Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

С. В. Симеонов

(София, Болгария)

Исследование различных случаев напряженного и деформированного состояния деформируемого тела часто сводится к отысканию минимума некоторого функционала. Это приводит к решению уравнений с потенциальными операторами [1].

Таким функционалом может быть полная энергия деформации, полная дополнительная работа деформации [2] и т. д. Этот функционал оказывается удобно рассматривать в соответственно подобранном пространстве Гильберта. Ниже рассматриваются исключительно уравнения с потенциальными операторами.

В § 1 рассматривается приращение функционала, в связи с чем вводятся некоторые понятия, необходимые для дальнейшего. В §§ 2 и 3 предложены и обоснованы два метода последовательных приближений для решения изучаемых функциональных уравнений. В § 4 рассмотрено применение этих методов к некоторым задачам механики деформируемого тела. В §§ 5 и 6 даны доказательства сходимости метода Бубнова — Галеркина и метода «частичной аппроксимации» при решении некоторого класса нелинейных дифференциальных уравнений.

1. Пусть в гильбертовом пространстве H задан функционал $f(x)$. Предположим, что он допускает дифференциал Гато $Df(x, h)$ и что этот дифференциал будет линейным функционалом относительно $h \in H_1 \subset H$. Введем функцию $\varphi(t) = f(x + th)$, где t — численный параметр. Тогда

$$\Delta f(x, h) = f(x + h) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) + {}^1/_2\, W(x, h)$$

Отсюда, обозначив $Ax = \operatorname{grad} f(x)$, получим

$$\Delta f(x, h) = f(x + h) - f(x) = (Ax, h) + {}^1/_2\, W(x, h) \tag{1.1}$$

Заметим, что

$$W(x, h) = \varphi''(\tau) \quad (0<\tau<1), \qquad \varphi''(\tau) = (A'(x + \tau h)\, h, h)$$

Поэтому, если существует производная Гато $A'(x)$ оператора A, то выражение (1.1) получит вид (1.2)

$$\Delta f(x, h) = f(x + h) - f(x) = (Ax, h) + {}^1/_2\, (A'(\xi)\, h, h) \qquad \begin{pmatrix}\xi = x+\tau h\\ 0<\tau<1\end{pmatrix}$$

Если $x^* \in H$ — точка экстремума функционала $f(x)$, то, как известно [1, 3], в этой точке $(Ax^*, h) = Df(x^*, h) = 0$ для любого $h \in H_1$. Следовательно, экстремальные точки функционала $f(x)$ надо искать только среди решений функционального уравнения

$$Ax = 0 \tag{1.3}$$

Рассмотрим механический смысл функционала $W(x, h)$ (соответственно $(A'(\xi), h, h)$) в случае, когда $f(x)$ есть полная энергия деформации тела. Тогда элемент $x \in H$ выражает деформированное состояние тела, испытывающее внешнее воздействие $y \in Y$, где Y также будет пространством Гильберта, а $h \in H_1$ можно рассматривать как возможное перемещение тела.

Пусть $x \in H$ — некоторое равновесное состояние системы, а $h \in H_1$ — заданное возможное перемещение. Тогда из (1.1) получаем

$$\Delta f(x, h) = f(x + h) - f(x) = {}^1/_2\, W(x, h) \tag{1.4}$$

Отсюда видно, что $W(x, h)$ есть удвоенная энергия, которую необходимо израсходовать, чтобы сообщить телу перемещение h.

Предположим теперь, что внешняя нагрузка y есть некоторая функция параметра λ, т. е. $y = y(\lambda)$. Введем следующие определения. Совокупность деформируемого тела и внешней нагрузки y будем называть деформируемой системой. Будем говорить также, что имеем деформируемую систему с нарастающей (убывающей) жесткостью, если с возрастанием значения параметра λ функционал $W(x(\lambda), h)$ при любом заданном элементе $h \in H_1$ возрастает (убывает) или же остается ограниченным снизу (сверху) значением его при $\lambda = 0$. Если $W(x(\lambda), h)$ не зависит от значения λ, а следовательно и от x, имеем линейно деформируемую систему.

Если под жесткостью будем понимать способность тела сопротивляться деформации, то приведенные выше определения оправдываются следующими очевидными соображениями.

Предположим, что с возрастанием значения параметра λ функционал $W(x(\lambda), h)$ нарастает (убывает). Это означает, что при больших исходных значениях нагрузки будет необходимо израсходовать больше (меньше) энергии, чтобы осуществить дополнительное перемещение h, чем это было необходимо при меньших исходных значениях нагрузки.

Если линейные системы отнесем к первому классу систем, то будем говорить о системах с неубывающей жесткостью. Аналогично вводятся системы с невозрастающей жесткостью. Надо обратить внимание на то, что одно и то же тело при разных типах нагрузки может быть как первого, так и второго класса.

