

О ЯВЛЕНИИ РЕЗОНАНСА ПРИ ДИФРАКЦИИ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА СИСТЕМЕ ТРЕЩИН В УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

Д. П. Коузов

(Ленинград)

При распространении акустических волн в полупространстве, заполненном жидкостью и покрытом сверху упругим слоем, на неоднородностях слоя возникают дифракционные явления. Эти явления могут резонансным образом усиливаться или ослабевать в зависимости от взаимного расположения объектов, вызывающих дифракцию.

Ниже рассматривается резонанс в простейшей системе подобного рода: жидкость покрыта однородной упругой пластиной, которая разделена двумя прямолинейными параллельными бесконечно тонкими трещинами на три части. Падающее возмущение задается в виде плоской монохроматической волны.

В § 1 приводится «общее» (по терминологии [1]) решение задачи дифракции при любом числе дефектов произвольного характера в упругой пластине, расположенных по параллельным прямым. В § 2 находится дифракционное поле для случая двух трещин и проводятся асимптотические упрощения при низких частотах и больших расстояниях между трещинами. В § 3 устанавливается резонансный характер дифракционных явлений в такой системе.

Обозначения

<p>U — акустический потенциал в жидкости,</p> <p>W — дифрагированная часть акустического потенциала,</p> <p>σ — модуль Пуассона материала пластины,</p> <p>ρ — плотность жидкости,</p> <p>ρ_0 — плотность материала пластины,</p> <p>c — скорость волн в жидкости,</p>	<p>c_t — скорость поперечных волн в материале пластины,</p> <p>H — толщина пластины,</p> <p>k — безразмерное волновое число в жидкости ($k = 2\pi H/\Lambda$), где</p> <p>Λ — длина волны в жидкости,</p> <p>φ_0 — угол, под которым движется падающая волна (отсчитанный от положительного направления оси Ox).</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

1. Идеальная сжимаемая жидкость заполняет полупространство, покрытое сверху упругой пластиной. В пластине имеется некоторое количество прямолинейных параллельных разрезов. Из глубины жидкости набегают плоская монохроматическая волна, направление движения которой ортогонально направлению разрезов. Ищется поле, возбужденное волной.

При надлежащем выборе координатных осей (фиг. 1) эта задача — двумерная. Математическая постановка ее состоит в следующем [1, 2].

Требуется найти решение уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty) \quad (1.1)$$

непрерывное вплоть до оси x . На оси x предполагается выполненным следующее граничное условие:

$$LU \equiv \frac{\partial^5 U(x, 0)}{\partial x^4 \partial y} - \delta_0 k^2 \frac{\partial U(x, 0)}{\partial y} + \nu_0 k^2 U(x, 0) = \sum_{n=1}^m \sum_{s=1}^4 A_{sn} \delta^{(s-1)}(x - a_n) \quad (1.2)$$

Здесь

$$\delta_0 = 6(1 - \sigma) \frac{c^2}{c_t^2}, \quad \nu_0 = 6(1 - \sigma) \frac{\rho c^2}{\rho_0 c_t^2}$$

