

$$f_k^*(x) = g_k^*(x) = \sqrt{\lambda}\,e^{-x}L_k^{-1/2}(2x)$$

следует принять

$$C_j^{(n)} = B_j^{(n)}, \qquad A_{k,j}^{(n)} = A_{j,k}^{(n)}, \qquad a_{k,j} = \lambda\int_0^a e^{-2x}L_k^{-1/2}(2x)\,L_j^{-1/2}(2x)\,dx \tag{3.3}$$

Последний интеграл можно представить в таком виде

$$a_{k,j} = \lambda\,[a_{k,j}^{\infty} - e^{-2a}P_{kj}(2a)] \tag{3.4}$$

Числа $a_{k,j}^{\infty}$ и многочлен $P_{kj}(b)$ будут определяться формулами

$$a_{k,j}^{\infty} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-t}L_k^{-1/2}(t)\,L_j^{-1/2}(t)\,dt =$$

$$= \frac{(-1)^k(2j-1)!!}{2^{j+k+1}\,k!}\sum_{r=0}^{j}\frac{(-2)^r(1+2r)}{(j-r)!\,[2(r-k)+1]!!} \tag{3.5}$$

$$P_{kj}(b) = \frac{e^b}{2}\int_b^{\infty} e^{-t}L_k^{-1/2}(t)\,L_j^{-1/2}(t)\,dt = \sum_{m=0}^{k+j} c_m L_m^{-1/2}(b) \tag{3.6}$$

где

$$2c_m = \frac{(2k-1)!!\,(2j-1)!!}{(2m+1)!!\,2^{k+j-m}}\sum_{r=0}^{k}\ \sum_{s=\max(0,\,m-r)}^{j}\frac{(-1)^{r+s+m}(2r+2s+1)!}{(2r)!\,(2s)!\,(r+s-m)!\,(k-r)!\,(j-s)!}$$

Чтобы убедиться в справедливости второго равенства в формуле (3.5), следует вместо $L_k^{-1/2}(t)$ подставить его выражение через весовую функцию и проинтегрировать k-раз по частям. Для доказательства второго равенства в (3.6) следует разложить $P_{kj}(b)$ в ряд по многочленам Лагерра.

Формула (3.4), а стало быть, и формула для приближенного решения интегрального уравнения (3.2) существенно упрощаются при $a = \infty$, так как в этом случае $a_{k,j} = \lambda a_{k,j}^{\infty}$.

Именно к интегральному уравнению (3.1) при $a = \infty$, как показано Г. А. Гринбергом и В. А. Фоком [7], можно свести задачу о береговой рефракции электромагнитных волн. Этими авторами получено точное решение указанного интегрального уравнения в виде довольно сложной двукратной квадратуры; вследствие этого ими было предложено приближенное решение, справедливое только при не слишком косом падении волны. Предлагаемое здесь приближенное решение не содержит квадратур и может служить, вообще говоря, для любых параметров уравнения (3.1).

§ 4. Применим полученные в первых двух параграфах результаты к построению приближенного решения задачи о контакте полубесконечной пластинки с упругим полупространством. В работе [8] показано, что если на полубесконечную пластинку с жесткостью D действует единичная сила в точке $y = 0$, $x = b$, то трансформанта Фурье $p_\lambda(x)$ контактного напряжения [9] должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\int_0^\infty \left\{\frac{1}{\pi} K_0(\lambda \mid x - \xi \mid) + \frac{c^3}{\lambda^3} G[\lambda(x-\xi)]\right\} p_\lambda(\xi)\, d\xi = f_\lambda(x) \qquad (x, \lambda \geqslant 0) \quad (4.1)$$

где

$$f_\lambda(x) = c^3 (A_0 + A_1 \lambda x) e^{-\lambda x} + \frac{c^3}{\lambda^3} G[\lambda(x-b)] \qquad (4.2)$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-its}}{(1+s^2)^2} ds, \qquad c^3 = \frac{E_1}{2(1-\nu_1^2) D} \qquad (4.3)$$

Здесь A_0 и A_1 — произвольные постоянные, ν_1, E_1 — коэффициент Пуассона и модуль упругости полупространства.

