Отметим в заключение, что формулы (3) и (4) работы [1] были ранее использованы в работе [3]; в работе [1] не указано также, что уменьшение сопротивления тел звездообразного поперечного сечения по сравнению с сопротивлением эквивалентного конуса установлено в работах [2,3].

Поступила 18 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л. О форме пространственных тел наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1
2. Майкапар Г. И. О волновом сопротивлении неосесимметричных тел в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.
3. Майкапар Г. И. О форме сверхзвукового самолета. Тр. ЦАГИ, 1961, вып. 841.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

Л. А. Дикий

(Москва)

Задача об устойчивости плоскопараллельного потока вязкой несжимаемой жидкости сводится, как известно, к решению уравнения Орра — Зоммерфельда [1]. Это уравнение поддается исследованию с большим трудом. Ниже рассматривается самый простой пример, когда скорость потока линейно зависит от поперечной координаты, т. е. случай плоскопараллельного течения Куэтта. Математически вопрос сводится к определению знака мнимой части собственных значений c краевой задачи

$$
\begin{gathered}
(kz - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) = \frac{1}{i\alpha R}(\varphi^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi) \\
\varphi(-1) = \varphi'(-1) = \varphi(1) = \varphi'(1) = 0
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где k, α, R — некоторые вещественные положительные параметры. Число параметров можно, на самом деле, уменьшить, положив $c_1 = c / k$, $R_1 = Rk$, но удобнее писать уравнение в форме (1). Параметры имеют следующий физический смысл: α — длина волны, c — фазовая скорость, R_1 — число Рейнольдса. Если мнимые части всех собственных значений c окажутся отрицательными, то течение устойчиво.

Имеется большое число работ, в которых делается попытка доказать устойчивость течения при всех значениях параметров α и R_1. Однако доказать это строго никому не удалось. Обычная схема исследования — рассмотрение асимптотических предельных случаев, например больших значений числа Рейнольдса и т. п. Для остальных же значений параметров производится прямой численный расчет собственных значений. Несмотря на высокую технику асимптотических оценок, достигнутую в настоящее время, см., например, работу [2], такой путь принципиально не может привести к полному и окончательному решению задачи, так как невозможно провести численный расчет для бесконечной области параметров, для которой асимптотики не пригодны. (Относительно асимптотических исследований и численных расчетов см. также статьи [3,4]). Из сказанного следует, что построение строгого и логически замкнутого доказательства устойчивости плоского течения Куэтта остается по-прежнему весьма желательным.

Ниже доказывается более ограниченное предложение, а именно то, что все чисто мнимые собственные числа c лежат в нижней полуплоскости. (При малых значениях числа Рейнольдса все собственные значения чисто мнимые. С ростом R_1 они по очереди сходят с мнимой оси, сначала сливаясь попарно, а затем превращаясь в пары точек, расположенных симметрично относительно мнимой оси). Заметим, что в работах [5,4] устойчивость чисто мнимых собственных значений также устанавливалась путем комбинации асимптотических рассмотрений и численных расчетов.

Теорема. Чисто мнимые собственные числа задачи (1) удовлетворяют неравенству $\operatorname{Im} c < -\alpha / R$.

Этим доказывается не только устойчивость возмущений, но и дается некоторая оценка скорости их затухания.

Обозначим $d = -ic + \alpha / R$, $\gamma = \alpha / k$, $a = \alpha R / k^2$. Нужно будет доказывать, что вещественные собственные числа d отрицательны. Если ввести новую искомую функцию $u = \varphi'' - \alpha^2\varphi$, то для нее уравнение будет уже не четвертого, а второго порядка

$$u'' - ia\xi u = 0 \qquad (\xi = kz - id)$$

(уравнение Эйри), но краевые условия заменяются некоторыми интегральными условиями. Нетрудно показать, что собственные числа d получаются как корни векового уравнения

$$\Delta(k) \equiv \int_{-id-k}^{-id+k} \int_{-id-k}^{-id+k} \operatorname{sh} \gamma (\xi - \xi_1)\, u_1(\xi)\, u_2(\xi_1)\, d\xi d\xi_1 = 0 \tag{2}$$

где u_1 и u_2 — два каких-нибудь линейно независимых решения уравнений Эйри.