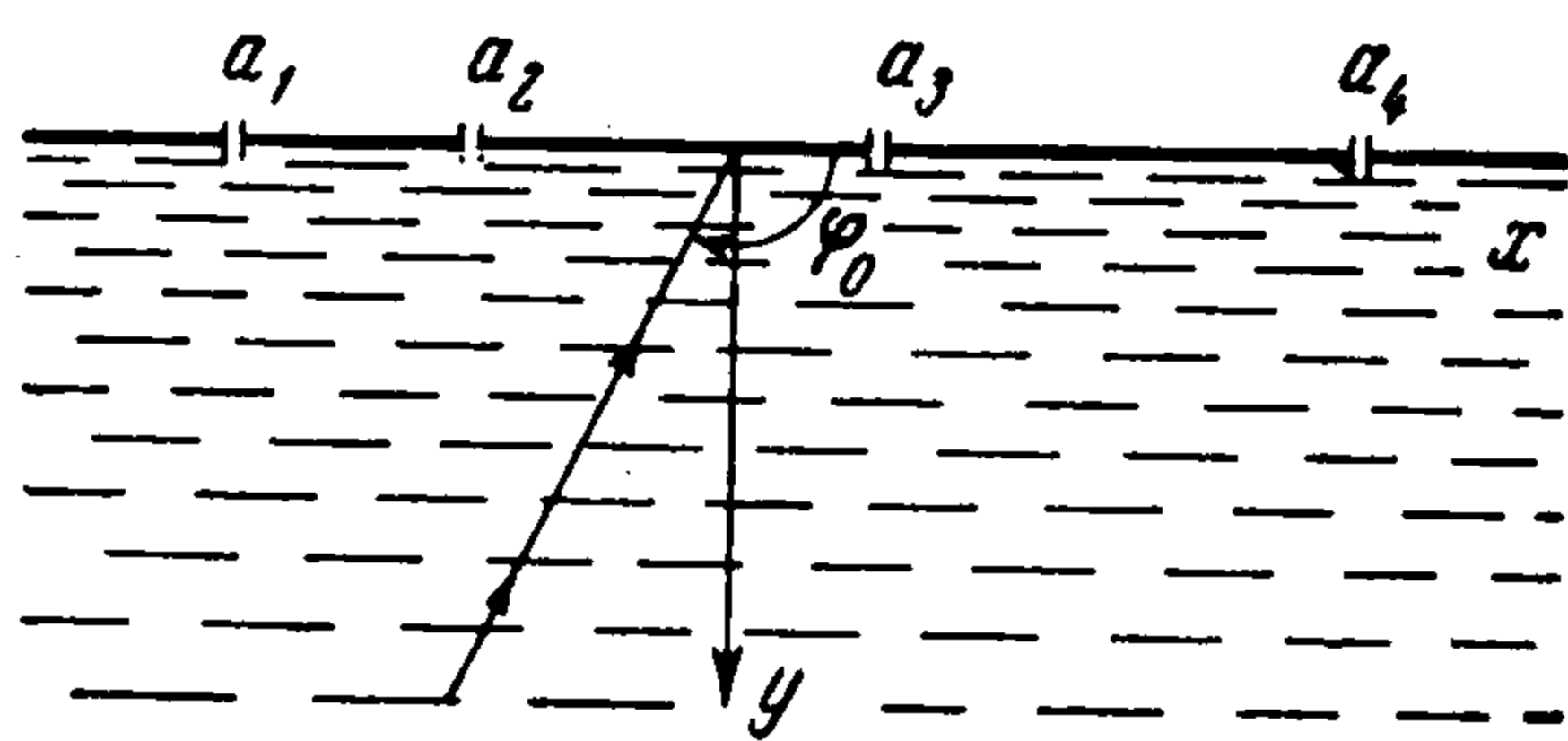
где m — число трещин, a_n — x -координата n -й трещины, $\delta(x)$ — функция Дирака. Постоянные константы A_{sn} таковы, что имеют место гра-

нично-контактные соотношения

$$\lim_{x \rightarrow a_n \pm 0} \frac{\partial^3 U(x, 0)}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a_n \pm 0} \frac{\partial^4 U(x, 0)}{\partial x^3 \partial y} = 0 \quad (1.3)$$

При этом разность $U - U_0$, где

$$U_0 = \exp(i\kappa x - i\sqrt{k^2 - \kappa^2}y) \quad (\kappa = -k \cos \varphi_0) \quad (1.4)$$



Фиг. 1

должна удовлетворять принципу предельного поглощения. Величины x, y считаются безразмерными. Переход к ним от сходных размерных величин осуществлен делением на толщину пластины H .

Граничное условие (1.2) нуждается в пояснении, поскольку использованная в нем запись для правой части ранее не употреблялась. При постановке в [2] соответствующей задачи для одной трещины, расположенной при $x = 0$, граничное условие (если использовать обозначения настоящей статьи) имело вид

$$LU = 0 \quad (x \neq 0)$$

Найденное в результате решения задачи волновое поле записывалось следующим образом

$$U = U_0 + U_1 + W, \quad L(U_0 + U_1) = 0$$

$$W = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d}{(\lambda^4 - \delta_0 k^2) \sqrt{k^2 - \lambda^2} - i\nu_0 k^2} \exp(i\lambda x + i\sqrt{k^2 - \lambda^2}y) d\lambda$$

Применяя оператор L к U , приходим к равенству

$$LU = LW = ib\delta'''(x) - b\delta''(x) - ic\delta'(x) + d\delta(x)$$

которое с точностью до обозначения констант совпадает с (1.2) при $m = 1, a_1 = 0$.

Естественно считать, что характер особенности LU в трещине не меняется и при наличии других изолированных от нее дефектов пластины.

