

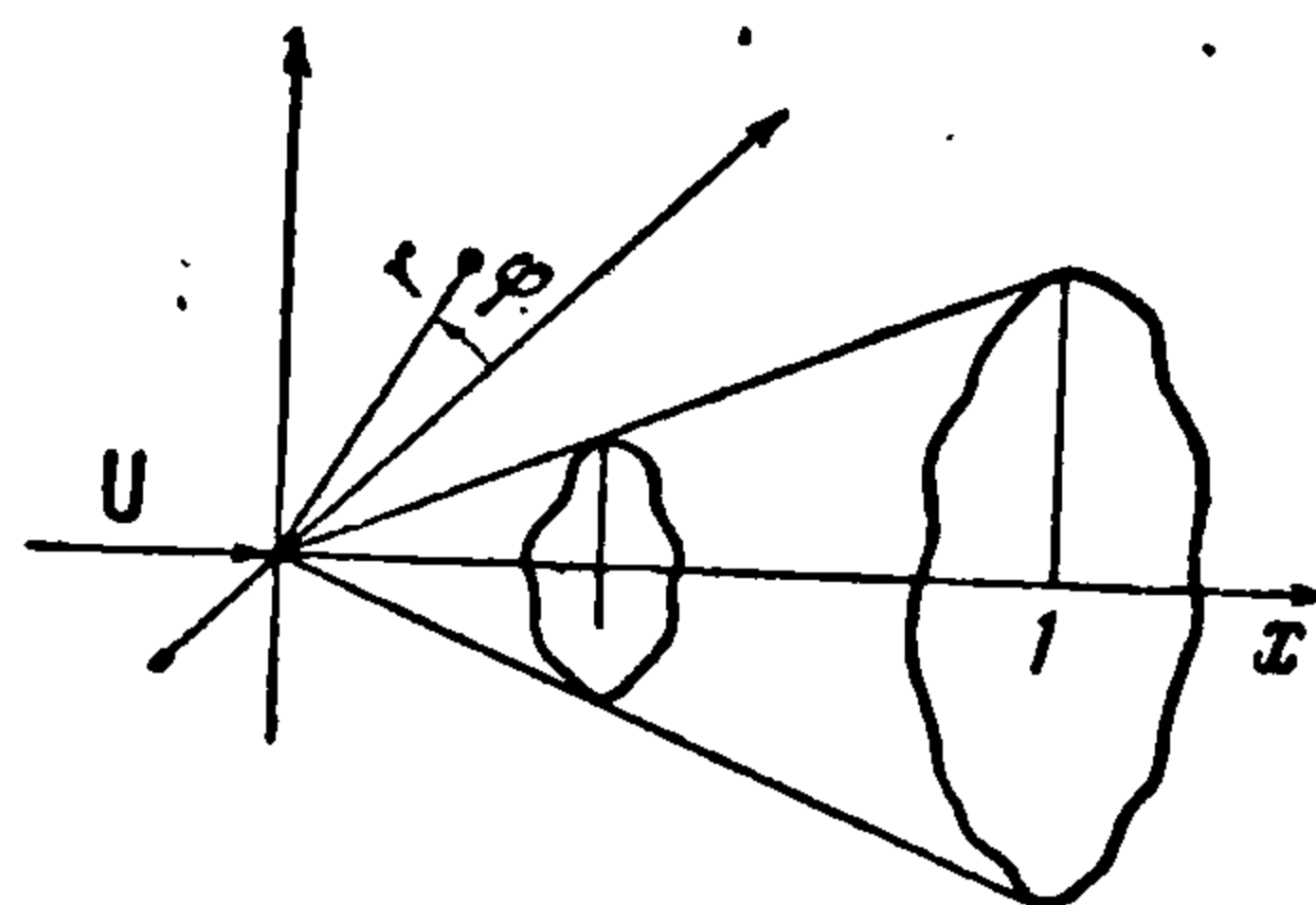
КОНИЧЕСКИЕ ТЕЛА НАИМЕНЬШЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

А. Л. Гонор (Москва)