Предположим, что при данном нагруженном состоянии $x_0 \in H$ тело находится в устойчивом равновесии. Тогда из (1.2) следует, что в некоторой сфере D, содержащей точку x_0, должно быть выполнено условие

$$W(x, h) = (A'(\xi)\, h, h) \geqslant \gamma^2 (h, h) > 0 \qquad (\xi \in D,\ h \in H_1) \tag{1.5}$$

Здесь $\gamma = \mathrm{const}$; т. е. для любого $\xi \in D$ оператор $A'(\xi)$, если он существует, положительно определен, а следовательно, и самосопряжен. Отсюда следует, что если ненагруженное состояние есть состояние устойчивого равновесия, то при деформируемых системах с неубывающей жесткостью оператор $A'(\xi)$ положительно определен при любом $\xi \in H$. Это имеет место и в системах с убывающей жесткостью, когда $W(x, h)$, убывая, стремится к некоторому положительному пределу, как, например, в системах с физической нелинейностью, при которой материал всегда обладает существенным упрочнением, т. е. $E_s \geqslant c^2$, где E_s — касательный модуль, а $c = \text{const} \neq 0$.

Если же для систем с убывающей жесткостью при некоторых $\lambda = \lambda_0$ $(x = x_0)$ и $h \neq 0$ имеем $W(x_0, h) = 0$, то при дальнейшем нагружении обычно наблюдаются следующие два случая: а) тело постепенно или скачком переходит в новое равновесное состояние, при котором снова $W(x, h) > 0$; б) равновесное состояние становится неопределенным или же вообще не существует. С первым случаем встречаемся обычно при геометрически нелинейных задачах, а со вторым — при физически нелинейных задачах с горизонтальной асимптотой диаграммы напряжение-деформация. Первый случай для пластин и оболочек подробно исследован в работах [4, 5]. Из сказанного следует, что свойства функционала $W(x, h)$, соответственно оператора $A'(\xi)$, характеризуют основные механические свойства деформируемой системы.

Выражение $A'(x)h$ аппроксимирует разность $A(x + h) - Ax$ с точностью до величин порядка выше $\|h\|$, поэтому уравнение

$$A'(x)h = \Delta y \tag{1.6}$$

можно рассматривать как линейный аналог уравнения (1.3) при определении приращения h вследствие догрузки Δy системы свыше той нагрузки, которой соответствует состояние x.

2. Рассмотрим уравнение

$$x = x - \alpha B^{-1}Ax \tag{2.1}$$

где $\alpha \neq 0$ — пока произвольный коэффициент, а B — некоторый положительно определенный оператор. Так как уравнение $B^{-1}x = 0$ имеет единственное решение $x = 0$, то, очевидно, решения уравнения (2.1) будут также решениями (вообще обобщенными) уравнения (1.3) и наоборот. Составим рекуррентную зависимость

$$x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} - \alpha B^{-1}Ax^{(\nu)} \tag{2.2}$$

Если этот процесс сходится, то на основании сказанного выше его предельная точка будет решением уравнения (1.3). Оказывается, что во многих случаях его можно сделать сходящимся, подобрав соответствующим образом коэффициент α и оператор B. Кроме того, введение в (2.1) оператора B^{-1} дает возможность применять этот процесс к приближенному решению различных типов дифференциальных уравнений. Для этой цели необходимо в качестве оператора B^{-1} принять некоторый интегральный оператор, такой, чтобы элемент $z = B^{-1}x$ удовлетворял всем граничным условиям задачи при любом $x \in H$. Это означает еще, что каждое следующее приближение можно определять как решение дифференциального уравнения

$$Bx = Bx^{(\nu)} - \alpha Ax^{(\nu)} \tag{2.3}$$

правая часть которого известна, удовлетворяющее граничным условиям.

Дополнительные требования, которым должны удовлетворять оператор B и коэффициент α, даются следующей теоремой.

Теорема 2.1. Если функционал $W(x, h)$, оператор B и коэффициент α удовлетворяют условиям

$$W(x, h) \leqslant K(Bh, h) \qquad 0 < \alpha < 2/K \qquad (x \in H, h \in H_1) \qquad (2.4)$$

где K — положительная константа, то процесс (2.2) всегда сходится к некоторому решению x^* уравнения (1.3) независимо от выбора начального приближения, если функционал $f(x)$ ограничен снизу и возрастает вне некоторой сферы D.

В случаях, когда $W(x, h) \geqslant \gamma^2 \| h \|^2$ при любых $x \in H$, $h \in H_1$, где $\gamma = \text{const} \neq 0$, решение уравнения (1.3) единственно.

Замечание. Если оператор A допускает производную Гато $A'(x)$, то вместо $W(x, h)$ в (2.4) можно использовать $(A'(x)h, h)$.