Нетрудно убедиться непосредственной проверкой, что решение указанной задачи имеет следующий вид:

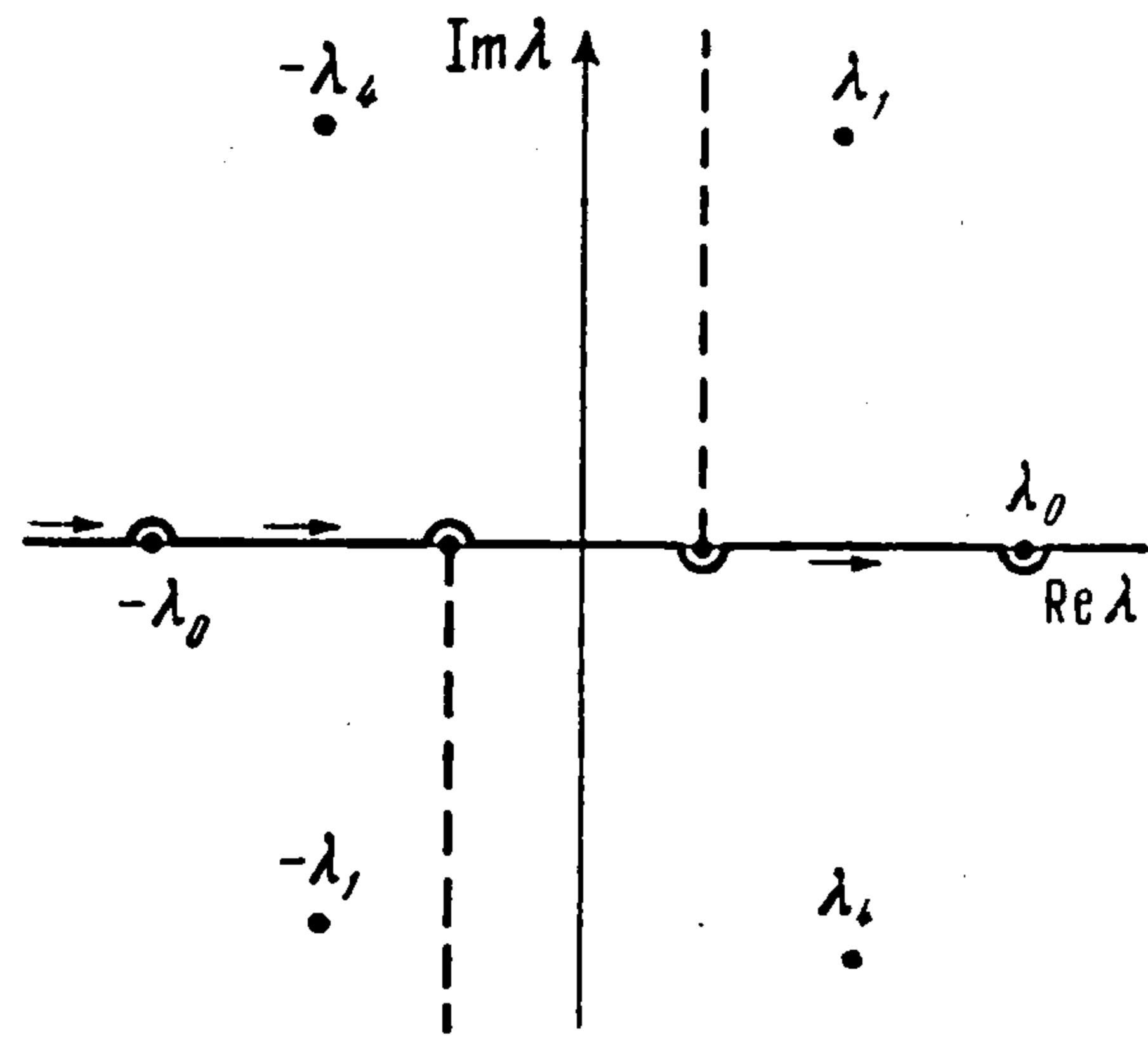
$$U = U_0 + U_1 + W \quad (1.5)$$

где

$$U_1 = \frac{l^*(\lambda)}{l(\lambda)} \exp(i\lambda x + i\sqrt{k^2 - \lambda^2}y) \quad (l(\lambda) = (\lambda^4 - \delta_0 k^2) \sqrt{k^2 - \lambda^2} - i\nu_0 k^2) \quad (1.6)$$

$$W = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{l(\lambda)} \sum_{n=1}^m e^{-ia_n \lambda} \sum_{s=1}^4 A_{sn} (i\lambda)^{s-1} \exp(i\lambda x + i\sqrt{k^2 - \lambda^2}y) d\lambda \quad (1.7)$$

Здесь U_1 представляет собою волну, отраженную от пластины, W — дифрагированное поле, вызванное наличием в пластине трещин, l^* — величина комплексно-сопряженная l . Выбор ветви $l(\lambda)$ ясен из фиг. 2, где сплошная линия обозначает контур интегрирования, а пунктир — разрезы на комплексной плоскости λ . Радикал $\sqrt{k^2 - \lambda^2}$ считается положительным на участке вещественной оси $(-k, k)$. Числа $\pm \lambda_s$ ($s = 0, 1, 2, 3, 4$) суть корни функции $l(\lambda)$, их расположение описано в работе [2]. На фиг. 2 изображены лишь те корни $l(\lambda)$, которые находятся на рассматриваемом листе римановой поверхности.