В работе [1] в рамках ньютоновского обтекания найдена оптимальная форма пространственного тонкого тела. Ограничение на толщину тела диктовалось в основном необходимостью свести задачу к решению обыкновенного дифференциального уравнения, так как иначе экстремали определяются сложным нелинейным уравнением с частными производными второго порядка. В некоторых случаях, однако, сохраняя выражение для сопротивления, полученное в [1], и сужая класс допустимых поверхностей, можно найти без значительного усложнения решения оптимальную форму пространственного толстого тела. Например, в классе произвольных конических поверхностей ($f(x) = x, 0 \leq x \leq 1$, фиг. 1) поперечное сечение тела наименьшего сопротивления будет определяться из условия минимума функционала

$$C_x = \frac{1}{S} \int_0^{2\pi} \frac{r^4(\varphi) d\varphi}{1 + r^2(\varphi) + r'^2(\varphi) / r^2(\varphi)}$$

$$\left(S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi \right) \quad (0.1)$$



Фиг. 1

Здесь коэффициент сопротивления C_x отнесен к площади миделя S . Следует отметить, что формулу для сопротивления тела, аналогичную (0.1), применял в своих исследованиях Г. И. Майкапар.

Ниже ограничимся рассмотрением только конических тел.

1°. Соответствующую вариационную задачу сформулируем следующим образом. В классе гладких линий, допускающих конечное число точек разрыва первой производной, определить замкнутую кривую, на которой функционал (0.1) достигает минимума. В качестве дополнительных условий будем считать заданной площадь миделя S и характерный поперечный размер r_0 . (Все величины отнесены к длине тела, принятой равной единице.) Подобная вариационная задача, как известно, сводится к решению уравнения Эйлера для функции $F = \lambda r^2 + r^4 (1 + r^2 + r'^2 r^{-2})^{-1}$. Кроме этого, вдоль экстремали должно выполняться необходимое условие Лежандра $F_{r'r'} \geq 0$, а в точках разрыва производной — условия Вейерштрасса — Эрдманна вида

$$\alpha_{\varphi-} = \alpha_{\varphi+}, \quad \alpha = \frac{1 + r^2 + 3r'^2 r^{-2}}{(1 + r^2 + r'^2 r^{-2})^2}, \quad \beta_{\varphi-} = \beta_{\varphi+}, \quad \beta = \frac{r' r^{-1}}{(1 + r^2 + r'^2 r^{-2})^2} \quad (1.1)$$

Функция F не содержит независимого переменного, поэтому соответствующее уравнение Эйлера допускает интеграл

$$\frac{r^4}{(1 + r^2 + r'^2 r^{-2})} + \frac{2r^2 r'^2}{(1 + r^2 + r'^2 r^{-2})^2} + \lambda r^2 = C \quad (1.2)$$

Из выражения (1.2), в частности, следует, что $C - \lambda r^2 \geq 0$. Введем новые переменные p и z . Уравнение (3) в этих переменных записывается следующим образом:

$$p^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8z^2}}{2z^2} - 1, \quad p^2 = \frac{r'^2}{r^2 (1 + r^2)}, \quad z^2 = \frac{(C - \lambda r^2) (1 + r^2)}{r^4} \quad (1.3)$$

Проведем исследование знака перед корнем. Из условия, что подкоренное выражение неотрицательное, получаем, что $z^2 \leq 9/8$, отсюда при отрицательном знаке перед корнем $p^2 \leq 1/3$. С другой стороны, согласно условию Лежандра, нижняя граница величины p^2 равна $1/3$. Следовательно, перед корнем может быть только знак плюс и при уменьшении z^2 от $9/8$ до 0, p^2 растет от $1/3$ до ∞ .

Отметим одно существенное для дальнейшего обстоятельство. Из условий на разрывах (1.1), которые целиком можно выразить через переменную p , следует, что перейти с одной интегральной кривой на другую можно либо при $p_{\varphi\pm} = \pm \infty$, либо в точках фиксированного радиуса $r = r_0$. Это означает, что для построения замкнутой экстре-

мали из интегральных кривых разных семейств необходимо, чтобы переменная z достигала нулевого значения. Тогда из (1.3), если $\lambda > 0$, будем иметь $r^2 \leq C/\lambda$, $C > 0$ и решение, соответствующее этим неравенствам, может быть построено, если за характерный размер r_0 принять минимальное значение радиуса.

