Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ УПРУГОСТИ

В. А. Пальмов

(Ленинград)

1. Для объяснения некоторых закономерностей распространения коротких акустических волн в кристаллах, поликристаллических металлах и высоких полимерах необходимо учитывать дискретный характер структуры вещества, состоящего из отдельных частиц, связанных сложными силами взаимодействия. Такими частицами могут быть отдельные молекулы, отдельные кристаллы в поликристаллических металлах и т. д. Существенное различие между сплошной средой, обычно рассматриваемой в теории упругости, и реальной системой отдельных частиц состоит в следующем. Перемещение частиц сплошной среды определяется полем вектора $\mathbf{u}$, а малый поворот при малых $\mathbf{u}$ находится по формуле

$$\mathbf{\Phi} = {}^1/_2 \operatorname{rot} \mathbf{u} \tag{1.1}$$

При подходе к веществу, как дискретной системе частиц, перемещение центров тяжести частиц может быть задано полем вектора $\mathbf{u}$, а малый поворот вокруг центра тяжести — полем вектора $\mathbf{\Phi}$, который кинематически не зависит от $\mathbf{u}$.

Далее, в теории сплошной среды воздействие среды на малый элемент, выделенный из нее, определяется напряжениями, т. е. в конечном счете усилиями, действующими на его гранях, тогда как момент вычисляется через эти усилия. В то же время при подходе к веществу, как дискретной системе частиц, воздействие на частицу со стороны соседних определяется независимыми силами и моментами.

Ниже излагается подход с позиций сплошной среды к изучению поведения вещества с дискретной структурой. При этом, чтобы избавиться от указанных выше различий между классической сплошной средой и дискретной системой частиц, приходится наделить сплошную среду рядом необычных на первый взгляд свойств.

Определим малые перемещения частиц сплошной среды полем вектора $\mathbf{u}$, а их малый поворот — полем вектора $\mathbf{\Phi}$, независимым от $\mathbf{u}$. Напряженное состояние в каждой точке сплошной среды будем характеризовать диадой напряжений $\boldsymbol{\tau}$ и диадой пар напряжений $\boldsymbol{\mu}$. Элементы диады напряжений представляют силы, действующие на единицу площади соответствующих сечений внутри тела. Элементы диады пар напряжений — это моменты, действующие на единицу площади тех же сечений. Объемные силы в каждой точке среды зададим вектором силы $\mathbf{K}$ и вектором объемного момента $\mathbf{c}$.

Важным для последующего является предположение о том, что поверхностные и объемные силы совершают работу только на возможных перемещениях $\delta\mathbf{u}$, а поверхностные и объемные моменты — только на возможных перемещениях $\delta\mathbf{\Phi}$. Подобный подход к указанным задачам известен в литературе [1–7]. Однако в ряде работ [2–5] наряду с введением пар напряжений сохраняется кинематическая гипотеза (1.1).

2. Выделим некоторую часть среды объемом V, ограниченную поверхностью S. В соответствии со сказанным выше в каждой точке поверхности S воздействие части среды, расположенной вне S, на часть, заключенную внутри S, задается вектором напряжений $\boldsymbol{\tau}_n$ и вектором пар напряжений $\boldsymbol{\mu}_n$; в каждой точке объема задаются объемные силы и объемные моменты с интенсивностями $\mathbf{K}$ и $\mathbf{c}$ соответственно.

Чтобы выделенный объем среды находился в равновесии, необходимо и достаточно выполнения следующих условий

$$\int\limits_S \boldsymbol{\tau}_n dS + \int\limits_V \mathbf{K}\, dV = 0 \tag{2.1}$$

$$\int\limits_S (\mathbf{r}\times\boldsymbol{\tau}_n + \boldsymbol{\mu}_n)\, dS + \int\limits_V (\mathbf{r}\times\mathbf{K} + \mathbf{c})\, dV = 0 \tag{2.2}$$

Заметим, что справедливы следующие представления векторов поверхностных нагрузок $\boldsymbol{\tau}_n$ и $\boldsymbol{\mu}_n$ [4,8]

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}, \qquad \boldsymbol{\mu}_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\mu} \tag{2.3}$$

где $\mathbf{n}$ — орт нормали к поверхности S, а $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\mu}$ — диады напряжений и пар напряжений.