После того как найдено $p_\lambda(x)$ для определения трансформанты Фурье $w_\lambda(x)$ прогибов пластинки, можно воспользоваться одной из следующих формул [8,9]

$$w_\lambda(x) = \frac{\theta_1}{\pi} \int_0^\infty K_0(\lambda \mid x - \xi \mid) p_\lambda(\xi)\, d\xi \qquad \left(\theta_1 = \frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1}\right) \qquad (4.4)$$

$$D w_\lambda(x) = (A_0 + A_1 \lambda x) e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^3}\left[G[\lambda(x-b)] - \int_0^\infty G[\lambda(x-\xi)] p_\lambda(\xi)\, d\xi\right] \qquad (x \geqslant 0) \quad (4.5)$$

Произвольные постоянные A_0 и A_1 следует находить из условий свободного края для пластинки [8,9]

$$w_\lambda^{(2)}(+0) - \lambda^2 \nu w_\lambda(+0) = 0, \qquad w_\lambda^{(3)}(+0) - \lambda^2 (2-\nu) w_\lambda^{(1)}(+0) = 0 \quad (4.6)$$

Помножив обе части уравнения (4.1) на $\sqrt{2/\pi}$ и сделав затем замену

$$\lambda x = t, \qquad \lambda \xi = \tau, \qquad \frac{1}{\lambda} p_\lambda\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) = p(\tau), \qquad \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} f_\lambda\left(\frac{t}{\lambda}\right) = f^*(t) \quad (4.7)$$

получим

$$\int_0^\infty \left[\frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} K_0(\mid t - \tau \mid) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{c^3}{\lambda^3} G(t-\tau)\right] p(\tau)\, d\tau = f^*(t) \qquad (4.8)$$

Приводим получение разложения

$$G(t-\tau) = e^{-(t+\tau)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{km} L_k^{-1/2}(2t)\, L_m^{-1/2}(2\tau). \qquad (4.9)$$

Принимая во внимание ортогональность многочленов Лагерра, можем записать, что

$$\frac{b_{km}}{2}=\frac{k!\,m!}{\Gamma(^1/_2+k)\,\Gamma(^1/_2+m)}\int\limits_0^\infty L_k^{-^1/_2}(2t)\,I_m(t)\,e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}} \tag{4.10}$$

где

$$I_m(t)=\int\limits_0^\infty G(t-\tau)\,L_m^{-^1/_2}(2\tau)\,e^{-\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \tag{4.11}$$

Пользуясь теоремой о свертках для преобразований Фурье и учитывая (4.3), последний интеграл можем записать еще и так

$$I_m(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi_m(u)\,e^{-iut}\,du}{(1+u^2)^2} \tag{4.12}$$

где

$$\Phi_m(u)=\int\limits_0^\infty L_m^{-^1/_2}(2\tau)\,e^{-\tau(1-iu)}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}=\frac{(-1)^m\,\Gamma(m+^1/_2)}{m!}\,\frac{(1+iu)^m}{(1-iu)^{m+^1/_2}} \tag{4.13}$$

При вычислении интеграла, содержащегося в (4.13), была использована формула 7.414 (8) из [3]. Подставив (4.12) в (4.10), после перестановки интегралов и использования формулы (4.13) получим

$$b_{km}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+m}\,du}{(1+iu)^{k-m+^5/_2}\,(1-iu)^{m-k+^5/_2}}=\frac{12}{\pi}\,\frac{1}{9-4(k-m)^2}\,\frac{1}{1-4(k-m)^2} \tag{4.14}$$

При установлении последнего равенства была использована формула 8381 (1) из [3] и известные свойства гамма-функции Эйлера.

Если умножить обе части уравнения (4.8) на $t^{-^1/_4}$ и положить

$$k(t,\tau)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{^1/_2}(t\tau)^{-^1/_4}K_0(|t-\tau|),\qquad g_m(t)=\left(\frac{2}{\pi t}\right)^{^1/_4}e^{-t}L_m^{-^1/_2}(2t) \tag{4.15}$$

$$t^{^1/_4}[p(t),\,f(t)]=\varphi(t),\,f^*(t);\qquad a_{k,m}=-\sigma^3\alpha_{k-m},\qquad \sigma^3=\frac{c^3}{\lambda^3}\,\frac{4}{\pi}$$

$$\alpha_n=\frac{4}{(1-4n^2)(9-4n^2)} \tag{4.16}$$

то, учитывая (4.9), получим

$$\int\limits_0^\infty\left[k(t,\tau)-\sum_{k=0}^\infty\sum_{m=0}^\infty a_{k,m}\,g_k(t)\,g_m(\tau)\right]\varphi(\tau)\,d\tau=f(t) \tag{4.17}$$