Если предположить, что $\lambda < 0$, соответственно получаем $r^2 \geq C/\lambda$ и $C < 0$. Этому случаю соответствует задача, в которой за характерный размер принят максимальный радиус. Исследование обеих задач вполне аналогично, поэтому в дальнейшем рассматривается только первый случай. Проинтегрируем уравнение (1.3) в пределах от r_0 до r . Тогда, полагая $r^2 = r_0^2 t$, получим

$$\varphi \mp C_1 = \pm \frac{1}{2} \int_1^t \frac{q(z) dt}{t \sqrt{1 \mp r_0^2 t}} \quad (1 \leq t \leq t_0), \quad t_0 = \frac{C}{\lambda r_0^2} \quad (1.4)$$

$$q(z) = z \sqrt{2} (3 - 2z^2 \mp \sqrt{9 - 8z^2})^{-1/2}, \quad z^2 = \lambda(t_0 - t) (t \mp 1 / r_0^2) t^{-2}$$

Выведем соотношения для определения постоянных t_0 и λ . Из условия замкнутости экстремали и изопериметрического условия имеем

$$\int_0^{t_0} \frac{q(z) dt}{t \sqrt{1 \mp r_0^2 t}} = \frac{2\pi}{n}, \quad \int_0^{t_0} \frac{q(z) dt}{\sqrt{1 \mp r_0^2 t}} = \frac{2\pi s}{n}, \quad s = \frac{S}{\pi r_0^2} \quad (1.5)$$

Здесь n — число двойных участков, из которых составляется экстремаль. Формулы (1.5), начиная с некоторого числа n , для каждого заданного значения этой величины дают возможность определить постоянные C и λ . В результате получается счетное множество экстремалей, удовлетворяющих всем условиям вариационной задачи. Форма сечения целиком определяется параметрами r_0 и s . Вычислим теперь сопротивление полученного оптимального тела. Согласно соотношению (0.1) коэффициент сопротивления можно представить в форме

$$C_x = \frac{2 \sqrt{2} n r_0 \lambda^{3/2}}{S} \int_0^{t_0} \frac{(t_0 - t)^{3/2} dt}{t^2 (3 \mp \sqrt{9 - 8z^2}) (3 - 2z^2 \mp \sqrt{9 - 8z^2})^{1/2}} \quad (1.6)$$

2°. Полученные соотношения сложны для расчетов, поэтому ниже выводятся простые приближенные формулы для решения задачи. Рассмотрим класс оптимальных тел, для которых параметр $\lambda(t_0 - 1) (1 \mp r_0^{-2}) \ll 1$. Тогда, согласно (1.4), будем иметь, что $z^2 \ll 1$. Отбрасывая теперь в выражении $q(z)$ члены порядка $O(z^3)$, получим из (1.4) уравнение участка поперечного контура в следующем виде

$$\varphi = \pm \frac{\lambda^*}{n} \left[\sqrt{t_0 - 1} - \frac{\sqrt{t_0 - t}}{t} + \frac{1}{\sqrt{t_0}} \ln \frac{(\sqrt{t_0} - \sqrt{t_0 - 1})(\sqrt{t_0} \mp \sqrt{t_0 - t})}{\sqrt{t}} \right] \mp C_1 \quad (2.1)$$

$$\lambda^* = \frac{n}{2r_0} \left(\frac{\lambda}{3} \right)^{1/2}$$

Используя (1.5), найдем, что постоянные t_0 и λ^* определяются из соотношений

$$\lambda^* \left[\sqrt{t_0 - 1} - \frac{1}{\sqrt{t_0}} \ln (\sqrt{t_0} \mp \sqrt{t_0 - 1}) \right] = \pi \quad (2.2)$$