Фиг. 2

Следует отметить, что общее решение, даваемое формулами (1.5), (1.4), (1.6), (1.7), пригодно для нахождения поля при наличии произвольных нарушений механических свойств пластины в точках $x = a_n$ (например, шарнирных соединений, см. [3]), а не только для случая трещин. Физический режим при $x = a_n$ учитывается гранично-контактными условиями, поэтому до привлечения соотношений (1.3) выписанное решение носит в указанном смысле универсальный характер.

Условия (1.3) порождают неоднородную систему $4m$ линейных уравнений для нахождения $4m$ неизвестных констант A_{sn} . На основании физических соображений можно предполагать однозначную разрешимость этой системы при любом k . Соответствующие выкладки будут проведены ниже для случая двух трещин.

Условия (1.3) порождают неоднородную систему $4m$ линейных уравнений для нахождения $4m$ неизвестных констант A_{sn} . На основании физических соображений можно предполагать однозначную разрешимость этой системы при любом k . Соответствующие выкладки будут проведены ниже для случая двух трещин.

2. Обозначим безразмерное расстояние между трещинами через $2a$ (переход к безразмерному расстоянию здесь по-прежнему осуществляется делением на H) и разместим начало координат посередине отрезка между трещинами; выражение для дифрагированного поля имеет вид

$$W = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{l(\lambda)} \left[e^{-ia\lambda} \sum_{s=1}^4 A_{s1} (i\lambda)^{s-1} + e^{ia\lambda} \sum_{s=1}^4 A_{s2} (i\lambda)^{s-1} \right] \exp(i\lambda x + \sqrt{k^2 - \lambda^2} y) d\lambda \quad (2.1)$$

Разобьем волновое поле U и его компоненты U_0, U_1, W на симметричную и антисимметричную части по переменной x

$$U_i = U_i^+ + U_i^-, \quad U_i^\pm(x, y) = 1/2 [U_i(x, y) \pm U_i(-x, y)] \quad (2.2)$$

При этом задача нахождения дифракционного поля разобьется на две независимых для каждой из названных частей. В каждой из задач будут участвовать лишь по четыре неизвестных константы. Компоненты поля при таком разбиении имеют следующий вид:

$$U_0^\pm = \begin{Bmatrix} \cos \kappa x \\ i \sin \kappa x \end{Bmatrix} e^{-i\sqrt{k^2 - \kappa^2} y}, \quad U_1^\pm = \frac{l^*(\kappa)}{l(\kappa)} \begin{Bmatrix} \cos \kappa x \\ i \sin \kappa x \end{Bmatrix} e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2} y} \quad (2.3)$$

$$W^\pm = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_1^\pm + b_2^\pm \lambda + b_3^\pm \lambda^2 + b_4^\pm \lambda^3}{l(\lambda)} \begin{Bmatrix} \cos \lambda x \\ i \sin \lambda x \end{Bmatrix} \exp(i\lambda a + i\sqrt{k^2 - \lambda^2} y) d\lambda$$

Здесь и дальше из выражений в фигурных скобках верхнюю строчку следует употреблять для симметричной части поля, а нижнюю — для антисимметричной. Аналогичным образом, при использовании двух знаков верхний следует относить к симметричной части поля, нижний — к антисимметричной.

В процессе удовлетворения гранично-контактным условиям приходится проводить дифференцирование под знаком интеграла в выражении для W^\pm . При этом после устремления y к нулю возникают расходящиеся интегралы, употребление которых оговаривалось в [1].

В результате несложных выкладок, аналогичных описанным в [2], можно прийти к системе

$$\begin{aligned} (Q_2 \pm P_2) b_1^\pm + Q_3 b_2^\pm + (Q_4 \pm P_4) b_3^\pm + Q_5 b_4^\pm &= \beta \begin{cases} \cos \kappa a \\ i \sin \kappa a \end{cases} \\ P_3 b_2^\pm + P_5 b_4^\pm &= 0 \\ Q_3 b_1^\pm + (Q_4 \mp P_4) b_2^\pm + Q_5 b_3^\pm + (Q_6 \mp P_6) b_4^\pm &= \kappa \beta \begin{cases} i \sin \kappa a \\ \cos \kappa a \end{cases} \\ P_3 b_1^\pm + P_5 b_3^\pm &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^n \sqrt{k^2 - \lambda^2}}{l(\lambda)} e^{i0\lambda} d\lambda, & Q_n &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^n \sqrt{k^2 - \lambda^2}}{l(\lambda)} e^{i2a\lambda} d\lambda \\ \beta &= \frac{2\nu_0 k^2 \kappa \sqrt{k^2 - \kappa^2}}{l(\kappa)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