Внося (2.3) в (2.1), (2.2) и преобразуя поверхностные интегралы в объемные по формуле Гаусса — Остроградского, получим

$$\int\limits_S \boldsymbol{\tau}_n dS + \int\limits_V \mathbf{K}\, dV = \int\limits_S \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dS + \int\limits_V \mathbf{K}\, dV = \int\limits_V (\nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \mathbf{K})\, dV = 0 \tag{2.4}$$

$$\int\limits_S (\mathbf{r}\times\boldsymbol{\tau}_n + \boldsymbol{\mu}_n)\, dS + \int\limits_V (\mathbf{r}\times\mathbf{K} + \mathbf{c})\, dV = \int\limits_S \mathbf{n}\cdot(-\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\mu})\, dS +$$
$$+ \int\limits_V (\mathbf{r}\times\mathbf{K} + \mathbf{c})\, dV = \int\limits_V [\nabla\cdot(-\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{r}\times\mathbf{K} + \mathbf{c}]\, dV = 0 \tag{2.5}$$

где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона $\nabla = \partial / \partial\mathbf{r}$. Отсюда, в силу произвольности объема V, получаем дифференциальные уравнения равновесия

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \mathbf{K} = 0 \tag{2.6}$$

$$\nabla\cdot(-\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{r}\times\mathbf{K} + \mathbf{c} = 0 \tag{2.7}$$

Чтобы упростить (2.7), используем формулу [8]

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{r}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{\tau})\times\mathbf{r} - \boldsymbol{\tau}_\times \tag{2.8}$$

где $\boldsymbol{\tau}_\times$ — вектор диады $\boldsymbol{\tau}$. Напомним, что он получится, если левые множители диады векторно перемножить с правыми и сложить результаты.

Внося (2.8) в (2 7), получим

$$\mathbf{r}\times(\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\mathbf{K})+\nabla\cdot\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\tau}_{\times}+\mathbf{c}=0 \tag{2.9}$$

что, в силу (2.6), существенно упрощается

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\tau}_{\times}+\mathbf{c}=0 \tag{2.10}$$

Уравнения (2.6), (2.10) представляют искомые уравнения равновесия. Отметим, что диада напряжений $\boldsymbol{\tau}$ является несимметричной, так как в силу (2.10) ее вектор не равен нулю. Отсюда происходит название теории — теория несимметричной упругости [2].

3. Чтобы найти связь между кинематическими величинами $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\Phi}$ и силовыми $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\mu}$, воспользуемся принципом возможных перемещений. Предполагая существование потенциальной энергии упругой деформации среды, плотность которой U зависит от поля малых перемещений $\mathbf{u}$ и поля поворотов $\boldsymbol{\Phi}$, имеем

$$\int\limits_S(\boldsymbol{\tau}_n\cdot\delta\mathbf{u}+\boldsymbol{\mu}_n\cdot\delta\boldsymbol{\Phi})\,dS+\int\limits_V(\mathbf{K}\cdot\delta\mathbf{u}+\mathbf{c}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi}-\delta U)\,dV=0 \tag{3.1}$$

Здесь $\delta\mathbf{u}$ — поле возможных перемещений частиц среды, а $\delta\boldsymbol{\Phi}$ — поле возможных их поворотов. Внося (2.3) в (3.1) и преобразуя поверхностный интеграл в объемный, получим

$$\int\limits_V[\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\delta\mathbf{u}+\boldsymbol{\mu}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi})+\mathbf{K}\cdot\delta\mathbf{u}+\mathbf{c}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi}-\delta U]\,dV=0 \tag{3.2}$$

