Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

О СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ И ПЕРСПЕКТИВАХ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО ПОДХОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ МИКРОНАПРЯЖЕНИЙ[1]

В. В. Новожилов

(Ленинград)

1. В неупругих твердых телах связь между напряжениями и деформациями в каждый момент процесса деформирования неизбежно зависит от всей истории этого процесса или, как принято говорить, от пути нагружения. Ввиду многообразия реологических свойств твердых тел нереально думать о создании для них единой теории, охватывающей всевозможные случаи. Поэтому ниже речь будет идти только о важнейшем варианте теории сложного нагружения, относящемся к телам, которые обладают начальной изотропией и у которых силы, сопротивляющиеся пластической деформации, не зависят от времени.

С некоторой степенью идеализации (см. ниже) такая теория, получившая название теории течения, подходит для большинства металлов и их сплавов при умеренных температурах. Независимость диссипативных сил, возникающих при пластической деформации, от времени по существу означает, что эти силы имеют характер сухого трения.

Основным свойством силы трения при действии ее на движущуюся материальную точку является то, что она всегда направлена по касательной к траектории движения в сторону, противоположную скорости. Это свойство трения определяет тензорную структуру связи между напряжениями и деформациями в теории течения, принимая форму равенства

$$T_{ij} = T \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{d\lambda}, \qquad d\lambda = \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p \, d\varepsilon_{ij}^p}, \qquad T = \sqrt{T_{ij}T_{ij}} \tag{1.1}$$

Здесь ε_{ij}^p —тензор пластических деформаций (который в дальнейшем будем считать девиатором, полагая, что тело пластически несжимаемо); $-T_{ij}$ — тензор (девиатор) диссипативных сил пластического сопротивления. Формула (1.1) выражает условие касательности к траектории пластического деформирования тензора диссипативных сил, сопротивляющихся пластическим деформациям.

Если предположить, что нет никаких иных сил, сопротивляющихся пластической деформации, кроме $-T_{ij}$, и что трение постоянно вдоль траектории деформирования, т. е. что инвариант $T = T_0 = \text{const}$, то T_{ij} надо отождествить с девиатором напряжения σ_{ij}', и тогда (1.1) превращается в простейший вариант теории течения — теорию Рейсса.

[1] По материалам доклада на Втором всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике.

Если сохранить предположение о том, что сопротивление пластической деформации носит чисто диссипативный характер, но считать, что трение T зависит от положения точки на траектории деформирования, то придем к варианту теории течения с изотропным упрочнением [1].

Однако вовсе не обязательно полагать, что сопротивление пластической деформации целиком носит диссипативный характер. В процессе пластической деформации могут возникать, как следствие ее неравномерности, внутренние упругие силы ей сопротивляющиеся. Обозначим тензор внешнего эффекта этих сил через s_{ij}. В этом случае тензор диссипативных сил будет выражаться формулой

$$T_{ij} = \sigma_{ij}' - s_{ij} \tag{1.2}$$

Полагая, что σ_{ij}' связаны с ε_{ij}^p линейными соотношениями, аналогичными закону Гука, а $T = T_0$, получим из (1.1) простейший вариант трансляционной теории течения, который иногда называют теорией с идеальным эффектом Баушингера. Последняя теория может быть обобщена, если отказаться от предположения, что T постоянно вдоль траектории деформирования [2-4]. Как видно, в основе теории течения заложено интуитивное представление о диссипативных силах, сопротивляющихся пластической деформации, как о силах типа сухого трения. Это находит математическое выражение в требовании касательности тензора диссипативных сил — T_{ij} к траектории пластического деформирования, а также в требовании независимости этого тензора от времени деформирования.

Перечисленные варианты теории течения образуют направление в теории пластичности, которое следует назвать основным, хотя им, конечно, далеко не исчерпывается все богатство идей, выдвинутых различными авторами для описания процесса деформирования первоначально изотропных неупругих тел.