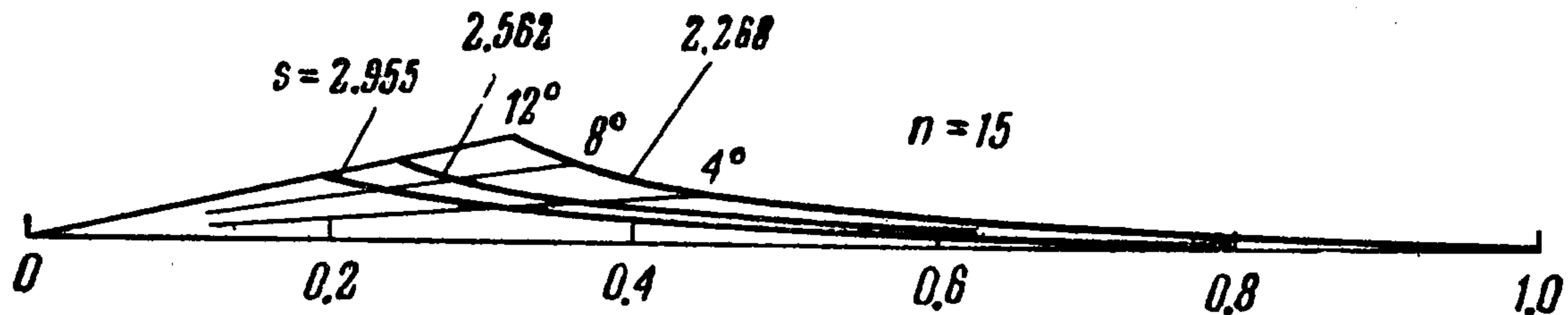
$$\lambda^* [\sqrt{t_0} \ln (\sqrt{t_0} \mp \sqrt{t_0 - 1}) - \sqrt{t_0 - 1}] = 1/2 \pi s$$

Согласно последним равенствам, постоянные t_0 и λ^* зависят только от параметра s . Коэффициент сопротивления (1.6) представляется в этом случае выражением

$$C_x = \frac{8\lambda^{*3} r_0^4}{S n^2} [(t_0 - 1)^{3/2} \mp 3(t_0 - 1)^{1/2} - 3\sqrt{t_0} \ln (\sqrt{t_0} \mp \sqrt{t_0 - 1})] \quad (2.3)$$