Так как объем V произвольный, можем приравнять нулю подынтегральное выражение в (3.2), откуда найдем вариацию плотности потенциальной энергии

$$\delta U=\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\delta\mathbf{u}+\boldsymbol{\mu}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi})+\mathbf{K}\cdot\delta\mathbf{u}+\mathbf{c}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi} \tag{3.3}$$

Далее, воспользуемся формулами

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\delta\mathbf{u})=(\nabla\cdot\boldsymbol{\tau})\cdot\delta\mathbf{u}+\boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\,\delta\nabla\mathbf{u}^* \tag{3.4}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\mu}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi})=(\nabla\cdot\boldsymbol{\mu})\cdot\delta\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\mu}\cdot\cdot\,\delta\nabla\boldsymbol{\Phi}^* \tag{3.5}$$

Второе слагаемое в правой части (3.4) представляет двойное скалярное произведение диад $\boldsymbol{\tau}$ и $\delta\nabla\mathbf{u}^*$. При таком умножении правые и левые множители диад сомножителей перемножаются, соответственно, скалярно. Внося (3.4) в (3.3), получим

$$\delta U=(\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\mathbf{K})\cdot\delta\mathbf{u}+(\nabla\cdot\boldsymbol{\mu}+\mathbf{c})\cdot\delta\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\,\delta\nabla\mathbf{u}^*+\boldsymbol{\mu}\cdot\cdot\,\delta\nabla\boldsymbol{\Phi}^* \tag{3.6}$$

При помощи уравнений равновесия это выражение принимает вид

$$\delta U=-\boldsymbol{\tau}_{\times}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\,\delta\nabla\mathbf{u}^*+\boldsymbol{\mu}\cdot\cdot\,\delta\nabla\boldsymbol{\Phi}^* \tag{3.7}$$

Поставим в соответствие вектору $\boldsymbol{\Phi}$ антисимметричную диаду $\boldsymbol{\Phi}^A$, вектор которой равен $\boldsymbol{\Phi}$. Непосредственная проверка показывает, что $\boldsymbol{\Phi}^A$ можно определить по формуле

$$\boldsymbol{\Phi}^A=-{}^1\!/_2\,\mathbf{I}\times\boldsymbol{\Phi} \tag{3.8}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная диада.

По определению имеем

$$\Phi_\times{}^A = \Phi \tag{3.9}$$

Аналогичным образом по значению $\tau_\times$ может быть восстановлена антисимметричная составляющая диады напряжений

$$\tau^A = -{}^1/_2 \mathbf{I} \times \tau_\times \tag{3.10}$$

Далее, непосредственная проверка убеждает в справедливости такого соотношения

$$\tau_\times \cdot \delta\Phi = -2\tau^A \cdot\cdot \delta\Phi^A = -2\tau \cdot\cdot \delta\Phi^A \tag{3.11}$$

Внося (3.11) в (3.7) и вводя обозначения

$$\Lambda = \nabla \mathbf{u} - 2\Phi^A, \qquad \mathbf{M} = \nabla\Phi \tag{3.12}$$

запишем вариацию потенциальной энергии в следующей форме

$$\delta U = \tau \cdot\cdot \delta\Lambda^* + \mu \cdot\cdot \delta\mathbf{M}^* \tag{3.13}$$

Отсюда видно, что удельная потенциальная энергия малых деформаций может быть представлена в виде функции от диад Λ и $\mathbf{M}$

$$U = U(\Lambda, \mathbf{M}) \tag{3.14}$$

Проварьируем (3.14)

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \Lambda} \cdot\cdot \delta\Lambda^* + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}} \cdot\cdot \delta\mathbf{M}^* \tag{3.15}$$

Сравнивая (3.15) с (3.13), приходим к общему выражению закона упругой деформации

$$\tau = \frac{\partial U}{\partial \Lambda}, \qquad \mu = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}} \tag{3.16}$$