При этом употреблена следующая сокращенная запись

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{i0\lambda} d\lambda = \lim_{x \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Система (2.4) будет решаться в асимптотическом приближении для $k \ll 1$. Указанное неравенство служит условием возможности моделирования пластиной упругого слоя на поверхности жидкости; поэтому старший член асимптотического представления W по малому параметру k в значительной степени определяет поведение дифракционного поля в пределах физической корректности модели, а при достаточной малости k практически совпадает с самим дифракционным полем. Кроме k , в представлении, которое будет получено ниже, существенную роль играет параметр a . Отметим, что наличие в разбираемой модели некоторого характерного линейного размера сравнимого с длиной волны (именно такие случаи для расстояния между трещинами представляют наибольший интерес) не позволяет считать искомую асимптотику длинноволновой в обычном смысле этого слова.

Проведем в (2.5) замену переменной $\lambda = \nu_0^{1/2} k^{2/5} \mu$, получим

$$\begin{aligned} P_n &= \nu_0^{\frac{n-3}{5}} k^{\frac{2(n-3)}{5}} p_n, & p_n &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^n (\mu^2 - \gamma k^{3/5})^{1/2} e^{i0\mu} d\mu}{(\mu^4 - \alpha k^{2/5}) (\mu^2 - \gamma k^{3/5})^{1/2} - 1} \\ Q_n &= \nu_0^{\frac{n-3}{5}} k^{\frac{2(n-3)}{5}} q_n, & q_n &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^n (\mu^2 - \gamma k^{3/5})^{1/2} e^{i2\mu} d\mu}{(\mu^4 - \alpha k^{2/5}) (\mu^2 - \gamma k^{3/5})^{1/2} - 1} \end{aligned} \quad (n = 2, 3, 4, 5, 6) \quad (2.6)$$

Здесь

$$f = 2\alpha v_0^{1/5} k^{3/5}, \quad \alpha = \delta_0 v_0^{-4/5}, \quad \gamma = v_0^{-2/5}, \quad \sqrt{\mu^2 - \gamma k^{6/5}} > 0 \quad (2.7)$$

при $\mu > \gamma^{1/2} k^{3/5}$

Интеграл p_n можно выразить через элементарные функции при помощи выкладок, подобных описанным в [2]. При этом получится

$$p_{2n+1} = \frac{i}{4} \sum_{s=0}^4 \frac{\mu_s^{2n} (\mu_s^2 - \gamma k^{6/5})}{5\mu_s^4 - 4\mu_s^2 \gamma k^{6/5} - \alpha k^{3/5}} \quad (n = 1, 2)$$

$$p_{2n} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{s=0}^4 \frac{\mu_s^{2n-1} (\mu_s^2 - \gamma k^{6/5})}{5\mu_s^4 - 4\mu_s^2 \gamma k^{6/5} - \alpha k^{3/5}} \left(\ln \frac{\mu_s + (\mu_s^2 - \gamma k^{6/5})^{1/2}}{\gamma^{1/2} k^{3/5}} - i \frac{\pi}{2} \right)$$

(n = 1, 2, 3) (2.8)

Здесь μ_s ($s = 0, 1, 2, 3, 4$) — корни уравнения

$$(\mu_s^4 - \alpha k^{3/5})^2 (\mu_s^2 - \gamma k^{6/5}) - 1 = 0, \quad v_0^{1/5} k^{3/5} \mu_s = \lambda_s$$

Выбор ветви логарифма фиксируется требованиями

$$0 \leq \text{Im} \ln N < 2\pi, \quad \text{Re} \ln N > 0$$

Для μ_s имеет место тейлоровское разложение по степеням $k^{3/5}$ в следующем виде:

$$\mu_s = e^{\frac{2\pi i s}{5}} + \frac{1}{5} \alpha k^{3/5} e^{\frac{4\pi i s}{5}} - \frac{1}{25} \alpha^2 k^{6/5} e^{\frac{6\pi i s}{5}} + \left(\frac{1}{125} \alpha^3 + \frac{1}{10} \gamma \right) k^{9/5} e^{\frac{8\pi i s}{5}} + \dots \quad (2.9)$$

На основании формул (2.8) и (2.9) легко прийти к утверждению, что p_{2n+1} разлагаются в ряд Тейлора по целым степеням k^2 , а p_{2n} представимы в виде некоторого специфического разложения, в котором участвуют $\ln k$ и степени $k^{3/5}$.