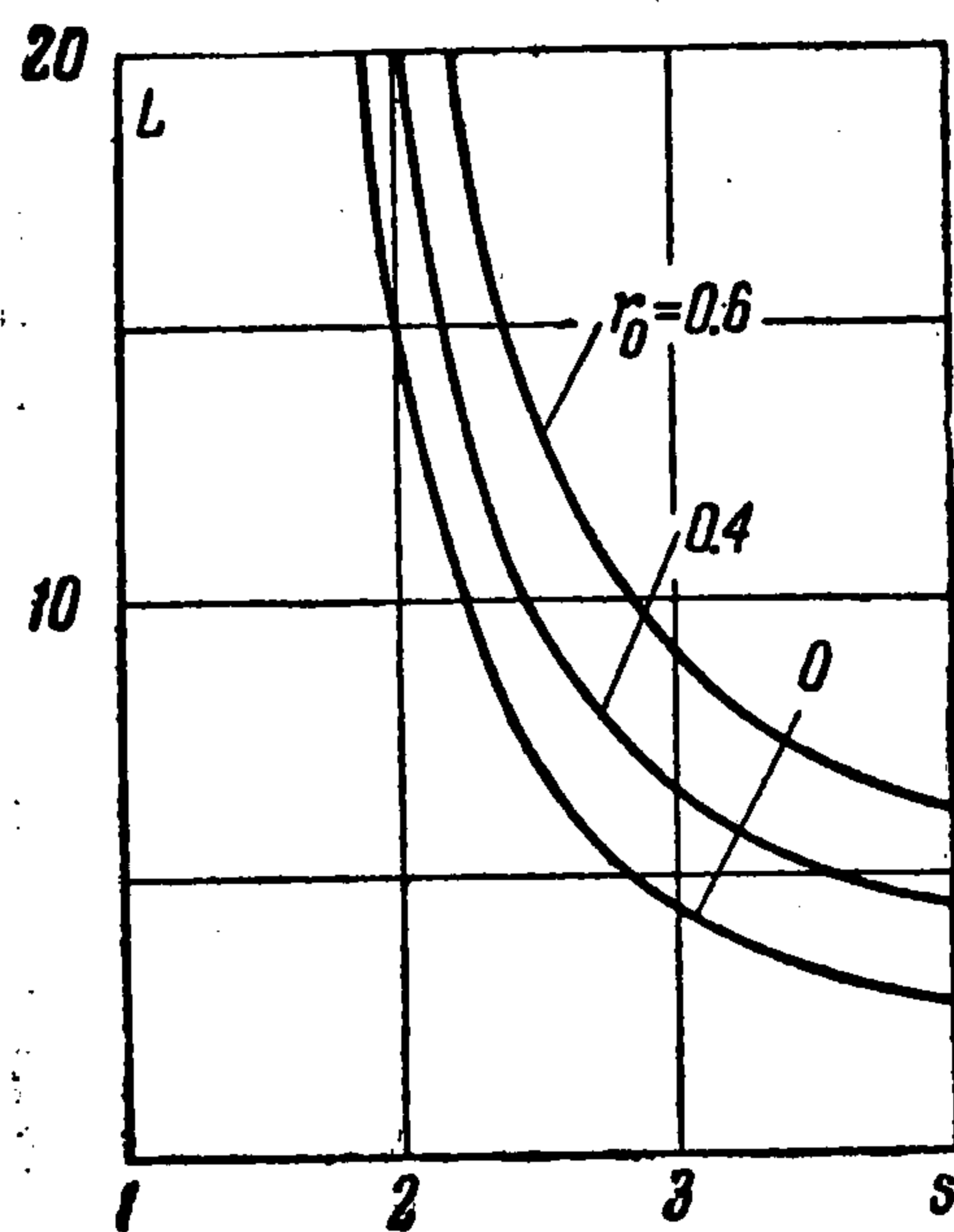
Эти асимптотические формулы свободны от ограничения на толщину тела. Причем, как видно из последних соотношений, при любой толщине тела форма поперечного сечения не зависит от r_0 . Для тонких тел аналогичный факт имеет место всегда [1]. Следовательно, хотя в выражении (1.4) и присутствует величина r_0 , можно ожидать, что и в общем случае зависимость формы от этого параметра будет слабой. Однако эта

аппроксимация заметно занижает функцию $q(z)$, в связи с чем приближенные формулы годятся только при больших значениях n и не могут быть использованы для оценки