Ограничимся ниже рассмотрением малых деформаций изотропной среды с зеркальной симметрией свойств. Так как среда изотропна, потенциальная энергия должна зависеть только от инвариантов диад Λ и $\mathbf{M}$. Но в силу малости деформаций в потенциальной энергии достаточно удержать лишь члены второго порядка, полагая, что члены первого исключены соответствующим выбором начала отсчета перемещений $\mathbf{u}$ и поворотов Φ. Поэтому, при составлении выражения плотности потенциальной энергии, из шести инвариантов каждой из диад Λ и $\mathbf{M}$ можно использовать лишь первые и вторые скалярные инварианты и векторные инварианты. Заметим, что произведения первых скалярных или векторных инвариантов разных диад должны отсутствовать в выражении U, так как диада Λ — полярная, а диада $\mathbf{M}$ — аксиальная.

Таким образом, удельная потенциальная энергия среды может быть записана так

$$U = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{2}\Lambda^S \cdot\cdot \mathbf{II} \cdot\cdot \Lambda^S + \mu\Lambda^S \cdot\cdot \Lambda^S - \alpha\Lambda^A \cdot\cdot \Lambda^A +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\beta}{2}\mathbf{M}^S \cdot\cdot \mathbf{II} \cdot\cdot \mathbf{M}^S + \gamma\mathbf{M}^S \cdot\cdot \mathbf{M}^S - \varepsilon\mathbf{M}^A \cdot\cdot \mathbf{M}^A \tag{3.17}$$

где индексом S — отмечены симметричные составляющие диад, а индексом A — антисимметричные. Коэффициенты λ, μ, α, β, γ, ε — это шесть упругих характеристик изотропной среды. Нетрудно увидеть, что в выражении (3.17) они умножаются на линейно независимые инварианты диад $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{M}$.

Внося (3.17) в (3.16), получаем закон малых упругих деформаций, эквивалентный обычному закону Гука

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \mathbf{II} \cdot\cdot \mathbf{\Lambda}^S + 2\mu \mathbf{\Lambda}^S + 2\alpha \mathbf{\Lambda}^A \tag{3.18}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \beta \mathbf{II} \cdot\cdot \mathbf{M}^S + 2\gamma \mathbf{M}^S + 2\varepsilon \mathbf{M}^A \tag{3.19}$$

4. Система уравнений (2.6), (2.10), (3.12), (3.18), (3.19) образует полную систему уравнений линейной теории упругости, учитывающей вращательное взаимодействие частиц. При некоторых частных значениях параметра α из нее могут быть получены и классические уравнения теории упругости и уравнения теории пар напряжений, рассмотренные в работах [2–5].

Так, из выражения (3.18) следует, что при $\alpha = 0$ диада напряжений становится симметричной и, в силу (3.12), принимает вид

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu (\nabla \mathbf{u})^S \tag{4.1}$$

Уравнения (4.1), (2.6) образуют систему уравнений классической теории упругости [9], причем λ и μ — обычные постоянные Ламе. В этом случае уравнения (3.19), (2.10) образуют независимую систему для определения поворотов частиц.

Рассмотрим теперь случай $\alpha \to \infty$. При этом, так как напряжения должны быть ограниченными, имеем

$$\lim_{\alpha\to\infty} 2\alpha \mathbf{\Lambda}^A = \boldsymbol{\tau}^A, \qquad \lim_{\alpha\to\infty} \mathbf{\Lambda}^A = 0 \tag{4.2}$$

где $\boldsymbol{\tau}^A$ — антисимметричная диада.

