К ИССЛЕДОВАНИЮ ТЕЛ НАИМЕНЬШЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Г. Г. Черный (Москва)

В ПММ (1963, т. 27, вып. 1) была опубликована статья А. Л. Гонора «О форме пространственных тел наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях» [1].

В несколько расширенном виде вопрос, рассмотренный в этой статье, составил часть доклада на Конференции по экстремальным проблемам в аэродинамике в декабре 1962 г. в г. Сиэттле в США (G. G. Chernyi, A. L. Gonor. «Determination of minimum drag bodies using Newton and Busemann pressure laws», BSRL Paper, Dec. 1962).

В связи с этими работами, а также публикуемой в настоящем номере журнала статьей А. Л. Гонора * имела место дискуссия, в которой приняли участие А. Буземан, Б. М. Булах, Р. Джонс, А. Н. Крайко, Г. И. Майкапар, А. Мьеле, О. С. Рыжов, У. Хейз, выступившие при обсуждении упомянутого доклада или приславшие по просьбе редакции ПММ рецензии на статьи А. Л. Гонора.

Ниже по поручению редакции подводятся итоги этой дискуссии в связи с определенным общим интересом, который они представляют.

В указанных трех работах впервые поставлена и решена задача о трехмерном гиперзвуковом обтекании идеальным газом тел, имеющих наименьшее сопротивление.

При решении задачи давление на поверхности тела определяется приближенно — по формуле Ньютона. В соответствии с найденным решением оптимальные тела имеют «звездообразное» поперечное сечение; сопротивление этих тел существенно меньше сопротивления эквивалентного конуса и может быть сделано сколь угодно малым при увеличении числа лучей.

Формула Ньютона имеет эмпирический характер, причем из решения задач об обтекании тел вращения и профилей известно, что на поверхности таких тел с вогнутым контуром (гладким или имеющим точки излома, так что газ проходит сквозь систему скачков уплотнения), давление может значительно отличаться от определяемого по формуле Ньютона. Отметив это обстоятельство, А. Буземан, Р. Джонс и У. Хейз указали на то, что у найденных оптимальных тел контур поперечного сечения состоит из вогнутых участков, и, следовательно, нужно соблюдать осторожность при использовании полученных результатов; возможно, что оптимистический вывод о сильном уменьшении сопротивления связан главным образом с использованием эмпирической формулы Ньютона за пределами ее годности. В замечаниях А. Мьеле по докладу в г. Сиэттле и Г. И. Майкапара по первой статье А. Л. Гонора также было высказано сомнение в возможности использования формулы Ньютона в рассматриваемой задаче. При этом Г. И. Майкапар основывался на результатах своей работы [2], в которой им было получено точное решение задачи о сверхзвуковом обтекании класса тел пирамидальной формы с звездообразным поперечным сечением. Найденные Г. И. Майкапаром тела обладают заметно меньшим сопротивлением, чем эквивалентный круглый конус. Если определить сопротивление этих тел по формуле Ньютона и сравнить его с точным значением, то при достаточно большом числе лучей отношение точного значения к определенному по формуле Ньютона становится сколь угодно большим.

Однако само это различие не служит доказательством неприменимости формулы Ньютона в рассматриваемой задаче. А. Л. Гонор объяснил такое различие тем, что в решении Г. И. Майкапара при достаточно большом числе лучей плоские скачки уплотнения между ребрами пирамидального тела соответствуют одному из возможных решений, а именно тому, которое приводит к большему повышению давления в скачке (это решение А. Л. Гонор считал «физически некорректным»). Формула же Ньютона, как известно, может служить при больших значениях числа Маха аппроксимацией лишь второго из возможных решений, дающего меньшее повышение давления.

---

* См. стр. 383

В дальнейшем при рецензировании статьи А. Л. Гонора, помещенной в настоящем номере журнала, Г. И. Майкапар высказал мысль о том, что можно найти точное решение для обтекания пирамидальных тел сверхзвуковым потоком, используя плоские поверхности тока, возникающие при правильном пересечении двух плоских скачков уплотнения. А. Л. Гонор сообщил в редакцию, что ему удалось и фактически определить такие решения. Эти решения соответствуют более слабым скачкам уплотнения и удовлетворительно аппроксимируются формулой Ньютона. Рассчитанный А. Л. Гонором частный пример обтекания тела с числом лучей, равным двадцати, при $M=\infty$ и $\gamma = 1.4$ (γ — отношение теплоемкостей), показал, что точное значение сопротивления такого тела примерно в 160 раз меньше сопротивления эквивалентного круглого конуса; ошибка при использовании формулы Ньютона составляет 16.5%. (Отметим, что при сравнении следовало бы учесть сосредоточенные силы, действующие при ньютоновской схеме обтекания на пирамидальное тело вдоль его внутренних ребер).