Экспериментальный материал по проверке различных вариантов теории течения весьма обширен и имеющиеся в нем данные в общем благоприятны для теории (см., например, [5,6]). Уже простейшие ее варианты дают, как правило, удовлетворительное совпадение с опытом. Трансляционные теории, учитывающие эффект Баушингера, вносят заметное уточнение только при существенно сложных путях нагружения (например, при обходе вокруг области упругих деформаций или при изменении знака нагрузки). Однако, говоря о совпадении предсказаний теории течения с данными опытов, необходимо отметить, что степень справедливости этого утверждения зависит от допуска, с которым измеряются пластические деформации (т. е. от той наименьшей их величины, начиная с которой уславливаемся их замечать).

В этом отношении показательны работы Ю. И. Ягна и его учеников [7,8], в которых было установлено, что при очень малых допусках на пластическую деформацию (порядка 0.001%) не только самые простые, но и самые сложные из предложенных вариантов теории течения не дают правильного представления о закономерностях пластического деформирования. Граница области упругих деформаций имеет при таких допусках сложную форму, существенно изменяющуюся в процессе деформирования. По мере увеличения допуска наблюдаемая картина начинает упрощаться, и при допусках порядка 0.05% сближается с предсказаниями основных вариантов теории течения. При дальнейшем увеличении допуска опять начинается расхождение теории с опытом. Так, например, в теории течения (и теории пластичности вообще) утверждается, что если с какого-то момента активного нагружения осуществлена разгрузка и затем вновь произведено нагружение, то новым пределом текучести явится то максимальное напряжение σ_m, которое было достигнуто в процессе нагружения. На опыте же, если принять большой допуск (порядка 0.2%, который общепринят в технике), получится, что предел текучести при повторном нагружении несколько больше σ_m. Наоборот, если принять малый допуск (порядка 0.01% или еще меньше), то предел текучести при повторном нагружении окажется ниже σ_m. Таким образом, говоря о хорошем совпадении теории течения с экспериментом, надо обязательно добавить, что оно имеет место только при достаточно грубой обработке опытных данных.

Отсюда следует, что под дифференциалами в формулах теории течения, в сущности говоря, следует подразумевать конечные приращения деформаций порядка того допуска, при котором предположения, лежащие в основе теории, оправдываются. Последнее не мешает теории течения правильно предсказывать общую картину зависимости траекторий деформирования от траекторий нагружения, но локальные эффекты в непосредственной близости от мест резкого изменения направления нагружения она уловить не в состоянии. Недостаточная точность теории течения в описании величин, быстро изменяющихся в пределах относительно малого изменения пластических деформаций, вероятно, основная причина ее несостоятельности применительно к задачам об устойчивости равновесия упруго-пластических тел. Как известно [9,10], для этого круга задач лучшее совпадение с опытом дает теория малых пластических деформаций. Почему это именно так, сказать трудно, но ясно одно — что удивляться несовпадению теории течения с опытами в области устойчивости равновесия упруго-пластических тел не приходится.

2. Хотя в описании общей картины пластического деформирования теорией течения уже достигнуты значительные успехи, тем не менее ее совершенствование следует продолжать как с целью дальнейшего сближения теоретических результатов с опытами в отношении предсказания пути деформирования при заданном пути нагружения, так и, в особенности, с целью изучения микродеформаций и микронапряжений, возникающих в телах при их упруго-пластическом деформировании. Появление этих микродеформаций и микронапряжений обусловливается микроскопической неоднородностью упругих и пластических свойств поликристалла, а также несовершенствами в структуре его кристаллических зерен, т. е. дислокациями. В теории упругости и теории пластичности обычно напряжения и деформации осредняются в пределах элементарных объемов, содержащих достаточно большое число кристаллических зерен, и устанавливаются зависимости между осредненными напряжениями и осредненными деформациями, которые в дальнейшем будем называть макроскопическими.