Из второго соотношения (4.2) следует

$$\lim_{\alpha\to\infty} \mathbf{\Lambda}_\times{}^A = 0$$

что в силу (3.12) дает

$$\mathbf{\Phi} = {}^1/_2 \nabla \times \mathbf{u} \tag{4.3}$$

Внося (3.12), (4.3) в (3.18), (3.19), получим

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu (\nabla \mathbf{u})^S + \boldsymbol{\tau}^A$$

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma (\nabla\nabla \times \mathbf{u})^S + \varepsilon (\nabla\nabla \times \mathbf{u})^A = \frac{\gamma+\varepsilon}{2} \nabla\nabla \times \mathbf{u} + \frac{\gamma-\varepsilon}{2} \nabla \times \mathbf{u} \nabla \tag{4.4}$$

Уравнения (2.6), (2.10), (4.4) рассматривались в работах [3–5].

Системе уравнений (2.6), (2.10), (3.12), (3.18), (3.19) должны быть приданы граничные условия. Если они силовые, то на поверхности упругого тела задаются поверхностные нагрузки $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}$, где $\mathbf{n}$ — орт нормали к поверхности. При кинематических граничных условиях на поверхности упругого тела задаются перемещения $\mathbf{u}$ и повороты $\mathbf{\Phi}$. Если заданы граничные условия и объемные усилия $\mathbf{K}$ и $\mathbf{c}$, а плотность потенциальной энергии U является знакоопределенной положительной квадратичной формой, то решение указанной выше системы уравнений единственно. Теорема такого содержания в рассматриваемом случае может быть доказана тем же способом, что и в классической теории упругости.

Внося (3.18), (3.19), (3.12) в уравнения равновесия (2.6), (2.10), получим уравнения относительно перемещений $\mathbf{u}$ и поворотов $\mathbf{\Phi}$, аналогичные уравнениям Ламе

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - (\mu + \alpha)\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) + 2\alpha\nabla\times\mathbf{\Phi} + \mathbf{K} = 0$$

$$(\beta + 2\gamma)\nabla\nabla\cdot\mathbf{\Phi} - (\gamma + \varepsilon)\nabla\times(\nabla\times\mathbf{\Phi}) + 2\alpha\nabla\times\mathbf{u} - 4\alpha\mathbf{\Phi} + \mathbf{c} = 0 \quad (4.5)$$

При выводе этих уравнений были использованы следующие представления симметричной и антисимметричной составляющих диад $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{M}$ и векторного инварианта диады $\boldsymbol{\tau}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Lambda}^S &= {}^1/_2(\nabla\mathbf{u} - \mathbf{u}\nabla) + \mathbf{u}\nabla = -{}^1/_2\mathbf{I}\times(\nabla\times\mathbf{u}) + \mathbf{u}\nabla\\
\mathbf{M}^S &= -{}^1/_2\mathbf{I}\times(\nabla\times\mathbf{\Phi}) + \mathbf{\Phi}\nabla\\
\mathbf{\Lambda}^A &= -{}^1/_2\mathbf{I}\times\mathbf{\Lambda}_\times = -{}^1/_2\mathbf{I}\times(\nabla\times\mathbf{u} - 2\mathbf{\Phi})\\
\mathbf{M}^A &= -{}^1/_2\mathbf{I}\times(\nabla\times\mathbf{\Phi})\\
\boldsymbol{\tau}_\times &= 2\alpha\mathbf{\Lambda}_\times = 2\alpha(\nabla\times\mathbf{u} - 2\mathbf{\Phi})
\end{aligned} \quad (4.6)$$

Кроме того, упругие характеристики $\lambda, \mu, \ldots, \varepsilon$ предполагались постоянными.

5. Рассмотрим распространение волн в безграничной динамически изотропной упругой среде. Для этого в уравнениях (4.5) в качестве объемных сил примем инерционные нагрузки

$$\mathbf{K} = -\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \qquad \mathbf{c} = -j\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial t^2} \quad (5.1)$$

Здесь ρ — плотность среды, а j — особая динамическая характеристика среды, равная произведению момента инерции частицы вещества вокруг любой оси, проходящей через ее центр тяжести, на число частиц в единице объема. Внося (5.1) в (4.5), найдем уравнения динамики среды