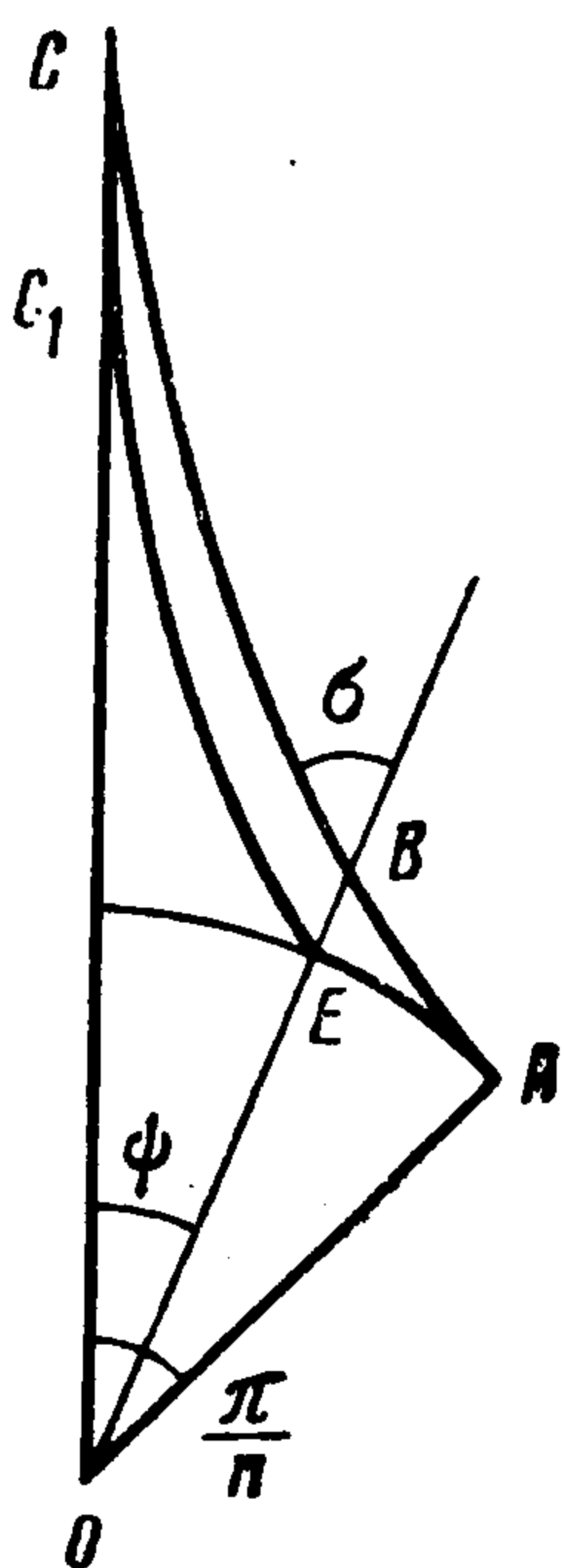
Фиг. 2

наименьшего возможного значения этого числа. На фиг. 2 показаны участки контура, из которых составляется поперечное сечение тела звездообразной формы. Расчет проведен по формуле (2.1) для числа лучей $n = 15$ при нескольких значениях параметра s . Сравнение с результатами, полученными по формулам тонкого тела [1], показывает, что для больших значений параметра s контуры совпадают. Следовательно, выгрыш в сопротивлении будет такого же порядка, как и в случае тонкого тела. Действительно, рассмотрим величину относительного сопротивления $L = n^2 C_x / C_x^0$ (C_x^0 — коэффициент сопротивления эквивалентного круглого конуса), зависящую от параметра s и параметра толщины r_0 . Расчет значений L как функции s при разных значениях r_0 , проведенный по формуле (2.3), показан на фиг. 3. Из расположения кривых видно, что с увеличением толщины тела относительное сопротивление увеличивается, в остальном же поведение сопротивления аналогично случаю тонкого тела и при $n = 15$ меньше сопротивления эквивалентного круглого конуса примерно в двадцать раз. На фиг. 3 соответствующие значения сопротивления, подсчитанные по формулам тонкого



Фиг. 3

тела (в формуле (17) работы [1] пропущен множитель 0.25), совпадают с кривой сопротивления толстого конуса при $r_0 = 0$.