причем в силу (1.13) и (4.15) будут иметь место (при $a=0$, $b=\infty$) соотношения (2.7), а также следующее

$$\mu_m=\lambda_m=(2m!!)^{-1}(2m-1)!!\qquad(\mu_0=\lambda_0=1) \tag{4.18}$$

Используя формулы (4.2), (4.7), (4.9), (4.14) и (4.16), правую часть интегрального уравнения (4.17) можем записать в таком виде

$$f(t)=A_0{}^*g_0(t)-A_1{}^*g_1(t)+\sigma^3\sum_{k=0}^\infty g_k(t)\sum_{m=0}^\infty\alpha_{k-m}g_m(\beta)\,\beta^{^1/_4} \tag{4.19}$$

где

$$\beta=\lambda b,\qquad A_0{}^*=(2/\pi)^{^1/_4}c^3(A_0+{}^1/_4A_1),\qquad A_1{}^*={}^1/_2c^3(2/\pi)^{^1/_4}A_1 \tag{4.20}$$

В соответствии с изложенным в § 2 решение интегрального уравнения (4.17) для случая, когда в содержащейся в нем бесконечной сумме удерживается $n+1$ член, будет определяться формулой

$$\varphi_n(t) = \int_0^\infty \Gamma_n(t, \tau) f(\tau)\, d\tau$$

или после подстановки сюда (2.14) с учетом (4.19)

$$\varphi_n(t) = -A_0^* \sum_{k=0}^{n} A_{k,0}^{(n)} g_k(t) + \frac{1}{2} A_1^* \sum_{k=0}^{n} A_{k,1}^{(n)} g_k(t) - \sigma^3 \sum_{k=0}^{n} \omega_k^{(n)}(\beta)\, g_k(t) \tag{4.21}$$

где

$$\omega_k^{(n)}(\beta) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{r=0}^{n} \lambda_m \alpha_{m-r} A_{k,m}^{(n)} g_r(\beta) \sqrt[4]{\beta} \tag{4.22}$$

Следовательно, трансформанта Фурье $p_\lambda^n(x)$ контактного напряжения в $n+1$-м приближении в силу (4.15), (4.16) и (4.7) будет определяться формулой

$$p_\lambda^n(x) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{1/2} e^{-\lambda x} \Big\{ A_0^* \sum_{k=0}^{n} A_{k,0}^{(n)} L_k^{-1/2}(2\lambda x) -$$

$$- \frac{1}{2} A_1^* \sum_{k=0}^{n} A_{k,1}^{(n)} L_k^{-1/2}(2\lambda x) + \sigma^3 \sum_{k=0}^{n} \omega_k^{(n)}(\lambda b) L_k^{-1/2}(2\lambda x) \Big\} \qquad (x \geqslant 0) \tag{4.23}$$

Остается теперь отыскать значения произвольных постоянных A_0^* и A_1^*, удовлетворив условиям свободного края (4.6).

Подстановка (4.23) в (4.4) с использованием соотношения (1.13) даст

$$w_\lambda^n(x) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \theta_1 e^{-\lambda x} \Big[A_0^* \sum_{k=0}^{n} A_{k,0}^{(n)} \lambda_k L_k^{-1/2}(2\lambda x) -$$

$$- \frac{1}{2} A_1^* \sum_{k=0}^{n} A_{k,1}^{(n)} \lambda_k L_k^{-1/2}(2\lambda x) + \sigma^3 \sum_{k=0}^{n} \omega_k^{(n)}(\lambda b)\, \lambda_k L_k^{-1/2}(2\lambda x) \Big] \qquad (x \geqslant 0) \tag{4.24}$$

Используя формулу 8.971 (2) из [3], нетрудно показать, что

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-\lambda x} L_k^{-1/2}(2\lambda x) = (-\lambda)^n e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{\min(n,k)} \binom{n}{j} 2^j L_{k-j}^{-1/2+j}(2\lambda x)$$

и, стало быть,

$$\left[\frac{d^n}{dx^n} e^{-\lambda x} L_k^{-1/2}(2\lambda x)\right]_{x=0} = (-\lambda)^n c_k^{(n)} \left[c_k^{(n)} = \sum_{j=0}^{\min(n,k)} 2^j \binom{n}{j} \binom{k-1/2}{k-j} \right] \tag{4.25}$$