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - (\mu + \alpha)\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) + 2\alpha\nabla\times\mathbf{\Phi} - \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} &= 0\\
(\beta + 2\gamma)\nabla\nabla\cdot\mathbf{\Phi} - (\gamma + \varepsilon)\nabla\times(\nabla\times\mathbf{\Phi}) + 2\alpha\nabla\times\mathbf{u} - 4\alpha\mathbf{\Phi} - j\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial t^2} &= 0
\end{aligned} \quad (5.2)$$

Представим решение этой системы в следующем виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \nabla\varphi + \nabla\times\mathbf{H}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{H} = 0\\
\mathbf{\Phi} &= \nabla\psi + \mathbf{\Phi}_1, \qquad \nabla\cdot\mathbf{\Phi}_1 = 0
\end{aligned} \quad (5.3)$$

Подстановка решения (5.3) в (5.2) дает

$$\begin{aligned}
&\nabla\left[(\lambda + 2\mu)\nabla^2\varphi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right] + \nabla\times\left[(\mu + \alpha)\nabla^2\mathbf{H} + 2\alpha\mathbf{\Phi}_1 - \rho\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}\right] = 0\\
&\nabla\left[(\beta + 2\gamma)\nabla^2\psi - 4\alpha\psi - j\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right] + \left[(\gamma + \varepsilon)\nabla^2\mathbf{\Phi}_1 - 2\alpha\nabla^2\mathbf{H} - \right.\\
&\qquad\left. - 4\alpha\mathbf{\Phi}_1 - j\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}_1}{\partial t^2}\right] = 0
\end{aligned} \quad (5.4)$$

Отсюда видно, что уравнения динамики среды удовлетворятся полностью, если φ, ψ, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{\Phi}_1$ подчинить следующим уравнениям

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\varphi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \qquad (\beta + 2\gamma)\nabla^2\psi - 4\alpha\psi - j\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.5)$$

$$(\mu + \alpha)\nabla^2\mathbf{H} + 2\alpha\mathbf{\Phi}_1 - \rho\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.6)$$

$$(\gamma + \varepsilon)\nabla^2\mathbf{\Phi}_1 - 2\alpha\nabla^2\mathbf{H} - 4\alpha\mathbf{\Phi}_1 - j\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}_1}{\partial t^2} = 0 \quad (5.7)$$

Первое уравнение (5.5) определяет поведение волны расширения в веществе, а второе — волны вращения, в которой частицы только поворачиваются, но не смещаются. Система уравнений (5.6), (5.7) описывает волны искажения. Исключив из нее вектор $\mathbf{\Phi}_1$, получим единое уравнение для волны искажения

$$\left\{\left[(\gamma + \varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha - j\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\left[(\mu + \alpha)\nabla^2 - \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] + 4\alpha^2\nabla^2\right\}\mathbf{H} = 0 \quad (5.8)$$

Рассмотрим каждую из волн в отдельности. Ограничимся плоскими волнами, распространяющимися, скажем, вдоль оси x. Положим

$$\varphi = Ae^{i\xi(x-ct)} = Ae^{i(\xi x-\omega t)} \quad (5.9)$$

Здесь A — амплитуда волны, ξ — волновое число, c — фазовая скорость, ω — частота колебаний частиц в волне. Внесем (5.9) в первое уравнение (5.5) и определим фазовую скорость волны

$$c^2 = c_1{}^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (5.10)$$

Такой же результат получен и в классической теории упругости.

Подставим решение типа (5.9) во второе уравнение (5.5) и найдем зависимость фазовой скорости от частоты волны ω. Получим

$$c^2 = \frac{\omega^2 c_5{}^2}{\omega^2 - \omega_*{}^2} \qquad \left(c_5{}^2 = \frac{\beta + 2\gamma}{j}, \ \omega_*{}^2 = \frac{4\alpha}{j}\right) \quad (5.11)$$

Из (5.11) следует, что бегущая волна вращения существует лишь при частотах, больших ω_*. При $\omega \to \infty$ фазовая скорость стремится к c_5.