Фиг. 4

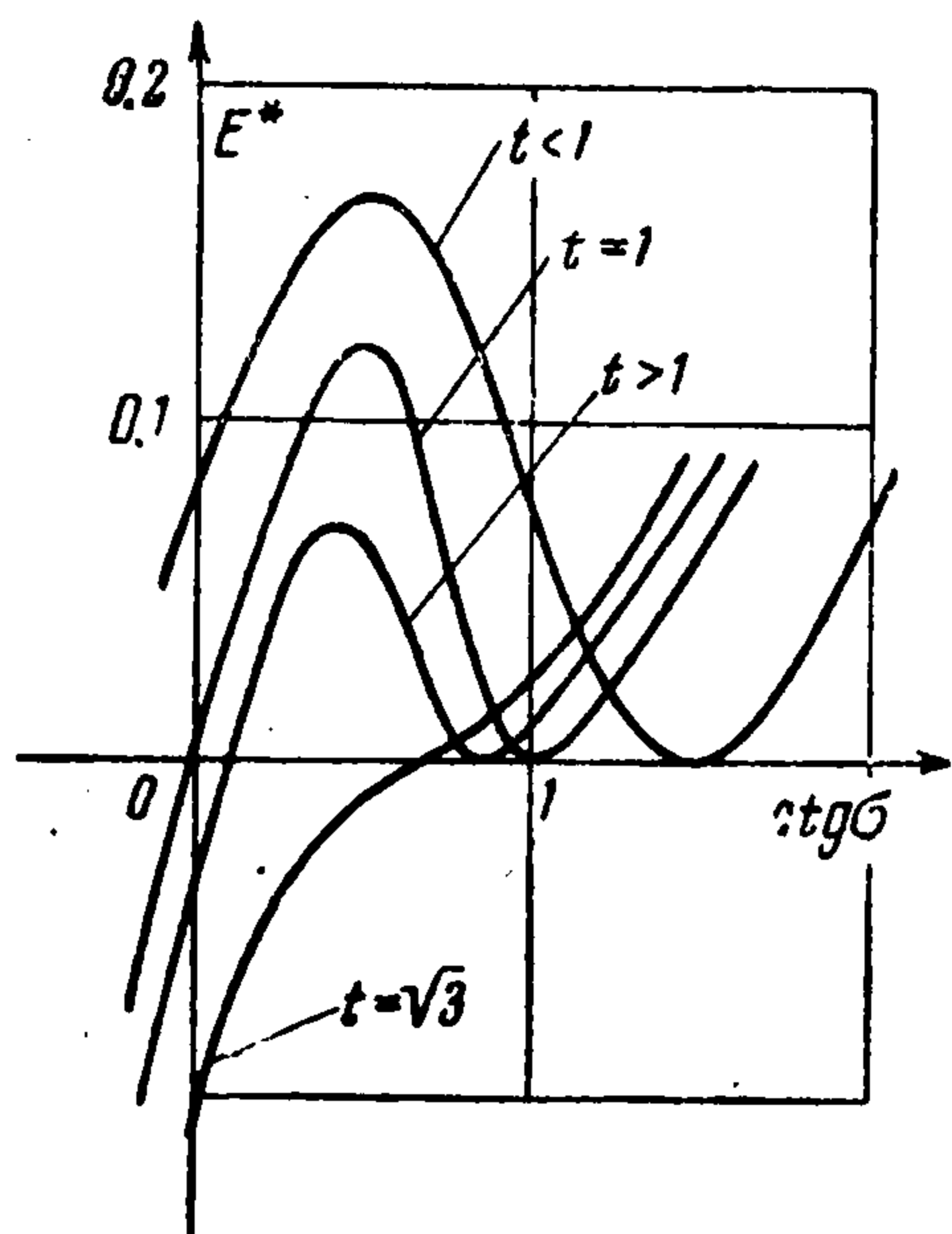
Результаты, полученные выше, основаны на использовании для определения давления формулы Ньютона. В случае обтекания тел простой формы (тела вращения, конус под углом атаки и т. д.) формула Ньютона, как показывает сравнение с экспериментом, дает хорошее приближение, начиная уже с чисел Маха от пяти и выше. Для тел более сложной конфигурации в настоящее время надежных экспериментальных результатов, позволяющих судить о применимости формулы Ньютона, в литературе не имеется. Поэтому для оценки ошибки полезно иметь в виду следующее положение. При гиперзвуковом обтекании заостренного тела ($M \rightarrow \infty$) возникает присоединенная ударная волна, которая отличается от поверхности тела на угол порядка $O(\epsilon)$ ($\epsilon = (\kappa - 1)(\kappa + 1)^{-1}$, κ — отношение удельных теплоемкостей). Величина этого угла и определяет для слабо искривленных поверхностей поправку к формуле Ньютона.