Конкретные вычисления приводят к такому результату

$$p_3 = \frac{i}{4} + O(k^2), \quad p_5 = O(k^4)$$

$$p_{2n} = \frac{i}{5} \{1 - \exp [2/5 \pi i (2n - 3)]\}^{-1} + O(k^{3/5}) \quad (n = 1, 2, 3) \quad (2.10)$$

На основании (2.10) и однородных равенств системы (2.4) легко убедиться, что константы b_1^\pm, b_2^\pm имеют высокий порядок малости по k и не вносят вклада в основной член асимптотического представления для W . В этом смысле система (2.4) редуцируется и с учетом очевидных асимптотических упрощений для правых частей может быть записана в следующем виде

$$(Q_4 \pm P_4) b_3^\pm + Q_5 b_4^\pm = 2ik^3 \cos^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 \begin{cases} \cos \kappa a \\ i \sin \kappa a \end{cases}$$

$$Q_5 b_3^\pm + (Q_6 \mp P_6) b_4^\pm = 0 \quad (2.11)$$

Деформируем контур интегрирования для q_n в петлю, охватывающую верхний разрез, и сведем интеграл по всей петле к интегралу лишь по

правому берегу разреза. Если учесть вычеты в полюсах $\mu_0, \mu_1 - \mu_4$, пересекаемых при деформации контура, то нетрудно получить выражение для q_n , не содержащее расходящегося интеграла и удобное для отыскания нужных асимптотических представлений

$$q_n = \frac{i}{2} \sum_{\mu_s = \mu_0, \mu_1, -\mu_4} \frac{\mu_s^{n-1} (\mu_s^2 - \gamma k^{2/5}) e^{i\mu_s f}}{5\mu_s^4 - 4\mu_s^2 \gamma k^{2/5} - \alpha k^{2/5}} + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma^{1/2} k^{3/5}}^{\gamma^{1/2} k^{3/5} + i\infty} \frac{\mu^n (\mu^2 - \gamma k^{2/5})^{1/2} e^{i f \mu} d\mu}{(\mu^4 - \alpha k^{2/5})^2 (\mu^2 - \gamma k^{2/5}) - 1} \quad (2.12)$$

$(n=2, 3, 4, 5, 6)$

Вид асимптотического представления для q_n существенно зависит от величины параметра f .

В силу того что для безразмерного волнового числа изгибной волны λ_0 имеет место соотношение

$$\lambda_0 = \nu_0^{1/5} k^{2/5} \mu_0 \approx \nu_0^{1/5} k^{2/5}$$

(см. (2.9)), параметр f приблизительно равен умноженному на 2π отношению расстояния между трещинами к длине изгибной волны. (Точное значение этого выражения обозначим ниже через F).

Полагая f (или F , что эквивалентно) большим параметром задачи, можно прийти на основании (2.9) и (2.14) к следующему равенству

$$q_n = \frac{i}{10} e^{iF} + O(k^{2/5}) + O\left(\frac{1}{F^{n+2}}\right) \quad (F = 2a\lambda_0 = f\mu_0) \quad (2.13)$$

Если в этой формуле заменить точное значение μ_0 отрезком ряда, содержащим s первых слагаемых, то возникнет дополнительная погрешность $O(ak^{1/5(2s+2)})$.

В случае, когда f не будет большим числом, имеет место формула

$$q_n = \frac{i}{10} \left\{ e^{if} + \exp\left[\frac{2\pi i}{5}(n-3) + ife^{2/5\pi i}\right] + \exp\left[\frac{3\pi i}{5}(n-3) + ife^{3/5\pi i}\right] \right\} + \frac{i^n}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\tau^{n+1}}{\tau^{10} + 1} e^{-f\tau} d\tau + O(k^{2/5}) \quad (2.14)$$

Обратимся к случаю, когда f велико. Решая систему (2.11) с учетом асимптотических равенств (2.10) и (2.13), придем к следующим значениям для искомым констант

$$b_3^\pm = \mp 20 i \sin \frac{\pi}{5} \frac{e^{iF} \cos 0.1\pi \mp e^{-0.1i\pi}}{e^{iF} \cos 0.1\pi \mp e^{-0.3i\pi}} \left\{ \begin{array}{l} \cos \kappa a \\ i \sin \kappa a \end{array} \right\} \frac{\cos^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 k^{13/5}}{\nu_0^{1/5}} \quad (2.15)$$

$$b_4^\pm = \pm 20 i \sin \frac{\pi}{5} \frac{e^{iF} \cos 0.1\pi}{e^{iF} \cos 0.1\pi \mp e^{-0.3i\pi}} \left\{ \begin{array}{l} \cos \kappa a \\ i \sin \kappa a \end{array} \right\} \frac{\cos^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 k^{11/5}}{\nu_0^{2/5}}$$

Формулы (1.5), (2.2), (2.3), (2.15) (с учетом того, что $b_1^\pm, b_2^\pm = 0$), составляют решение поставленной задачи для рассматриваемой асимптотической ситуации. Это решение исследуется ниже с целью получения физических следствий.