Однако при формулировке закона этой связи необходимо считаться и с микроскопической неоднородностью поля напряжений и деформаций, так как работа, совершаемая самоуравновешенными микронапряжениями на соответствующих им микродеформациях, сравнима с работой осредненных напряжений на осредненных деформациях. Особенно показательны в этом отношении многочисленные опыты над измерением тепла, выделяющегося при макроскопически однородной деформации [11,12] и др. Сравнение соответствующей этому теплу работы с работой, затраченной на пластическую деформацию, показывает, что механический эквивалент выделившегося тепла всегда заметно меньше затраченной работы (на 5—8% — в зависимости от величины деформации). Из этого следует, что в однородно деформированном упруго-пластическом теле после снятия с него всей нагрузки остается поле упругих деформаций и соответствующее ему поле остаточных напряжений, появление которого может быть объяснено только микроскопической неоднородностью механических свойств тела.

К этому следует добавить, что при однородности макронапряжений и макродеформаций в испытываемом за пределом текучести образце возникают несомненно не только упругие, но и пластические неоднородные микродеформации, каковые при опытах типа [11, 12] не выявляются, но на которые, однако, тратится работа, по-видимому, сравнимая по величине с работой, затрачиваемой на упругие остаточные микродеформации, так что в действительности из всей работы, затрачиваемой на пластическую деформацию тела, вероятно, не менее 10—15% должно быть отнесено за счет самоуравновешенных микронапряжений и соответствующих им микродеформаций.

4. Работа, затрачиваемая на микродеформации, оказывается сравнимой с работой, затрачиваемой на осредненные деформации. Это обстоятельство позволяет ввести макроскопический тензор, являющийся статистической характеристикой микронапряжений и позволяющий учесть влияние последних на соотношения между макроскопическими напряжениями и деформациями.

Рассмотрим достаточно малый, но конечный объемный элемент поликристаллического тела, содержащий большое число кристаллических зерен. Работа, затрачиваемая на изменение деформации этого объемного элемента, отнесенная к единице его объема, выражается формулой

$$dR = \frac{1}{V}\int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV \tag{4.1}$$

в которой интеграл распространен по всему объему элемента. Представим напряжения и деформации в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ} + \sigma_{ij}^{*}, \qquad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\circ} + \varepsilon_{ij}^{*} \tag{4.2}$$

Здесь σ_{ij}° и ε_{ij}° суть постоянные в пределах рассматриваемого объемного элемента тензоры, равные средним значениям напряжений и деформаций

$$\sigma_{ij}^{\circ} = \frac{1}{V}\int \sigma_{ij} dV, \qquad \varepsilon_{ij}^{\circ} = \frac{1}{V}\int \varepsilon_{ij} dV \tag{4.3}$$

Что касается σ_{ij}^{*} и ε_{ij}^{*}, то их интегралы в пределах объема выделенного элемента равны нулю

$$\int \sigma_{ij}^{*} dV = \int \varepsilon_{ij}^{*} dV = 0 \tag{4.4}$$

Подставив (4.2) в (4.1) и учитывая (4.4), приходим к формуле

$$dR = dR^{\circ} + dR^{*} = \sigma_{ij}^{\circ} d\varepsilon_{ij}^{\circ} + \frac{1}{V}\int \sigma_{ij}^{*} d\varepsilon_{ij}^{*} dV \tag{4.5}$$

В этой формуле первый член правой части есть работа осредненных напряжений на приращениях осредненных деформаций, а второй — работа самоуравновешенных напряжений на приращениях соответствующих им деформаций. При микронеоднородности упругих и пластических свойств тела второй интеграл всегда отличен от нуля. Пренебречь им, как уже было об этом сказано, нельзя.

Для объемных элементов, содержащих достаточно большое множество кристаллических зерен, работу самоуравновешенных напряжений, отнесенную к единице объема, dR^{*}, следует считать не зависящей ни от формы, ни от размеров элемента, т. е. второй член формулы (4.5) есть, при заданных $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$, $d\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$ и при заданной предыстории нагружения, для всякого тела вполне определенная величина, характеризующая его микроструктуру. Введем новый симметричный макроскопический тензор второго ранга, имеющий размерность напряжений, связав его с dR^{*} равенством

$$dR^{*} = \sigma_{ij}^{**}\, d\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} \tag{4.6}$$

Основное свойство данного тензора, вытекающее из (4.5) и (4.6), состоит в том, что удельная работа, совершаемая им на приращениях макроскопических деформаций, равна удельной работе всех микронапряжений на соответствующих им микродеформациях. Формула (4.6), разумеется, не определяет полностью σ_{ij}^{**}. Однако она показывает, что такой тензор может быть введен и что он всегда отличен от нуля. Ниже на основании ряда физических соображений будут указаны пути к его конкретизации.