Разложим функцию $\Delta(k)$ в ряд по степеням k, считая γ и a независимыми параметрами. Очевидным образом функция $\Delta(k)$ будет аналитической функцией переменного k. При помощи полученного в явном виде разложения $\Delta(k)$ по степеням k покажем, что Δ не может обращаться в нуль при положительных значениях параметров γ, a, d и k, что и докажет теорему. Для разложения в ряд нужно будет вычислять последовательные производные функции $\Delta(k)$ при $k = 0$. Обозначим

$$W^{(m,n)}(\alpha, \beta) = u_1^{(m)}(\alpha)\, u_2^{(n)}(\beta) - u_1^{(n)}(\beta)\, u_2^{(m)}(\alpha)$$

Теперь дифференцируем

$$\frac{d\Delta(k)}{dk} = \int_{-id-k}^{-id+k} [\operatorname{sh} \gamma (-id + k - \xi)\, W^{(0,0)}(-id + k, \xi) - \\ - \operatorname{sh} \gamma (-id - k - \xi)\, W^{(0,0)}(\xi, -id - k)]\, d\xi$$

В этом выражении k входит не только в пределы интегрирования, но и в подынтегральную функцию. Поэтому при следующем дифференцировании получится как член, содержащий интеграл, так и неинтегральный член — от дифференцирования интеграла по пределам интегрирования. Точно так же при каждом следующем дифференцировании будут оставаться интегральные члены — от дифференцирования предыдущего интегрального члена, возникать «свежие» неинтегральные члены — от дифференцирования того же предыдущего интегрального члена по пределам интегрирования, а также дополнительные неинтегральные члены — от дифференцирования полученных ранее неинтегральных членов. По индукции доказывается, что интегральные члены и «свежие» неинтегральные члены производной $d^p\Delta / dk^p$ таковы

$$\int_{-id-k}^{-id+k} \Big\{ \operatorname{sh} \gamma (-id + k - \xi) \sum_{m=0}^{p-1} \binom{p-1}{m} W^{(m,\, p-1-m)}(-id + k, \xi) + \\ + (-1)^p \operatorname{sh} \gamma (-id - k - \xi) \sum_{m=0}^{p-1} \binom{p-1}{m} W^{(m,\, p-1-m)}(\xi, -id - k) \Big\} d\xi + \\ + 2\,[1 + (-1)^p] \operatorname{sh} 2\gamma k \sum_{m=0}^{p-2} \binom{p-2}{m} W^{(m,\, p-2-m)}(-id + k, -id - k) \tag{3}$$

Заметим теперь, что последняя сумма в этом выражении может быть представлена $i^{p-2}\partial^{p-2} W^{(0,0)}(-id + k, -id - k) / \partial d^{p-2}$.

Для того чтобы написать теперь всю производную $d^p\Delta / dk^p$, к членам (3) нужно дописать неинтегральные члены, появлявшиеся при всех предыдущих дифференцированиях, додифференцированные недостающее число раз. Нам нужна производная при $k = 0$.