В данном случае поверхность оптимального тела получилась вогнутой (если положить $r_0 = r_{\max}$, то поверхность будет выпуклой). Однако, согласно фиг. 2, кривизна поперечного контура, исключая область малых значений радиуса в окрестности впадины, мала. Поэтому давление, по формуле Ньютона, на большей части поверхности тела будет близко к истинному. Что касается области в окрестности ребра, то здесь в действительности может быть заметное отклонение в сторону повышения давления. Это означает, что предсказанное уменьшение волнового

сопротивления в двадцать раз заведомо завышено. Ясно также, что при очень большом количестве лучей n пограничный слой целиком заполнит просветы между лучами, и схема ньютоновского обтекания осуществляться не будет.

3°. Решение вариационной задачи, полученное для тонкого тела, а также для случая, рассмотренного выше, дает возможность построить оптимальный поперечный контур только при значениях параметра s , заключенных в определенных пределах.

В частности, для не очень большого фиксированного числа n решение не существует, когда параметр s близок к единице. Тем не менее представляет интерес найти форму поперечного контура тела минимального сопротивления при фиксированном



Фиг. 5

числе лучей n , когда $s \rightarrow 1$. Для этого рассмотрим гладкие допустимые линии с конечным числом разрывов производной, у которых угол σ между полярным радиусом и касательной удовлетворяет неравенствам $0 \leq \sigma \leq \pi/2$. Последние необходимы, чтобы исключить волнообразные допустимые кривые, близкие к экстремалам с большим, чем заданное, числом n . Пусть теперь экстремаль ABC (фиг. 4) соответствует минимальному значению параметра s , так что для меньших значений этого параметра двустороннего экстремума не имеется. Тогда наименьшее значение сопротивления может достигаться на границе при значениях $\sigma = 0$ или $\sigma = \pi/2$. Первую возможность $\sigma = 0$ реализовать нельзя, поэтому рассмотрим случай $\sigma = \pi/2$, который соответствует оптимальному контуру, состоящему из дуги окружности AE и экстремали EC_1 . Воспользовавшись общей формой первой вариации, нетрудно

установить, что для тонкого тела в точке E угол $\sigma_E = \pi/4$. Параметры контура и положение точки E (угол ψ) определяются при помощи формул работы [1].

Осталось теперь выяснить, как быть в том случае, когда параметр s уменьшился до такого значения, что экстремаль в точке A имеет угол $\sigma = \pi/4$, и, кроме того, существуют экстремали типа ABC , соответствующие еще меньшим значениям этого параметра, т. е. существует диапазон значений параметра s , для которых можно построить два оптимальных контура: один — типа ABC , другой — типа AEC_1 . В зависимости от вида функционала любой из контуров может соответствовать наименьшему сопротивлению. Исследование проведем следующим образом. Рассмотрим необходимый признак Вейерштрасса, по которому вдоль экстремали $E(\varphi, r, r', R) \geq 0$ при всевозможных допустимых элементах (φ, r, R') . После несложных выкладок это условие можно представить в виде

$$E^* = \frac{E(1+t^2)}{r^4 t^4 \sin^2 \sigma} = \left(\operatorname{ctg}^3 \sigma - \frac{3+t^2}{2t} \operatorname{ctg}^2 \sigma + \operatorname{ctg} \sigma + \frac{1-t^2}{2t^3} \right) \geq 0 \quad \left(t = \frac{r}{r'} \right)$$

Знак функции E определяется знаком выражения, стоящего в круглых скобках. Результаты качественного исследования, представленные на фиг. 5, показывают, что если вдоль экстремали везде $0 \leq t \leq 1$, то $E^* \geq 0$ для любых положительных углов σ . Если же экстремаль содержит кусок, вдоль которого $1 \leq t \leq \sqrt{3}$, то на такой экстремали минимума не достигается. Отсюда приходим к выводу, что для значений параметра $t_0 > 1$ надо переходить к краевому экстремуму. Сопротивление оптимального тела по мере стремления параметра s к единице будет резко расти до значения, соответствующего сопротивлению круглого конуса. Исследование на краевой экстремум конического тела не вызывает трудностей, несколько будет отличаться угол σ_E , определяемый формулой $\sigma_E = \operatorname{arctg} \sqrt{1 + r_0^2}$.

Поступила 12 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л. О форме пространственных тел наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.