Подставив (4.6) в (4.5), получаем формулу

$$dR = (\overset{\circ}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^{**})\, d\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = S_{ij} d\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} \tag{4.7}$$

Таким образом, в выражение для приращения удельной работы деформации поликристаллического материала на равных правах с осредненными напряжениями $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$ входит и макроскопический тензор σ_{ij}^{**}, являющийся представителем микронапряжений.

5. Разделим теперь, как обычно, макроскопическую деформацию на упругую и пластическую ее части ($\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p}$).

Тогда

$$dR = S_{ij}\,(d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}) \tag{5.1}$$

Согласно этой формуле, напряжения S_{ij}, приложенные к объемному элементу тела извне, преодолевают как внутренние силы, сопротивляющиеся упругой деформации, так и внутренние силы, сопротивляющиеся пластической деформации. Из того, что S_{ij} совершают работу на приращениях упругих деформаций, следует (если считать, что упругие деформации не зависят от пути нагружения), что

$$S_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^{e}} \tag{5.2}$$

Здесь Φ — скалярная функция от инвариантов тензора ε_{ij}^{e} — потенциал напряжений.

Что же касается внутренних сил, сопротивляющихся пластической деформации, то их можно подразделить на три следующие категории.

а) осредненные по всему элементарному объему V диссипативные силы ($-T_{ij}$), имеющие характер сухого трения и, в соответствии с этим, связанные с макроскопическими пластическими деформациями ε_{ij}^{p} формулой (1.1).

б) упругие микронапряжения, обусловленные пластической деформацией, ею определяющиеся и вместе с нею исчезающие. Макроскопический тензор им соответствующий обозначим $-s_{ij}$.

в) микроскопические силы типа сухого трения. Тензор этих напряжений в каждой точке внутри выделенного объема V касателен к локальной траектории пластического деформирования (к микротраектории) ...чего, однако, не следует, что соответствующий им макроскопический ...ор ($-p_{ij}$) направлен по касательной к траектории макроскопических ...ических деформаций ε_{ij}^{p}. Он может иметь, вообще говоря, и иное ...ление.

...основании сказанного

$$S_{ij} = \overset{\circ}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^{**} = T_{ij} + s_{ij} + p_{ij} \tag{5.3}$$

Отсюда

$$T_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ} = S_{ij} - s_{ij} - p_{ij} \tag{5.4}$$

Работа напряжений s_{ij} на замкнутом цикле пластических деформаций, как было указано выше, равна нулю. Ввиду этого

$$s_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}} \tag{5.5}$$

где Ψ — функция от пластических деформаций ε_{ij}^{p}.

Тензор s_{ij} вводился и раньше: он присутствует во всех вариантах теории течения, учитывающих анизотропность упрочнения. Впервые название тензора микронапряжений ему было дано в работе [4].

Приведенные выше рассуждения разъясняют смысл этого макроскопического тензора и правомочность указанного его наименования. Однако из них вытекает еще и то, что, кроме тензора s_{ij}, представляющего микронапряжения, работающие на упругих микродеформациях, на равных с ним правах должен появиться и тензор p_{ij}, являющийся представителем микронапряжений, работающих на пластических микродеформациях. До сих пор данное слагаемое S_{ij}, по-видимому, не учитывалось, хотя, вероятно, вклад в удельную работу деформации у s_{ij} и p_{ij}, примерно, одинаков. Если p_{ij} не принимать во внимание, то придем к теории течения с перемещающейся и, возможно, расширяющейся границей области упругих деформаций. Координатами центра этой области будут компоненты тензора s_{ij}. Недостатком такой теории, как на это обратил внимание автора А. А. Вакуленко, является то, что она приводит к выводу, что в результате деформирования по циклу, замкнутому как по напряжениям, так и по деформациям, материал снова становится начально изотропным, что, вообще говоря, не согласуется с опытами.