Чтобы исследовать поведение волн искажения, положим

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}e^{i\xi(x-ct)} = \mathbf{B}e^{i(\xi x-\omega t)} \quad (5.12)$$

где $\mathbf{B}$ — некоторый постоянный вектор, определяющий направление и интенсивность движения частиц. Внося (5.12) в (5.8), получим следующее уравнение для квадрата волнового числа

$$c_3{}^2 c_4{}^2 (\xi^2)^2 + [\omega_*{}^2 c_2{}^2 - \omega^2(c_3{}^2 + c_4{}^2)](\xi^2) - \omega^2(\omega_*{}^2 - \omega^2) = 0 \quad (5.13)$$

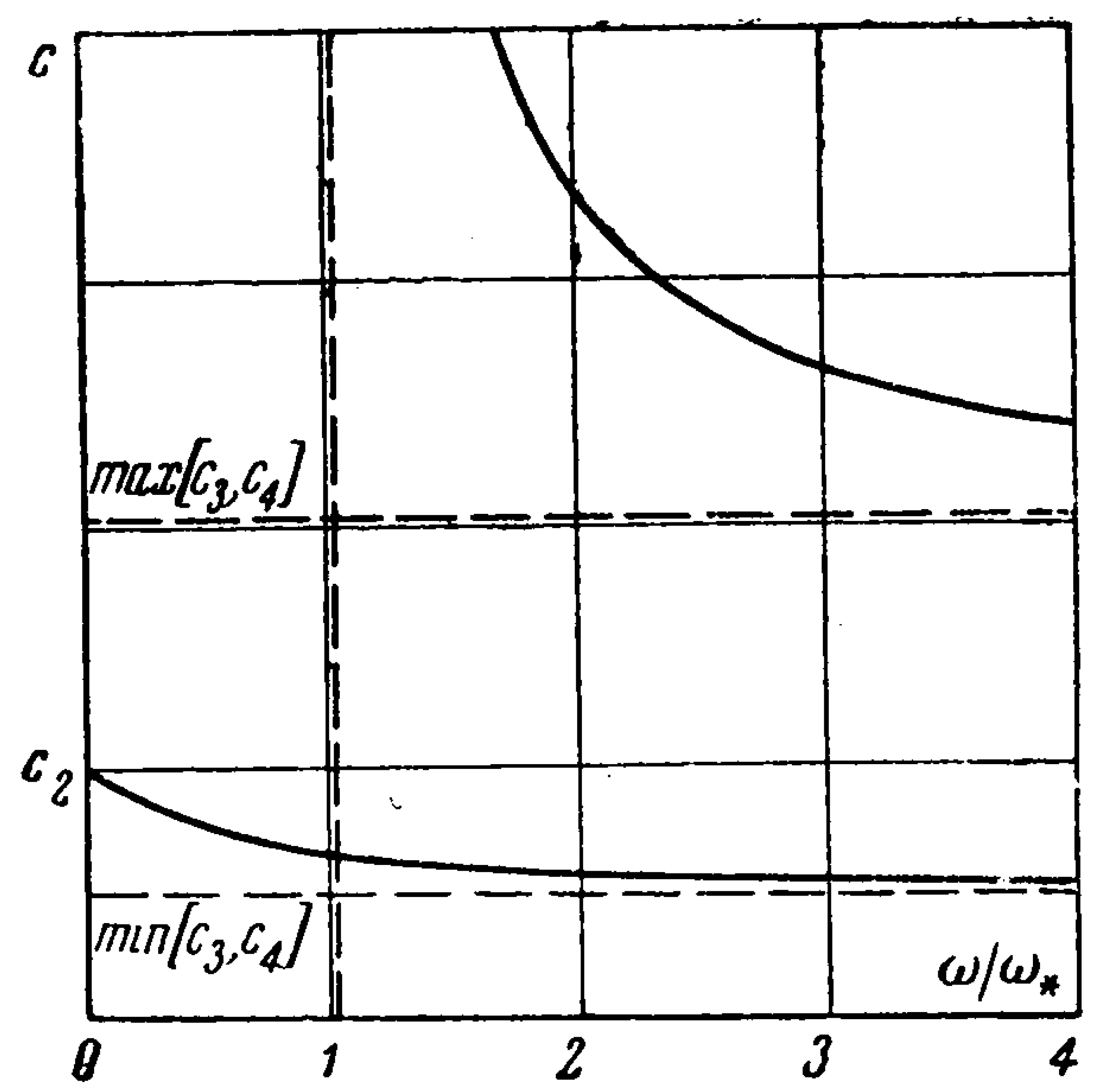
где

$$c_2{}^2 = \frac{\mu}{\rho}, \qquad c_3{}^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho}, \qquad c_4{}^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{j}, \qquad \omega_*{}^2 = \frac{4\alpha}{j} \quad (5.14)$$

Дискриминант уравнения (5.13) можно записать так

$$D = [\omega^2(c_3{}^2 - c_4{}^2) - \omega_*{}^2 c_2{}^2]^2 + 4\omega^2\omega_*{}^2 c_4{}^2(c_3{}^2 - c_2{}^2) \quad (5.15)$$

Отсюда видно, что он положителен, и поэтому при любых ω уравнение (5.13) имеет два различных вещественных корня ξ^2. При помощи теоремы Виета легко показать, что при $\omega < \omega_*$ имеется один положительный корень ξ^2 уравнения (5.13), а при $\omega > \omega_*$ оба корня положительны. Следовательно, при $\omega < \omega_*$ существует одна бегущая волна искажения, а при $\omega > \omega_*$ их уже две. При малых частотах имеем следующее приближенное значение положительного корня уравнения (5.13)



$$\xi^2 \approx \frac{\omega^2}{c_2^2} \qquad (5.16)$$

Отсюда находим, что при низких частотах фазовая скорость волны искажения приближенно равна c_2, что совпадает с классическим результатом. Для высоких частот асимптотическое решение уравнения (5.13) дает два значения волнового числа