Доказательство. Будем говорить, что имеет место спуск по $f(x)$, если при переходе из $x^{(\nu)}$ к $x^{(\nu+1)}$

$$f(x^{(\nu+1)}) - f(x^{(\nu)}) < 0$$

Докажем, во-первых, что при условиях (2.4) процесс (2.2) осуществляет спуск по $f(x)$. Для этого примем, что $x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} + h^{(\nu)}$ и подставим это выражение в (1.1):

$$\Delta f(x^{(\nu)}, h^{(\nu)}) = f(x^{(\nu)} + h^{(\nu)}) - f(x^{(\nu)}) = (Ax^{(\nu)}, h^{(\nu)}) + {}^1/_2 W(x^{(\nu)}, h^{(\nu)}) \qquad (2.5)$$

Однако из (2.2) следует, что $Ax^{(\nu)} = -\alpha^{-1}Bh^{(\nu)}$. Тогда

$$\Delta f(x^{(\nu)}, h^{(\nu)}) = -\alpha^{-1}(Bh^{(\nu)}, h^{(\nu)}) + {}^1/_2 (W(x^{(\nu)}, h^{(\nu)})$$

На основании (2.4) существует число $\theta_\nu \leqslant 1$ такое, что

$$W(x^{(\nu)}, h^{(\nu)}) = \theta_\nu K(Bh^{(\nu)}, h^{(\nu)})$$

Следовательно

$$\Delta f(x^{(\nu)}, h^{(\nu)}) = (-\alpha^{-1} + {}^1/_2\theta_\nu K)(Bh^{(\nu)}, h^{(\nu)}) \qquad (2.6)$$

Тогда, имея в виду условие $(Bh^{(\nu)}, h^{(\nu)}) > 0$, сразу видно, что, приняв α в интервале (2.4), будем иметь $\Delta f < 0$, т. е. процесс (2.2) осуществляет спуск по $f(x)$. Тогда последовательность $\{f(x^{(\nu)})\}$ убывающая. И так как, согласно условию теоремы, она ограничена снизу, а $f(x)$ возрастает вне некоторой сферы D, то существует предельная точка $f(x')$ $(x' \in D)$ этой последовательности. Покажем, что такой может быть только точка $f(x^*)$.

И действительно, из сходимости последовательности $\{f(x^{(\nu)})\}$ следует, что $\Delta f(x^{(\nu)}, h^{(\nu)}) \to 0$, начиная с некоторого ν. Тогда к нулю сходится и правая часть равенства (2.6). Но поскольку $-\alpha^{-1} + {}^1/_2\theta_\nu K \neq 0$, то это возможно только, если $(B(x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}), x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}) \to 0$. Так как B — положительно определенный оператор, то это означает, что $x^{(\nu+1)} \to x^{(\nu)}$. Тогда из (2.2) следует, что $x^{(\nu)} \to x^*$.

Пусть, наконец, примем, что $W(x, h) \geqslant \gamma^2 \| h \|^2$ при $x \in H$, $h \in H_1$. Тогда $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы. Предположим, что в этом случае существуют два решения x_1^* и x_2^* уравнения (1.3), причем $f(x_2^*) \leqslant f(x_1^*)$. Обозначим $x_2^* - x_1^* = h^*$; тогда из (1.1) следует

$$f(x_2^*) - f(x_1^*) = {}^1/_2 W(x_1^*, h^*) > 0$$

что противоречит принятому предположению. Следовательно, $x_1^* = x_2^*$. Теорема доказана.

Замечания. Рекуррентную зависимость (2.2) можно обобщить, приняв α и B зависящими от ν. Но это, усиливая сходимость, усложняет вычислительную программу. Сходимость можно усилить также, пользуясь указаниями п. 4.

Если в качестве оператора B принять оператор $A'(x^{(0)})$, то рекуррентная зависимость (2.2) при $\alpha = 1$ получит вид рекуррентной зависимости модифицированного метода Ньютона [6].

В работах [7] для решения уравнения типа (1.3) также была использована рекуррентная зависимость типа (2.2) при $\alpha = \mathrm{const}$ и $\alpha = \alpha(\nu)$, но при иных предположениях относительно операторов A и B. В частности, считалось, что $f(x)$ задан в некотором банаховом пространстве, но что решение уравнения (1.3) единственное. Принятые здесь ограничения исходного функционала $f(x)$ и оператора A более общие, а полученные условия сходимости более удобны для непосредственного применения и исследования. В этом смысле полученные результаты можно рассматривать как дальнейшее развитие некоторых идей указанных работ. Процесс скорейшего спуска (без использования оператора B) для определения экстремальной точки функционала рассмотрен в работе [8].

3. Рассмотрим вместо функционального уравнения (1.3) систему нелинейных функциональных уравнений

$$A_k x = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

где A_k — заданные операторы. Такими системами описываются многие задачи механики, в том числе основная задача равновесия элемента деформируемого тела, когда x — вектор-перемещение.

Предположим, что в процессе последовательных приближений достигнуто ν-е приближение $x^{(\nu)} = (x_1^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)})$. В качестве следующего приближения примем элемент $x^{(\nu+1)}$ с координатами

$$x_i^{(\nu+1)} = x_i^{(\nu)}, \qquad x_k^{(\nu+1)} = x_k^{(\nu)} - \alpha_k B_k^{-1} A_k x^{(\nu)}$$
$$(i = 1, \ldots, k-1, \ k+1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

где B_k — некоторые положительно определенные операторы.