Если положить $k = 0$, то интегральные члены обратятся в нуль, и будем иметь

$$\frac{d^{2p+2}\Delta(0)}{dk^{2p+2}} = 4\sum_{q=0}^{p}(-1)^q \frac{\partial^{2q}}{\partial d^{2q}}\left\{\frac{\partial^{2(p-q)}}{\partial k^{2(p-q)}}\left[\operatorname{sh} 2\gamma k W^{(0,0)}(-id+k, -id-k)\right]\right\}_{k=0}$$

Производные нечетного порядка равны нулю. Перепишем эту формулу еще так

$$\frac{d^{2p+2}\Delta(0)}{dk^{2p+2}} = 4\sum_{q=0}^{p-1}\sum_{r=0}^{p-q-1}(-1)^q\binom{2(p-q)}{2r+1}(2\gamma)^{2(p-q-r)-1}\times$$

$$\times\frac{\partial^{2q}}{\partial k^{2q}}\left[\frac{\partial^{2r+1}}{\partial k^{2r+1}}W^{(0,0)}(-id+k, -id-k)\right]_{k=0} \tag{4}$$

Теперь вычислим выражение в квадратных скобках. Для этого обозначим

$$w_1 = W^{(0,0)}(-id+k, -id-k), \qquad w_2 = W^{(1,1)}(-id+k, -id-k)$$

$$w_{3,4} = W^{(1,0)}(-id+k, -id-k) \mp W^{(0,1)}(-id+k, -id-k)$$

Используя уравнение Эйри, которому удовлетворяют u_1 и u_2, нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{\partial w_1}{\partial k} = w_3, \qquad \frac{\partial w_2}{\partial k} = -adw_3 + iakw_4$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial k} = 2adw_1 - 2w_2, \qquad \frac{\partial w_4}{\partial k} = 2iakw_1$$

Таким образом, четыре функции удовлетворяют системе из четырех уравнений. Непосредственно проверяется, что эти функции удовлетворяют также начальным условиям

$$w_1 = w_2 = w_4 = 0, \qquad w_3 = w, \qquad \text{при } k = 0$$

Здесь постоянную w можно считать произвольной, что соответствует произволу в выборе двух линейно независимых решений u_1 и u_2. Можно считать, что w_1, w_2, w_4 — нечетные функции, а w_3 — четная, впрочем это непосредственно усматривается и из формул (5). Будем искать решения системы в виде степенных рядов по степеням k

$$w_1 = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{k^{2r+1}}{(2r+1)!}a_r \qquad \text{и т. д.}$$

После подстановки в уравнения получается рекуррентная формула для коэффициентов

$$a_{r+3} = 4ada_{r+2} + 4a^2(2r+2)(2r+4)a_r \qquad (r \geqslant -2)$$

Это разностное уравнение определяет a_r однозначно, с точностью до произвольного постоянного множителя. Простой проверкой убеждаемся в том, что этому разностному уравнению удовлетворяет следующее выражение

$$a_r = \sum_{s=0}^{r}{}'(4a)^{r-\frac{r-s}{3}}\frac{r!}{s!}3^{\frac{s-r}{3}}\left(\frac{r-s}{3}!\right)^{-1}$$

где штрих при знаке суммы означает, что в сумме участвуют лишь такие значения номера s, что $r - s$ делится на 3. Итак,

$$\left[\frac{\partial^{2r+1}}{\partial k^{2r+1}}W^{(0,0)}(-id+k, -id-k)\right]_{k=0} = \sum_{s=0}^{r}{}'(4a)^{r-\frac{r-s}{a}}\frac{r!}{s!}3^{\frac{s-r}{3}}\left(\frac{r-s}{3}!\right)^{-1}$$

Теперь формулу (4) можно записать так

$$\frac{d^{2p+2}\Delta(0)}{dk^{2p+2}} = 4\sum_{q=0}^{p-1}\sum_{r=0}^{p-q-1}(-1)^q\binom{2(p-q)}{2r+1}(2\gamma)^{2(p-q-r)-1}\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{r}{}'(4a)^{r-\frac{r-s}{3}}\frac{r!d^{s-2q}}{(s-2q)!}3^{\frac{s-r}{3}}\left(\frac{r-s}{3}!\right)^{-1}$$