$$\xi_1^2 = \frac{\omega^2}{c_3^2}, \qquad \xi_2^2 = \frac{\omega^2}{c_4^2} \qquad (5.17)$$

Отсюда находим две фазовые скорости волн искажения: c_3 и c_4.

Из всего сказанного следует, что зависимость фазовой скорости волны искажения от частоты должна иметь вид зависимости, изображенной на фигуре. Рассмотрение ее показывает, что при $\omega < \omega_*$ фазовая скорость возрастает с ростом ω, если $c_2 < \min[c_3, c_4]$ и падает, если $c_2 > \min[c_3, c_4]$.

Этот вывод противоречит утверждению Миндлина [4] о том, что фазовая скорость волны искажения при любых условиях должна возрастать с ростом частоты волны.

Поступила 13 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E. et F. Theorie des corps deformables, Paris, 1909.
2. Grioli G. Elasticita asimmetrica. Ann. mat. pura ed appl., Ser. IV, 1960, v. 50.
3. Аэро Э. Л. и Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц. Физика твердого тела, 1960, т. II, № 7.
4. Mindlin R. D. and Tiersten H. F. Effects of Couple-stresses in Linear Elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, v. 11, No. 5.
5. Toupin R. A. Elastic materials with couple-stresses. Archive Rat Mech. Anal., 1962, v. 11, No. 5.
6. Shaefer H. Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat-Kontinuums. Miszellanen der Angewandten Mechanik. Festschrif W. Tollmien, 1962.
7. Кувшинский Е. В. и Аэро Э. Л. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет внутреннего вращения. Физика твердого тела, 1963, т. 5, № 9.
8. Лагалли М. Векторное исчисление. Гостехиздат, 1936.
9. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1955.