Учитывая (4.24) и (4.25), найдем

$$\left[\frac{d^r}{dx^r} w_\lambda^n(x)\right]_{x=0} = -(-\lambda)^r \theta_1 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/4} \Big\{ A_0^* \sum_{k=0}^{n} A_{k,0}^{(n)} \lambda_k c_k^{(r)} -$$

$$- \frac{1}{2} A_1^* \sum_{k=0}^{n} A_{k,1}^{(n)} \lambda_k c_k^{(r)} + \sigma^3 \sum_{k=0}^{n} \omega_k^{(n)}(\lambda b)\, \lambda_k c_k^{(r)} \Big\} \tag{4.26}$$

Подставив полученные значения производных от $w_\lambda^n(x)$ при $x = 0$ в условия свободного края (4.6), найдем

$$A_0^* = \sigma^3 \frac{B_{1,0}^{(n)} \Omega_1^{(n)}(\lambda b) - B_{1,1}^{(n)} \Omega_0^{(n)}(\lambda b)}{B_{0,0}^{(n)} B_{1,1}^{(n)} - B_{0,1}^{(n)} B_{1,0}^{(n)}}, \qquad -\frac{A_1^*}{2} = \sigma^3 \frac{B_{0,1}^{(n)} \Omega_0^{(n)}(\lambda b) - B_{0,0}^{(n)} \Omega_1^{(n)}(\lambda b)}{B^{(n)} B_{1,1}^{(n)} - B_{0,1}^{(n)} B_{1,0}^{(n)}}$$

где

$$B_{j,r}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} A_{k,j}^{(n)} \lambda_k d_k^{(r)}, \qquad \Omega_r^{(n)}(\beta) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k^{(n)}(\beta) \lambda_k d_k^{(r)}$$

$$d_k^{(0)} = c_k^{(2)} - \nu c_k^{(0)}, \qquad d_k^{(1)} = c_k^{(3)} - (2-\nu) c_k^{(1)}$$

Подставив (4.27) в (4.23) и (4.24), найдем $p_\lambda^n(x)$, $w_\lambda^n(x)$, после чего воспользовавшись формулами [8,9]

$$p_n(x, y), w_n(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [p_\lambda^n(x), \qquad w_\lambda^n(x)] \cos \lambda y \, d\lambda \tag{4.28}$$

получим в $n+1$-м приближении контактное напряжение $p_n(x, y)$ и прогибы полубесконечной пластинки $w_n(x, y)$, нагруженной в точке $y = 0$, $x = b \geqslant 0$ единичной сосредоточенной силой.

Что же касается величин $A_{k,m}^{(j)}$, содержащихся в формулах (4.23) и (4.24), то их следует вычислять, пользуясь рекуррентными формулами (2.15) с учетом (4.16) и (4.18), причем для первого приближения ($n = 0$) в соответствии с (2.16) будем иметь

$$A_{0,0}^{(0)} = (1 + {}^1/_3\sigma^3)^{-1}$$

Таким образом, применение предложенного приближенного способа к задаче о контакте полубесконечной пластинки позволило для любого приближения дать окончательные формулы (4.26), (4.23), (4.24) и (4.27), содержащие только одну квадратуру, взамен четырехкратной квадратуры даваемой точным методом [8, 9].

В заключение отметим, что, опираясь на результаты первых двух параграфов, а также на результаты Г. А. Гринберга [10], можно разработать аналогичные приближенные приемы решения интегральных уравнений, к которым соответственно сводятся задача о дифракции электромагнитных волн на полосе конечной ширины и пространственная задача об изгибе бесконечной балки на упругом полупространстве.

Поступила 28 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
2. Попов Г. Я. Об одном интегральном уравнении. Изв. высш. уч. зав., Математика, 1961, № 4.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.
4. Попов Г. Я. Вдавливание полубесконечного штампа в упругое полупространство. Теорет. и прикл. математика (Львов), 1958, № 1.
5. Copson E. On an integral equation arising in the theory of Diffraction. Quart. J. Math., 1946, 17, № 65.
6. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехтеоретиздат, М.— Л., 1950.
7. Гринберг Г. А., Фок В. А. К теории береговой рефракции электромагнитных волн. Исследования по распространению радиоволн, 1948, 2.
8. Попов Г. Я. Изгиб полубесконечной плиты на упругом полупространстве. Научн. доклады высш. школы, Стр-во, 1958, № 4.
9. Попов Г. Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
10. Гринберг Г. А. Об интегральных уравнениях с ядром, зависящим от абсолютной величины разности аргументов, и конечным промежутком изменения переменных. Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 3.