Последние показывают, что после деформирования замкнутого и по напряжениям и по деформациям в теле, как правило, сохраняется деформационная анизотропия. При этом центр области упругих деформаций перемещается по некоторой тензорной траектории, не доходя до своего исходного положения, что является аргументом в пользу необходимости сохранения в формуле (5.4), кроме s_{ij}, также и второго слагаемого p_{ij}, каковое, будучи представителем микронапряжений, работающих на пластических микродеформациях, не обращается в нуль при замкнутом цикле макроскопической деформации.

А так как координаты центра области упругих деформаций определяются тензором $\sigma_{ij}^{**} = s_{ij} + p_{ij}$, то тем самым учет p_{ij} в формуле (5.4) обеспечивает возможность описания деформационной анизотропии, остающейся в теле при циклах деформирования, замкнутых как по напряже-ниям, так и по деформациям.

Тензор s_{ij}, как уже было сказано, связан с макроскопическими
стическими деформациями ε_{ij}^{p} конечными соотношениями (5.5). Ч
касается p_{ij}, то хотя его тоже надлежит связать с пластическими
мациями, однако эта связь должна иметь вид неинтегрируемых диф
циальных соотношений (ввиду диссипативного характера сил, с
ствующих p_{ij}).

На то, в каком направлении следует искать форму данных соотношений, наталкивает уже упомянутый экспериментальный факт, согласно которому центр области упругих деформаций, следуя за пластическими деформациями, от них в своих эволюциях несколько отстает. Но тем же свойством, как известно, обладает и тензор пластических деформаций по отношению к тензору напряжений.

Отсюда имеются основания искать связь между p_{ij} и пластическими деформациями ε_{ij}^p в виде

$$dp_{ij} = \varepsilon_{ij}^p \, d\chi \qquad (5.6)$$

Здесь χ — функция от T. Последнее вытекает из того, что при отсутствии приращений пластических деформаций p_{ij} должен оставаться постоянным.

Автор не утверждает, что форма связи между p_{ij} и ε_{ij}^p (5.6) будет оптимальной с точки зрения возможности сближения предсказаний теории с опытом, но это, по-видимому, простейшее из возможных предложений. В конечном счете именно эксперимент должен подсказать наиболее рациональный выбор связи между p_{ij} и ε_{ij}^p.

6. Намеченные пути уточнения теории течения, будучи подкреплены систематизированными опытами, позволят ее усовершенствовать в сторону лучшего учета анизотропности упрочнения, внешним проявлением которой является эффект Баушингера.

Это даст возможность успешно применять теорию к более сложным путям нагружения и деформирования, чем это можно делать сейчас. Но самое главное, что можно ожидать от намеченного развития теории течения,— это возможность исследования некоторых свойств микронапряжений, возникающих при пластической деформации поликристаллов. В металловедении уже давно микронапряжениям приписывается существенная роль. Они рассматриваются как причины, которыми определяется возникновение в материале микротрещин и последующее их развитие.

В настоящее время успешно продвигается вперед физическая теория внутренних микронапряжений, исходящая из современных представлений о реальной структуре твердых тел и опирающаяся на аппарат теории дислокаций. Делаются попытки изучения микронапряжений и микродеформаций различными современными методами экспериментальной физики, в частности, методом просвечивания рентгеновскими лучами.

Ни в какой мере не отвергая всех этих направлений в изучении микронапряжений и микродеформаций, здесь, однако, обращается внимание на наличие еще одной (притом наиболее простой) возможности, а именно, возможности изучения микронапряжений в рамках феноменологической теории пластичности.