Этот процесс означает, что на каждом шаге изменяется только одна координата. При следующем шаге можно повторить ту же операцию, или же перейти к новой координате. Будем называть циклом совокупность определенного числа таких операций, приложенных ко всем координатам x_k, независимо от принятого порядка относительно индекса k. Цикличностью будем называть последовательность таких циклов, структура которых может быть различной.

Если дать приращение h_k только k-й координате, то в этом случае

$$f(x + h_k) - f(x) = (A_k x, h_k) + {}^1/_2\, W_k(x, h_k) \tag{3.3}$$

где $W(x, h_k)$ имеет тот же смысл, как и в п. 1.

Теорема 3.1. Если существуют операторы B_k такие, что

$$W_k(x, h_k) \leqslant K_k(B_k h_k, h_k), \qquad 0 < \alpha_k < 2/K_k \qquad (x \in H, \ h_k \in H_1) \tag{3.4}$$

где K_k — положительные константы, то при функционалах, удовлетворяющих условию теоремы 2.1, процесс (3.2) всегда сходится к некоторому решению x^* системы (3.1) независимо от вида принятой цикличности и выбора начального приближения.

Доказательство. Как и в предыдущем случае, здесь нетрудно показать, что процесс (3.2) при условии (3.4) приводит к спуску по $f(x)$. Действительно, так как теперь $h^{(\nu)} = (0, \ldots, 0, h_k^{(\nu)}, 0, \ldots, 0)$, то

$$f(x^{(\nu+1)}) - f(x^{(\nu)}) = (A_k x^{(\nu)}, h_k^{(\nu)}) + {}^1/_2 W_k(x^{(\nu)}, h_k^{(\nu)}) \tag{3.5}$$

На основании (3.4) отсюда получаем

$$f(x^{(\nu+1)}) - f(x^{(\nu)}) = -(\alpha_k^{-1} - {}^1/_2\, \theta_{k\nu} K_k)(B_k h_k^{(\nu)}, h_k^{(\nu)}) \qquad (\theta_{k\nu} \leqslant 1) \tag{3.6}$$

Так как B_k — положительно определенный оператор, то для α_k в интервале (3.4) правая часть (3.6) отрицательна, т. е. имеет место спуск по $f(x)$. Рассуждая как и при доказательстве предыдущей теоремы, заключаем, что существует предельная точка $f(x')$ последовательности $\{f(x^{(\nu)})\}$. Необходимо доказать, что элементом x' может быть только некоторое из решений системы (3.1). Для этой цели составим разность

$$f(x^{(N)}) - f(x') = \sum_{\nu=N}^{\infty} [f(x^{(\nu)}) - f(x^{(\nu+1)})] = \sum_{\nu=N}^{\infty} \mu_{k\nu} (B_k h^{(\nu)}, h^{(\nu)})$$

$$(\mu_{k\nu} = \alpha_k^{-1} - {}^1/_2\, \theta_{k\nu} K_k > 0)$$

Здесь $f(x^{(N)})$ есть значение функционала, достигнутое после N-го цикла.

Положив $\mu = \min\{\mu_{k\nu}\} \neq 0$, получим

$$\sum_{\nu=N}^{\infty} (B_k h^{(\nu)}, h^{(\nu)}) \leqslant \mu^{-1} [f(x^{(N)}) - f(x')]$$

Из сходимости последовательности $\{f(x^{(\nu)})\}$ следует, что любой произвольно малой константе ε_N соответствует индекс N такой, что $f(x^{(N)}) - f(x') \leqslant \varepsilon_N$. Следовательно,

$$\sum_{\nu=N}^{\infty} (B_k h^{(\nu)}, h^{(\nu)}) \leqslant \mu^{-1}\varepsilon_N$$

Отсюда заключаем о сходимости ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (B_k h^{(\nu)}, h^{(\nu)})$$

Тогда, $h^{(\nu)} \to 0$, начиная с некоторого $\nu = N$, т. е. $x_k^{(\nu+1)} \to x_k^{(\nu)}$ одновременно для всех $k = 1, \ldots, n$. Имея это в виду, из (3.2) следует, что $x^{(\nu)} \to x^*$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь тот же процесс последовательных приближений, но при ином способе нахождения $x_k^{(\nu+1)}$, который оказывается очень удобным при решении многих задач механики.

Предположим, что достигли точки $x^{(\nu)}$ и надо определить $x_k^{(\nu+1)}$. Для этой цели подставим в k-е уравнение системы (3.1) найденные значения $x_1^{(\nu)}, \ldots, x_{k-1}^{(\nu)}, x_{k+1}^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)}$ и запишем его в виде

$$A_{k\nu} x_k = 0 \tag{3.7}$$

Каким-нибудь способом находим некоторое приближенное решение этого уравнения. Обозначим его $x_k^{(\nu+1)}$. Имеем следующую теорему.

Теорема 3.2. В условиях теоремы 3.1, если последовательные приближения $x_k^{(\nu+1)}$ определяются как приближенные решения уравнений (3.7), то при произвольной цикличности этот процесс сходится к некоторому решению системы (3.1) независимо от выбора начального приближения.

Доказательство этой теоремы следует непосредственно из теорем 2.1 и 3.1. И действительно, предположим, что для любого k операция (3.2) повторяется неограниченное число раз.