Удобнее сгруппировать члены с одинаковыми степенями γ и d. Для этого обозначим $s - 2q = m$ и $p - q - r = n$ (легко видеть, что $p - n - m$ делится на 3, так как $r - s$ делится на 3). В результате будем иметь

$$\Delta = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{p-1} \sum_{n=1}^{p-m}{}' a_{p,m,n} d^m \gamma^{2n-1} \right) k^{2p+2} \tag{6}$$

где берутся лишь такие n, что $p - n - m$ делится на 3, и

$$a_{p,m,n} = \frac{2^{2n+1}}{(2p+2)!} (4a)^{p-n-\nu} \sum_{q=0}^{\nu} (-1)^q \binom{2(p-q)}{2n-1} \frac{(p-n-q)!}{3^{\nu-q} (\nu-q)!\, m!}; \quad \left(\nu = \frac{p-n-m}{3}\right)$$

Последнее выражение представляет собой знакопеременную сумму. Элементарно показывается, что члены этой суммы монотонно убывают по абсолютной величине, т. е. сумма положительна. Отсюда вытекает, что при положительных значениях d, γ и a все коэффициенты разложения Δ по степеням k положительны, что и доказывает теорему, так как степенной ряд с положительными коэффициентами не может обращаться в нуль при положительном значении аргумента.

Замечание о предельном случае $R \to \infty$ (отсутствие вязкости). Уравнение вырождается до $\varphi'' - \alpha^2\varphi = 0$, т. е. не имеет решений, удовлетворяющих краевым условиям $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$. Это означает, что нестационарная задача об устойчивости не может быть сведена разделением переменных к задаче на собственные значения. Поэтому вместо уравнения Орра — Зоммерфельда приходится исследовать задачу с начальными данными для уравнения, содержащего в качестве одного из переменных время. Это уравнение таково

$$\left(-\frac{i}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} + kz\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2\right)\varphi(z, t) = 0$$

Краевые условия при этом

$$\varphi(-1, t) = \varphi(1, t) = 0$$

начальные условия

$$\varphi(z, 0) = \varphi_0(z)$$

Решение находим непосредственно

$$\varphi(z, t) = -\frac{\operatorname{sh}\alpha(z+1)}{\alpha \operatorname{sh} 2\alpha} \int_z^1 e^{-i\alpha k z_1 t} \operatorname{sh}\alpha(1 - z_1)(\varphi_0'' - \alpha^2\varphi_0)\, dz_1 -$$

$$- \frac{\operatorname{sh}\alpha(1-z)}{\alpha \operatorname{sh} 2\alpha} \int_{-1}^{z} e^{-i\alpha k z_1 t} \operatorname{sh}\alpha(z_1 + 1)(\varphi_0'' - \alpha^2\varphi_0)\, dz_1$$

Из этой формулы видна ограниченность решения при $t \to \infty$, т. е. устойчивость течения. Подробнее об устойчивости невязкой жидкости см. [6].

Поступила 19 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. ИЛ, 1958.
2. Riis E. The stability of Couette flow in non-stratified and stratified viscous fluids. Geofys. publ., Oslo, 1962, v. XXIII, 4.
3. Wasow W. On small disturbance of plane Couette flow. J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, v. 51, 195.
4. Gallagher A. P., Mercer A. Mc D. On the behavior of small disturbances in plane Couette flow. J. Fluid Mech., 1962, v. 13, 1.
5. Southwell R. V., Chitty L. On the problem of hydrodynamic stability I. Uniform shearing motion in a viscous fluid. Philos. Trans. A, 1930, v. 229, 205—253.
6. Дикий Л. А. Устойчивость плоскопараллельного течения идеальной жидкости, Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 5.

Технический редактор *Э. Ф. Бунова*

Москва, ул. Грибоедова, 4. Тел. К 4-17-63

Т-05518 Подписано к печати 26/III-1964 г. Формат бумаги $70\times108^1/_{16}$ Бум. л. $6^1/_4$
Печ. л. 17,5 Уч.-изд. л.17,2 Тираж 3050 экз. Зак. 96

2-я типография издательства «Наука» СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10