Оказывается, микронапряжения посылают своего представителя в мир макроскопических явлений, наблюдаемых в лабораториях сопротивления материалов на хорошо известных и повсеместно распространенных испытательных машинах. Таким представителем является макроскопический тензор σ_{ij}^{**}, работа которого на осредненных деформациях равна работе микронапряжений на микродеформациях. Указанное основное свойство σ_{ij}^{**}, а также некоторые, опирающиеся на экспериментальные факты, предположения позволяют его достаточно достоверно определить через посредство его влияния на картину макроскопической деформации. Использование этого тензора, который следовало бы назвать «тензором внешнего проявления микронапряжений», если бы такое название не было слишком длинным, позволяет составить осредненное (в некотором смысле) представление о картине микронапряжений и о ее зависимости от пути нагружения.

Можно возразить, что такое осредненное представление недостаточно, так как оно не дает никакой оценки для максимальных значений микронапряжений. Между тем, ввиду значительной неравномерности поля микронапряжений, отклонения их максимальных значений от осредненных значений могут быть весьма велики. Это замечание совершенно правильно. Феноменологический подход не дает и, видимо, принципиально не может дать оценку пределов флюктуаций микронапряжений, что является его серьезным недостатком. Однако и осредненные характеристики микронапряжений представляют несомненный интерес. В частности они позволяют получить представление о работе, совершаемой микронапряжениями в зависимости от заданного пути нагружения, и о скрытой упругой энергии, накапливаемой при этом в теле. Если возникновение микротрещин обусловливается, по-видимому, максимальными значениями микронапряжений, то последующее развитие уже образовавшейся трещины, возможно, будет зависеть преимущественно от осредненной упругой энергии микронапряжений.

Но даже если сделать самое осторожное и самое невыгодное для феноменологического описания микронапряжений предположение, что осредненная картина не дает непосредственной возможности для оценки критериев прочности материалов при сложном нагружении, то и тогда данное направление следует развивать как подсобный метод исследования микронапряжений, дополняющий остальные (физические) методы их изучения. В самом деле, когда будет, наконец, создана достаточно разработанная физическая теория, позволяющая учесть не только осредненные характеристики микронапряжений, но и пределы их флюктуации, то на основании этой теории можно будет вывести, в частности, и формулы, учитывающие влияние микронапряжений на картину макроскопических деформаций. Данные формулы по своей структуре, несомненно, будут близки к тем, которые приведены выше и степень их совпадения с опытом позволит судить о степени точности разработанной теории.

Поэтому не следует пренебрегать возможностями феноменологического подхода, позволяющего получать некоторые (пусть хотя и неполные) сведения о, пока еще достаточно для нас таинственном, мире микронапряжений на основании обычных механических испытаний образцов, т. е. путем весьма несложного по технике, общедоступного и хорошо разработанного эксперимента.

Поступила 29 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Handelman G. H., Lin C. C., Prager W. On the mechanical behavior of metals in the strain-hardening range. Quart Appl. Math., 1947, v. 4, p.p. 397—407.
2. Edelman F., Drucker D. Some extension of elementary plasticity theory. J. Franklin inst., 1951, v. 251.
3. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. Укр. матем. ж., 1954, № 3.
4. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.
5. Budiansky B., Daw N., Peters R., Shepherd R. Experimental studies of poliaxial stress-strain laws of plasticity. Proc. of the first U. S. Nat. Congr. of appl. mech., 1951.
6. Клячко С. Д. Об оценке теории течения. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 5.
7. Ягн Ю. И., Шишмарев О. А. Некоторые результаты исследования границ упругого состояния пластически растянутых образцов никеля. Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 1.
8. Изотов И. Н., Ягн Ю. И. Изучение пластического деформирования металла с деформационной анизотропией, созданной в процессе предварительного нагружения. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 3.
9. Stowell E. Z. A unifed theory of plastic buckling of columns and plates, NACA Techn. Note № 1817, 1949.
10. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, 1963, стр. 394.
11. Taylor G., Quinney. H. Proc. Roy Soc. ser. A, 1934, vol. 143.
12. Большанина М. А., Панин В. Е. Скрытая энергия деформации. Сб. Исследования по физике твердого тела. Изд. АН СССР, 1957.