Условия (3.4) соответствуют условиям (2.4) теоремы (2.1), поэтому этот процесс стремится к точному решению уравнения (3.7). Если же ограничим число операций, получим приближенное решение с произвольной точностью. Из сходимости этого процесса следует справедливость теоремы.

Изложенный метод спуска представляет собой обобщение метода Гаусса — Зейделя решения линейных алгебраических уравнений.

4. Остановимся теперь на применении изложенных методов к некоторым задачам механики деформируемого тела. Рассмотрим, во-первых, вопрос о существовании единственного равновесного состояния деформируемой системы. При этом будем говорить не об единственности в общем случае, а об единственности равновесного состояния в классе возможных перемещений $h \in H_1$, соответствующих заданной деформируемой системе. Тогда из теоремы 2.1 получаем следующее следствие.

Следствие 1. Если для того чтобы сообщить деформируемой системе произвольное возможное перемещение, исходя из любого возможного равновесного состояния, необходимо израсходовать положительную работу, то эта система имеет единственное равновесное состояние при любом значении параметра нагрузки λ. Математически это условие выражается положительной определенностью оператора $A'(x)$ $(x \in H)$ в пространстве $H_1 \subset H$.

Очевидно, что при системах с возрастающей жесткостью всегда существует единственное равновесное состояние в указанном выше смысле. То же самое имеет место и при системах с уменьшающейся жесткостью, если функционал $W(x, h)$, соответственно $(A'(x)h,h)$, убывая, стремится к некоторому положительному пределу, как это имеет место при физически нелинейных задачах в случае, когда материал обладает существенным упрочнением. Однако это не означает, что исключается возможность существования площадки текучести. Во многих задачах, на основании сказанного выше, нетрудно проверить допустимость такой площадки, а также ее длину, обеспечивающую существование единственного решения.

Чаще всего нелинейные уравнения механики деформируемого тела можно записать так

$$Ax \equiv Bx + Cx = 0 \tag{4.1}$$

где B — оператор соответствующей линейной задачи, а C — некоторый нелинейный оператор. Так как обычно оператор B положительно определен, то его можно использовать в рекуррентной зависимости (2.2). Тогда она получит вид

$$x^{(\nu+1)} = (1 - \alpha)\, x^{(\nu)} - \alpha B^{-1} C x^{(\nu)} \tag{4.2}$$

Во многих случаях в оператор B (4.1) удобно включать только часть членов оператора линейной задачи, а все остальные члены объединять при помощи оператора C, так как это может привести к более простой вычислительной программе. Для этой цели можно также принять и совершенно другой хорошо изученный оператор, удовлетворяющий условию теоремы 2.1.

Рассмотрим некоторые особенности применения процесса (2.2), соответственно (4.2), к отысканию равновесного состояния указанных двух типов деформируемых систем — с убывающей и с возрастающей жесткостью. Начнем с первого типа.

Для потенциалов с градиентами типа (4.1) нетрудно увидеть, что $W(x, h) = (Bh, h) + W_1(x, h)$. Причем, так как при $\|x\| \to 0$ имеем $Ax \to Bx$, то $W(0, h) = (Bh, h)$. Кроме того, $W(x, h)$ убывает с возрастанием нагрузки, поэтому $\max W(x, h) = W(0, h)$, отсюда следует, что

$W_1(x, h) < 0$. Тогда условие (2.4), которое в рассматриваемом случае получает вид

$$(Bh, h) + W_1(x, h) \leqslant K(Bh, h)$$

будет выполнено всегда и при $K = 1$. Отсюда получаем.

Следствие 2. Для систем с убывающей жесткостью процесс (4.2) сходится всегда, если принять

$$0 < \alpha < 2 \tag{4.3}$$

Однако при значениях $W(x, h)$, близких к нулю, т. е. при значениях $W_1(x, h) \to -(Bh, h)$, верхняя граница коэффициента α быстро возрастает и для получения лучшей сходимости необходимо принять $\alpha > 2$.

Из условия (4.3) видно, что при рассматриваемых задачах процесс (4.2) сходится и при $\alpha = 1$. Тогда рекуррентная зависимость (4.2) получает вид

$$x^{(\nu+1)} = -B^{-1} C x^{(\nu)} \tag{4.4}$$

В теории пластичности при пропорциональном нагружении процесс (4.4) совпадает с методом «упругих решений» [9]. Его сходимость для первой и второй краевой задачи в случае существенно упрочняющегося материала без площадки текучести была доказана в работе [10], где также указан порядок быстроты сходимости. Отметим, однако, что во многих исследованиях упруго-пластического деформирования метод координатного спуска оказывается более эффективным. В этом случае, если задача решается в напряжениях, этот метод можно назвать методом последовательного уравновешивания или же методом последовательного сопряжения.