Б. М. Булах, с мнением которого согласились Г. И. Майкапар и А. Л. Гонор, считает, что «оба решения — и Г. И. Майкапара и А. Л. Гонора — справедливы, но каждое при определенных условиях. Дело в том, что в задаче обтекания пирамидальных тел возможны два решения: первое решение характеризуется «сильным» скачком на ребре тела (оно получено Г. И. Майкапаром), второе — «слабым» скачком — оно при больших числах Маха близко к решению по теории Ньютона. Г. И. Майкапар сравнивал решение по теории Ньютона с точным решением с «сильным» скачком на ребре тела, поэтому он и получил, естественно, большое расхождение, из чего, однако, нельзя сделать вывод о неприменимости формулы Ньютона, так как для сравнения нужно было взять решение (точное) со слабым скачком. С другой стороны, решение Г. И. Майкапара для тела с большим числом лучей, по нашему мнению, является корректным. Действительно, в этом решении все уравнения газодинамики и граничные условия удовлетворены, поток после плоского скачка является сверхзвуковым, и, следовательно, обтекание пирамидального тела конечных размеров возможно. Тот факт, что в плоскости, перпендикулярной ребру тела, после скачка поток дозвуковой (т. е. нормальная к ребру составляющая скорости дозвуковая —*Г. Ч.*), не будет критерием ошибочности решения Г. И. Майкапара, так как плоский скачок между двумя ребрами тела можно рассматривать не как «пересечение» двух плоских скачков, идущих от ребер тела, а как результат распадения скачка, возбуждаемого всем телом (как это имеет место для кругового конуса), на отдельные участки при росте скорости тела. Таким образом, существуют два режима обтекания пирамидальных тел (теоретически)».

С этими доводами Б. М. Булаха в основном можно согласиться. Представляется вероятным, что при сверхзвуковом обтекании бесконечных конических тел произвольного сечения идеальным газом справедлива следующая альтернатива: либо нет решения, имеющего конический характер (т. е. такого, для которого параметры газа постоянны вдоль лучей, идущих из вершины конуса), либо таких решений два.

В зависимости от формы поперечного сечения тела, числа M и величины γ коническая головная волна в этих двух решениях может иметь либо только общую вершину с обтекаемым конусом, либо, кроме того, при наличии у тела острых ребер, может быть присоединенной к острым ребрам.

Построенные Г. И. Майкапаром и А. Л. Гонором точные решения позволяют предполагать, что для тел пирамидальной формы с достаточно большим числом лучей возможны два различных режима обтекания с присоединенными вдоль ребер волнами. В простейших случаях обтекания конических тел конечного размера — конусов, клиньев, треугольных крыльев с присоединенными вдоль кромок скачками известно, что всегда осуществляются режимы обтекания с более слабыми скачками уплотнения.

Таким образом, в настоящее время нет убедительных аргументов, исключающих использование формулы Ньютона при приближенном определении давления на поверхности пространственных тел, при обтекании которых возникают присоединенные скачки уплотнения. Конечно, представляется желательной оценка такой области изменения определяющих параметров задачи, в которой схема течения не слишком сильно отличается от схемы, принимаемой при использовании формулы Ньютона.

Отметим в заключение, что формулы (3) и (4) работы [1] были ранее использованы в работе [3]; в работе [1] не указано также, что уменьшение сопротивления тел звездообразного поперечного сечения по сравнению с сопротивлением эквивалентного конуса установлено в работах [2,3].

Поступила 18 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л. О форме пространственных тел наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1
2. Майкапар Г. И. О волновом сопротивлении неосесимметричных тел в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.
3. Майкапар Г. И. О форме сверхзвукового самолета. Тр. ЦАГИ, 1961, вып. 841.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

Л. А. Дикий

(Москва)

Задача об устойчивости плоскопараллельного потока вязкой несжимаемой жидкости сводится, как известно, к решению уравнения Орра — Зоммерфельда [1]. Это уравнение поддается исследованию с большим трудом. Ниже рассматривается самый простой пример, когда скорость потока линейно зависит от поперечной координаты, т. е. случай плоскопараллельного течения Куэтта. Математически вопрос сводится к определению знака мнимой части собственных значений c краевой задачи

$$\begin{gathered}(kz - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) = \frac{1}{i\alpha R}(\varphi^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi)\\ \varphi(-1) = \varphi'(-1) = \varphi(1) = \varphi'(1) = 0\end{gathered} \tag{1}$$

где k, α, R — некоторые вещественные положительные параметры. Число параметров можно, на самом деле, уменьшить, положив $c_1 = c / k$, $R_1 = Rk$, но удобнее писать уравнение в форме (1). Параметры имеют следующий физический смысл: α — длина волны, c — фазовая скорость, R_1 — число Рейнольдса. Если мнимые части всех собственных значений c окажутся отрицательными, то течение устойчиво.

Имеется большое число работ, в которых делается попытка доказать устойчивость течения при всех значениях параметров α и R_1. Однако доказать это строго никому не удалось. Обычная схема исследования — рассмотрение асимптотических предельных случаев, например больших значений числа Рейнольдса и т. п. Для остальных же значений параметров производится прямой численный расчет собственных значений. Несмотря на высокую технику асимптотических оценок, достигнутую в настоящее время, см., например, работу [2], такой путь принципиально не может привести к полному и окончательному решению задачи, так как невозможно провести численный расчет для бесконечной области параметров, для которой асимптотики не пригодны. (Относительно асимптотических исследований и численных расчетов см. также статьи [3,4]). Из сказанного следует, что построение строгого и логически замкнутого доказательства устойчивости плоского течения Куэтта остается по-прежнему весьма желательным.

Ниже доказывается более ограниченное предложение, а именно то, что все чисто мнимые собственные числа c лежат в нижней полуплоскости. (При малых значениях числа Рейнольдса все собственные значения чисто мнимые. С ростом R_1 они по очереди сходят с мнимой оси, сначала сливаясь попарно, а затем превращаясь в пары точек, расположенных симметрично относительно мнимой оси). Заметим, что в работах [5,4] устойчивость чисто мнимых собственных значений также устанавливалась путем комбинации асимптотических рассмотрений и численных расчетов.