§ 3. Основными компонентами изучаемого дифракционного поля W являются цилиндрическая волна W_0 и две поверхностные волны, одна из которых (прямая волна W_+) бежит в сторону возрастания координаты x , а другая (обратная волна W_-) — в противоположную сторону. В обозначениях этих волновых процессов условимся использовать нижние индексы, верхние индексы $+$, $-$ сохраним для обозначения четной и нечетной частей поля и его элементов. Введем также верхний индекс $^\circ$, которым будем обозначать элементы волнового поля для решенной в [2] задачи дифракции от одной трещины.

Отношение двух соответствующих элементов волнового поля для нашей задачи и задачи с одной трещиной будем условно называть «функцией влияния» и обозначать R .

Функция влияния показывает, как влияет наличие второй трещины на амплитуду и фазу соответствующего волнового процесса.

В дальнейшем будет принята следующая запись для дифракционного поля

$$W = W^+ + W^- \quad (3.1)$$

$$W^\pm = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda a} (b_3^\pm \lambda^2 + b_4^\pm \lambda^3) \pm e^{-i\lambda a} (b_3^\pm \lambda^2 - b_4^\pm \lambda^3)}{i(\lambda)} \exp(i\lambda x + i\sqrt{k^2 - \lambda^2} y) d\lambda$$

Прямая поверхностная волна W_+ выделяется из (3.1) путем взятия вычета подынтегрального выражения при $\lambda = \lambda_0$. После вычислений имеем

$$W_+ = -2e^{i(0.1\pi - 0.5F)} \sin \frac{\pi}{5} \left\{ \frac{e^{iF} - e^{-0.2i\pi}}{e^{iF} \cos 0.1\pi - e^{-0.3i\pi}} \cos ka + \right. \\ \left. + \frac{e^{iF} + e^{-0.2i\pi}}{e^{iF} \cos 0.1\pi + e^{-0.3i\pi}} i \sin ka \right\} \frac{\cos^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 k^{3/5}}{v_0^{3/5}} e^{i\lambda_0 x - \lambda_0 y} \quad (3.2)$$

Выражение для прямой поверхностной волны W_+° в случае одной трещины можно записать в следующем виде [2]

$$W_+^\circ = -2e^{-0.2i\pi} \sin \frac{\pi}{5} \frac{\cos^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 k^{3/5}}{v_0^{3/5}} e^{i\lambda_0 x - \lambda_0 y} \quad (3.3)$$

Сличая формулы (3.2) и (3.3), приходим к такому выражению для функции влияния прямой поверхностной волны

$$R_+ = e^{-i(0.5F + 0.1\pi)} \left\{ \frac{e^{iF} - e^{-0.2i\pi}}{e^{iF} \cos 0.1\pi - e^{-0.3i\pi}} \cos (ka \cos \varphi_0) - \right. \\ \left. - \frac{e^{iF} + e^{-0.2i\pi}}{e^{iF} \cos 0.1\pi + e^{-0.3i\pi}} - i \sin (ka \cos \varphi_0) \right\} \quad (3.4)$$

Функция R_+ , как видно из (3.4), зависит периодически от двух аргументов: расстояния между трещинами, измеренного в длине изгибающей волны (параметр F), и разности фаз падающей волны U_0 в левой и правой трещинах (параметр $ka \cos \varphi_0$); при этом абсолютная величина R_+ испытывает довольно значительные колебания.

Рассмотрим для иллюстрации случай, когда сдвиг фаз падающей волны между трещинами пренебрежимо мал или кратен 2π

$$ka \cos \varphi_0 = 2s\pi$$

Тогда

$$R_+ = e^{-i(0.5F+0.1\pi)} \frac{e^{iF} - e^{-0.2i\pi}}{e^{iF} \cos 0.1\pi - e^{-0.3i\pi}} \quad (3.5)$$

и при $F = -0.2\pi + 2n\pi$ имеет место обращение R_+ в нуль.