Более сложными являются те системы с убывающей жесткостью, которые с увеличением параметра нагрузки λ способны потерять устойчивость или же переходят в неопределенное равновесное состояние вследствие физической нелинейности материала, когда диаграмма напряжение-деформация имеет горизонтальную асимптоту или площадку текучести. По-видимому, исследования поведения равновесного состояния таких систем лучше свести к изучению процесса нагружения. Для этого следует ввести параметр времени [11, 12] или же рассматривать нагрузку, как переменную величину при решении систем нелинейных уравнений, полученных методом Ритца или Галеркина [5]. В обоих случаях задача сводится к решению задачи Коши, что в зависимости от вида получаемых систем нелинейных дифференциальных уравнений может привести к накоплению значительных ошибок в процессе интегрирования. Другая возможность осуществления этой идеи состоит в применении изложенных выше процессов (2.2), (3.2), (3.7) для определения равновесных состояний, соответствующих различным этапам последовательного нагружения. Это дает возможность принципиально выполнять вычисления с произвольной точностью. Надо, однако, обратить внимание, что при достижении $W(x, h)$ значения, близкого к нулю, необходимо на каждом этапе нагрузки увеличивать значение коэффициента α так, чтобы сохранить приемлемую быстроту сходимости. Для указанных физически нелинейных задач наступление медленной сходимости при фиксированном значении коэффициента α или расходимости процессов (2.2), (3.2) можно истолковать как исчерпывание в некотором смысле несущей способности конструкции. Эти процессы последовательных приближений также дают возможность определять момент «прощелкивания» в геометрически нелинейных задачах типа устойчивости оболочек и определять «прощелкнутое» устойчивое состояние равновесия, так как и в этом случае полная энергия системы всегда остается ограниченной снизу.

Сходимость последовательных приближений в рассматриваемых задачах можно всегда усилить, если на каждом этапе нагружения ν применять также новые операторы в соответствующих рекуррентных формулах;

это сводится к вычислению последовательных приближений представляющих собой решения приближенно линеаризированных уравнений

$$B_{(i)}h^{(\nu+1)} = -\alpha_{(i)}Ax^{(\nu)}, \quad h^{(\nu+1)} = x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)} \tag{4.5}$$

где $B_{(i)}$ — оператор, близкий к оператору $A'(x)$ для x, полученного как решение задачи в предыдущем этапе нагружения y_{i-1}.

Гораздо проще обстоит дело при системах с неубывающей жесткостью, обладающих единственным равновесным состоянием, вследствие чего правильно составленная «математическая модель» допускает единственное решение. К таким системам надо отнести прежде всего такие упругие системы, которые в процессе нагружения испытывают в основном растяжение. В этом случае применение процесса (3.7) не встречает никаких принципиальных затруднений, а особенность применения процессов 2.2) и (3.2) состоит в том, что нельзя заранее ограничить сверху коэффициент α, как это смогли сделать в (4.3). Это потому, что в неравенстве $0 < \alpha \leqslant c < 2$ значение коэффициента c будет тем меньше, чем больше величина $W(x, h)$, достигаемая в процессе деформации, т. е. чем больше жесткость деформируемой системы. В этом случае коэффициент α можно определить по разному: например, можно воспользоваться решением x_0^* линейной задачи; в этом случае $\| x_0^* \| > \| x^* \|$, что приводит к значению

$$K \geqslant \frac{(A'(x_0^*)h, h)}{(Bn, h)} \qquad (h \in H_1)$$

т. е. к меньшему значению величины $c = 2 / K$.

5. Пусть уравнение (1.3) есть нелинейное дифференциальное уравнение, заданное в замкнутой области Ω, и с областью определения D. Будем предполагать, что решение x^* этого уравнения можно представить в виде сходящегося ряда

$$x^*(P) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots \tag{5.1}$$

дифференцируемого столько раз, сколько требуется дифференциальным уравнением. Здесь $\varphi_i(P)$ — полная система функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям, а P — любая точка области Ω.

Как известно, согласно методу Бубнова — Галеркина, функция $x(P)$ аппроксимируется при помощи n членов ряда (5.1)

$$x_n(P) = a_1^{(n)}\varphi_1(P) + \ldots + a_n^{(n)}\varphi_n(P) \tag{5.2}$$

где коэффициенты $a_i^{(n)}$ определяются из нелинейной системы уравнений

$$(Ax_n, \varphi_k) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{5.3}$$

которую можно записать еще так

$$A_1 a^{(n)} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \qquad (a^{(n)} = (a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)})) \tag{5.4}$$

Теорема 5.1. Если решение $x^*(P)$ уравнения (1.3) допускает разложение вида (5.1), а

$$W(x, h) \geqslant \gamma^2 \| h \|^2 \qquad (x, h \in D) \tag{5.5}$$

то метод Бубнова — Галеркина сходится, т. е. $x_n(P) \to x^*(P)$.

Доказательство. Покажем, во-первых, что в условиях теоремы система (5.4) имеет решение, которое единственно. Положим $h = c_1\varphi_1(P) + \cdots + c_n\varphi_n(P)$. Тогда

$$f(x_n + h) - f(x_n) = (Ax_n, h) + {}^1/_2 W(x_n, h) = (A_1 a^{(n)}, c) + {}^1/_2 W_1 (a^{(n)}, c)$$

и, так как $W(a^{(n)}, c) = W(x_n, h) \geqslant \gamma^2 \|h\|^2$, то из теоремы 2.1 вытекает существование единственного решения системы (5.4).

Докажем дальше, что при определенных таким образом коэффициентах $a_i^{(n)}$ переход из x_{n-1} к x_n приводит к спуску по $f(x)$. Для этой цели здесь положим

$$x_n = x_{n-1} + h_n = x_{n-1} + c_1\varphi_1(P) + \cdots + c_n\varphi_n(P)$$

Тогда

$$f(x_{n-1}) - f(x_n) = -(Ax_n, h_n) + {}^1/_2 W(x_{n-1}, h_n)$$

Однако на основании (5.3)

$$(Ax_n, h_n) = \Big(Ax_n, \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(P)\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i (Ax_n, \varphi_i) = 0$$

вследствие чего

$$f(x_{n-1}) - f(x_n) = {}^1/_2 W(x_{n-1}, h_n) > 0$$

т. е. $f(x_{n-1}) > f(x_n)$. И так как при условии (5.5) функционал $f(x)$ ограничен снизу, последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет предельную точку $f(x')$. Покажем, что эта точка совпадает с $f(x^*)$. Пусть

$$h = x^* - x' = c_1\varphi_1(P) + c_2\varphi_2(P) + \cdots + c_n\varphi_n + \cdots$$

Составим разность $f(x^*) - f(x')$, принимая во внимание (5.3) при $n = \infty$

$$f(x^*) - f(x') = (Ax', h) + {}^1/_2 W(x', h) =$$

$$= \Big(Ax', \sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i(P)\Big) + {}^1/_2 W(x', h) = {}^1/_2 W(x', h) > 0$$

Но так как $f(x')$ не может быть меньше минимального значения $f(x^*)$ функционала $f(x)$, то следует, что $h \equiv 0$, т. е. $x^* = x'$. Теорема доказана.

Замечания. Из доказанной теоремы следует также и сходимость обобщенного метода Бубнова — Галеркина, а также метода Ритца для рассматриваемых задач.

В применении к задачам нелинейной теории пологих оболочек сходимость метода Бубнова — Галеркина была доказана в работах [13,14], а в более общей постановке была рассмотрена в [15]. Сходимость метода Ритца при довольно общих предположениях относительно функционала $f(x)$ была доказана недавно в работе [16].

6. Пусть в замкнутой области Ω задано нелинейное дифференциальное уравнение

$$Ax \equiv Bx + Cx = 0 \tag{6.1}$$

где B — некоторый линейный оператор такой, что при заданных граничных условиях задачи можем найти точное решение дифференциального уравнения

$$Bx = y \tag{6.2}$$

где y — произвольная, ограниченная в Ω, функция. Предположим, что искомую функцию можно с достаточной точностью представить в виде

$$\chi_n(P) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} \varphi_i(P) \tag{6.3}$$

где $a_i^{(n)}$ — некоторые коэффициенты, а $\varphi_i(P)$ образуют полную систему функций. Подставив (6.3) в нелинейный оператор C уравнения (6.1), получим

$$Bx_n = -C\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} \varphi_i(P)\Big) \tag{6.4}$$

Согласно сказанному выше относительно уравнения (6.2), уравнение (6.4) можно решить точно. Решение его будет иметь вид

$$x_n = -B^{-1}C\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)}\varphi_i(P)\right) = x_n(P, a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}) \tag{6.5}$$

удовлетворяющий всем граничным условиям задачи при любых значениях коэффициентов $a_i^{(n)}$. Для того чтобы (6.5) было точным решением задачи, необходимо и достаточно, чтобы в области Ω имело место равенство $\chi_n(P) \equiv x_n(P)$. Для осуществления этого условия можно воспользоваться неопределенными коэффициентами $a_i^{(n)}$. Приближенность способа состоит в том, что практически невозможно осуществить это точно.

Этот способ, хотя в вычислительном отношении несколько сложнее метода Бубнова — Галеркина, имеет и некоторые значительные преимущества перед ним. Так, например он дает возможность решать частные дифференциальные уравнения со сложными граничными условиями, с которыми встречаемся, например, при решении разного рода «контактных задач» и т. д. Удовлетворить таким граничным условиям методом Галеркина нельзя или, по крайней мере, очень трудно. Кроме того, во многих случаях при одном и том же числе коэффициентов $a_i^{(n)}$ этот способ приводит к более точному решению. Надо отметить еще, что здесь не обязательно, чтобы функции $\varphi_i(p)$ в (6.3) удовлетворяли всем граничным условиям задачи, как это требуется методом Бубнова — Галеркина.

В комбинации с методом последовательных приближений этот способ впервые был предложен В. В. Новожиловым [17] для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, требуя, чтобы функции $\varphi_i(p)$ удовлетворяли всем граничным условиям. Дальнейшее его развитие для решения тех же дифференциальных уравнений дано в [18]. В обеих работах отсутствует доказательство сходимости. В изложенном здесь виде этот способ был применен и к решению нелинейных частных дифференциальных уравнений [1]. В [19] он применен к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Там же доказана и его сходимость для одного класса дифференциальных уравнений и сопоставлена его точность с точностью метода Бубнова — Галеркина.