Обозначим безразмерную длину изгибной волны через l_0 . В рассматриваемом приближении оказалось, что при

$$\frac{2a}{l_0} = n - \frac{1}{10} \quad (ka \cos \varphi_0 = 2s\pi, \quad n, s - \text{целые}) \quad (3.6)$$

имеет место полное исчезновение прямой поверхностной волны. Любопытно, что гашение прямой поверхностной волны получается при существенно нецелом ($n - 0.1$) числе изгибных волн, размещаемых на расстоянии между трещинами.

Модуль функции влияния R_+ достигает своего максимума вблизи точек наименьшего значения модуля знаменателя. Этот максимум примерно равен 7. Иными словами, наличие второй трещины при

$$\frac{2a}{l_0} \approx n - \frac{3}{20} \quad (ka \cos \varphi_0 = 2s\pi; \quad n, s - \text{целые}) \quad (3.7)$$

вызывает приблизительно семикратное усиление по амплитуде прямой поверхностной волны.

Таким образом, для поверхностной волны в нашей системе налицо довольно сильные резонансные явления.

Обратимся к цилиндрической волне W_0 . Она выделяется из (3.1) с помощью метода стационарной фазы

$$W_0 = V(\varphi) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \quad (3.8)$$

$$V(\varphi) = \frac{20}{\sqrt{2\pi}} e^{i/4\pi} \sin \frac{\pi}{5} \left\{ \frac{e^{iF} \cos 0.1\pi - e^{-0.1i\pi}}{e^{iF} \cos 0.1\pi - e^{-0.3i\pi}} \cos (ka \cos \varphi_0) \cos (ka \cos \varphi) - \right. \\ \left. - \frac{e^{iF} \cos 0.1\pi + e^{-0.1i\pi}}{e^{iF} \cos 0.1\pi + e^{-0.3i\pi}} \sin (ka \cos \varphi_0) \sin (ka \cos \varphi) \right\} \frac{\cos^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi \sin \varphi k^{18/5}}{\nu_0^{9/5}}$$

$$(x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi)$$

В случае одной трещины цилиндрическая волна определяется формулой

$$W_0^\circ = V^\circ(\varphi) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \quad (3.9)$$

$$V^\circ(\varphi) = \frac{10}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(i \frac{29}{20} \pi \right) \sin \frac{\pi}{5} \frac{\cos^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi \sin \varphi k^{18/5}}{\nu_0^{9/5}}$$

Для функции влияния получим следующее выражение

$$R_0(\varphi) = 2e^{-0.2i\pi} \left\{ \frac{e^{iF} \cos 0.1\pi - e^{-0.1i\pi}}{e^{iF} \cos 0.1\pi - e^{-0.3i\pi}} \cos(ka \cos \varphi_0) \cos(ka \cos \varphi) - \frac{e^{iF} \cos 0.1\pi + e^{-0.1i\pi}}{e^{iF} \cos 0.1\pi + e^{-0.3i\pi}} \sin(ka \cos \varphi_0) \sin(ka \cos \varphi) \right\} \quad (3.10)$$

Так как угол φ входит в число аргументов функции влияния, характер диаграммы направленности цилиндрической волны, имевший место в случае одной трещины, может для двух трещин существенно искажаться. В зависимости от параметров F и $ka \cos \varphi_0$ будет происходить не только резонансное усиление или ослабление интенсивности цилиндрического излучения, но и расщепление двух основных лепестков диаграммы направленности.

Рассмотрим для примера случай, когда $ka \cos \varphi_0 = n\pi$. Тогда

$$R_0 = 2(-1)^n e^{-0.2i\pi} \frac{e^{iF} \cos 0.1\pi - e^{-0.1i\pi}}{e^{iF} \cos 0.1\pi - e^{-0.3i\pi}} \cos(ka \cos \varphi) \quad (3.11)$$

Видно, что в этом случае происходит расщепление каждого из двух основных лепестков диаграммы направленности на $E(n/\cos \varphi_0) + 1$ более мелких лепестков ($E(x)$ обозначает целую часть x). Интересно отметить, что ни при каком F цилиндрическое излучение не исчезает полностью. Отношение по амплитуде максимального значения цилиндрической волны к минимальному составляет здесь величину порядка 140.

Напомним, что выводы этого параграфа имеют место в асимптотическом смысле для больших значений параметра F . В случае необходимости исследования резонансных явлений в описанной системе для значений F , которые не могут считаться большими (например, при нахождении первого максимума модуля функции влияния), следует прибегнуть к численному счету на основании формулы (2.14).

Поступила 5 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Коузов Д. П. Дифракция плоской гидроакустической волны на стыке двух пластин. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 3.
2. Коузов Д. П. Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 6.
3. Красильников В. Н. О решении некоторых гранично-контактных задач линейной гидродинамики. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4.