Отождествление функций $\chi_n(P)$ и $x_n(P)$ в заданной области Ω, как известно [20], можно осуществить различными способами. Однако один из самых подходящих в данном случае состоит в ортогонализации разности $\chi_n(P) - x_n(P)$ ко всем функциям $\varphi_i(P)$. Тогда получается следующая система уравнений для определения коэффициентов $a_i^{(n)}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)}\varphi_i(P) + B^{-1}C\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)}\varphi_i(P)\right),\ \varphi_k(P)\right) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{6.6}$$

В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 6.1. Если в качестве функций $\varphi_i(P)$ приняты собственные функции самосопряженного оператора B, а коэффициенты $a_i^{(n)}$ определены из системы уравнений (6.6), изложенный способ сходится, т. е. $x_n(P) \to x^*(P)$, во всех случаях, в которых сходится метод Бубнова — Галеркина. Но приближенное решение $x_n(P)$ может быть более точно, чем $\chi_n(P)$, полученное по методу Бубнова — Галеркина, только тогда, когда метод последовательных приближений (2.2), применяемый к уравнению (6.1), сходится при $\alpha = 1$.

---

[1] С. В. Симеонов. Диссертация. Ленингр. кораблестр. ин-т, 1957.

Доказательство. Покажем, что система (6.6) совпадает с системой (5.3) метода Бубнова — Галеркина. Для этой цели подставим в (5.3) вместо Ax_n соответствующее выражение, согласно (6.1), имея в виду самосопряженность оператора B; получим

$$(A\chi_n, \varphi_k) = (B\chi_n + C\chi_n, \varphi_k) = (\chi_n + B^{-1}C\chi_n, B\varphi_k)$$

Но так как φ_k — собственные функции оператора B, то

$$(A\chi_n, \varphi_k) = \lambda_k (\chi_n + B^{-1}C\chi_n, \varphi_k) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

где λ_k — соответствующее собственное число. Из сравнения этой системы с системой (6.6) видна их тождественность. Следовательно, если сходится метод Бубнова — Галеркина, то сходится и изложенный здесь способ.

Из сказанного выше видно, что $\chi_n(P)$ есть не что иное, как приближенное решение, полученное методом Бубнова — Галеркина, а согласно (6.4) $x_n(P) = -B^{-1}C\chi_n(P)$. Сравнивая это выражение с (4.2), замечаем, что $x_n(P)$ можно рассматривать как следующее приближение последовательных приближений (4.2) при $\alpha = 1$, если в качестве исходного приближения принять $\chi_n(P)$. Тогда сходимость этого процесса является достаточным условием того, чтобы $x_n(P)$ было точнее $\chi_n(P)$.

Замечание. Обычно $x_n(P)$ получается точнее, если вместо (6.5) определить x_n по формуле

$$x_n(P) = (1-\alpha)\chi_n(P) - \alpha B^{-1}C\chi_n(P)$$

Здесь α определяется согласно указаниям п. 4, а $\varphi_i(P)$ удовлетворяют всем граничным условиям задачи.

Поступила 15 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Гостехиздат, 1956.
2. Новожилов В. В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
3. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Гостехиздат, 1951.
4. Ворович И. И. Некоторые вопросы устойчивости оболочек в большом. Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 1.
5. Курдюмов А. А. К теории физически и геометрически нелинейных задач изгиба и устойчивости пластин и оболочек. Тр. Ленингр. кораблестр. ин-та, 1961, вып. 34.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
7. Вайнберг М. М. О сходимости метода наискорейшего спуска для нелинейных уравнений. Докл. АН СССР, 1960, т. 130, № 1; Сибирский матем. журнал, 1961, т. II, № 2.
8. Поляк Б. Т. Градиентные методы минимизации функционалов. Журнал вычисл. матем. и математ. физики, 1963, т. 3, № 4.
9. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
10. Ворович И. И., Красовский Ю. П. О методе упругих решений. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4.
11. Феодосьев В. И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
12. Феодосьев В. И. Применение шагового метода к анализу устойчивости сжатого стержня. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
13. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, т. 19, № 4.
14. Ворович И. И. О методе Бубнова — Галеркина в нелинейной теории колебаний пологих оболочек. Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 5.
15. Красносельский М. А. Сходимость метода Галеркина для нелинейных уравнений. Докл. АН СССР, 1950, т. 73, № 6.
16. Михлин С. Г. О методе Ритца в нелинейных задачах. Докл. АН СССР, 1962, т. 142, № 4.
17. Новожилов В. В. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений в обыкновенных производных. ПММ, 1952, т. 16, вып. 3.
18. Тодоров М. Годишник на Инж.-строит. ин-т, София, 1954, т. VI, кн. 2.
19. Симеонов С. В. Годишник на Инж.-строит. ин-т, София, 1959, т. XI, кн. 1.
20. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. Гостехиздат, 1954.