ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛИНИЙ ТОКА ПО ИЗВЕСТНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ДАВЛЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Г. И. Майкапар (Москва)

Рассматривается вычисление линий тока невязкого газа по заданному на поверхности твердого тела распределению давления. Задача сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.

В связи с трудностями расчета трехмерных течений газа и необходимостью в качестве исходных данных наличия составляющих скорости (или линий тока) на внешней границе для расчета пограничного слоя, представляет интерес задача вычисления линий тока по известному на поверхности твердого тела распределению давления, полученному, например, из эксперимента [1]. В соответствии с допущениями теории пограничного слоя будем считать газ невязким, границу слоя совпадающей с поверхностью тела, а течение изоэнергетическим. Воспользуемся такой криволинейной ортогональной системой координат, что координатные линии q_1, q_2 расположены на поверхности тела. Для решения поставленной задачи можно воспользоваться одним из двух уравнений Эйлера (проекции ускорения на поверхности тела)

$$\frac{v_1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+\frac{v_2}{H_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2}+\frac{v_2}{H_1H_2}\left(v_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-v_2\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)=-\frac{1}{\rho H_1}\frac{\partial p}{\partial q_1} \qquad (1)$$

$$\frac{v_1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1}+\frac{v_2}{H_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_2}-\frac{v_1}{H_1H_2}\left(v_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-v_2\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)=-\frac{1}{\rho H_2}\frac{\partial p}{\partial q_2} \qquad (2)$$

например, первым и формулами для определения давления и плотности, вытекающими из второго уравнения Эйлера и уравнения сохранения энергии (3)

$$p=p_0\left(1-\frac{w^2}{w_m^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},\qquad \rho=\rho_0\left(1-\frac{w^2}{w_m^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\qquad\left(w^2=v_1^2+v_2^2,\ w_m^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\right)$$

Здесь v_1, v_2 — проекции скорости, H_1, H_2 — коэффициенты Ляме, p_0, ρ_0 — постоянные вдоль линий тока, γ — отношение теплоемкостей.

Третьим уравнением Эйлера и уравнением неразрывности воспользоваться не можем, так как в них входят неизвестные производные по нормали к поверхности тела.

Пусть θ — угол, образуемый скоростью w с касательной к линии q_1; подставим

$$v_1=w\cos\theta,\qquad v_2=w\sin\theta$$

в уравнения (1) и воспользуемся выражениями (3), (4), получим

$$\frac{\cos\theta}{H_1}\frac{\partial\theta}{\partial q_1}+\frac{\sin\theta}{H_2}\frac{\partial\theta}{\partial q_2}= \qquad (5)$$

$$=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{w_m^2-w^2}{w^2}\frac{1}{H_1\sin\theta}\frac{\partial\ln p_0}{\partial q_1}-\frac{\sin\theta}{H_1}\frac{\partial\ln(H_2w)}{\partial q_1}+\frac{\cos\theta}{H_2}\frac{\partial\ln(H_1w)}{\partial q_2}$$

Это же уравнение получается и из (2), если учесть условие сохранения полного давления вдоль линий тока

$$\frac{\cos\theta}{H_1}\frac{\partial p_0}{\partial q_1}+\frac{\sin\theta}{H_2}\frac{\partial p_0}{\partial q_2}=0$$

Уравнение (5) будет дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка для угла θ, причем правая часть

$$R=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{(p/p_0)^{\varkappa}}{1-(p/p_0)^{\varkappa}}\left(\frac{\sin\theta}{H_1}\frac{\partial\ln p}{\partial q_1}-\frac{\cos\theta}{H_2}\frac{\partial\ln p}{\partial q_2}\right)-$$

$$-\frac{\sin\theta}{H_1}\frac{\partial\ln H_2}{\partial q_1}+\frac{\cos\theta}{H_2}\frac{\partial\ln H_1}{\partial q_2}\qquad\left(\varkappa=\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)$$

зависит от координат q_1, q_2 и искомого угла θ.

---

[1] Геометрический способ построения линий тока по известному давлению рассмотрен в работе Вальо — Лорена [1].

Уравнение (5) сводится к системе обыкновенных

$$\frac{H_1\,dq_1}{\cos\theta}=\frac{H_2\,dq_2}{\sin\theta}=\frac{d\theta}{R} \tag{6}$$

характеристическими будут линии тока. Для интегрирования системы (6) необходимо знать величину полного давления на поверхности тела p_0 и угол θ на какой-либо линии, не являющейся характеристической (задача Коши).

Наиболее просто задача решается для заостренного тела и присоединенной головной волны уплотнения, так как в этом случае можно считать p_0 и θ известными на замкнутой линии на поверхности тела, расположенной вблизи острия, не являющейся характеристической. В случае притупленного тела величина p_0 постоянна на его поверхности и легко определяется, если течение имеет две плоскости симметрии или же, если в случае сферической носовой части область дозвукового течения ограничена сферической частью поверхности. В последнем случае угол θ также известен на линии, отличной от характеристической. Если же угол θ известен только на одной линии тока, т. е. на характеристической, а это имеет место, например, в случае течения с одной плоскостью симметрии, то этого недостаточно для решения задачи [2].

Для получения недостающих начальных данных можно воспользоваться либо второй линией тока, на которой известен угол θ (течение с двумя плоскостями симметрии), либо попытаться получить дополнительные данные на первой характеристической линии. Рассмотрим координатную линию q_1, расположенную в плоскости симметрии течения, представляющую собой одновременно линию тока. Дифференцируя (2) по q_2 и имея в виду, что на этой линии тока

$$v_2=\frac{\partial v_1}{\partial q_2}=\frac{\partial p}{\partial q_2}=\frac{\partial\rho}{\partial q_2}=\frac{\partial H_1}{\partial q_2}=0$$

получим

$$\frac{H_2 w}{H_1}\frac{\partial^2 v_2}{\partial q_1\partial q_2}+\left(\frac{\partial v_2}{\partial q_2}\right)^2+\frac{w}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_2}-\frac{w^2}{H_1}\frac{\partial^2 H_1}{\partial q_2{}^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial q_2{}^2}=0 \tag{7}$$

или, так как на этой линии $\partial\theta\,/\,\partial q_2=1\,/\,w\partial v_2\,/\,\partial q_2$, то

$$\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial q_2}\right)+\left(\frac{\partial\theta}{\partial q_2}\right)^2+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial\ln(H_2 w)}{\partial q_1}\frac{\partial\theta}{\partial q_2}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 H_1}{\partial q_2{}^2}+\frac{1}{\rho w^2}\frac{\partial^2 p}{\partial q_2{}^2}=0 \tag{8}$$

Интегрируя уравнение (8), можно найти величину $\partial\theta\,/\,\partial q_2$, необходимую для решения системы (6), в случае задания угла θ на характеристической линии. В критической точке ($w=0$)

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial q_1}\right)^2=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial q_1{}^2},\qquad \left(\frac{\partial v_2}{\partial q_2}\right)^2=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial q_2{}^2} \tag{9}$$

Наиболее простой вид уравнения (5), (8) имеют в случае плоской твердой поверхности ($H_1=H_2=1,\ q_1=x,\ q_2=y$)

$$\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{(p\,/\,p_0)^\varkappa}{1-(p\,/\,p_0)^\varkappa}\left(\sin\theta\frac{\partial\ln p}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial\ln p}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial\ln w}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)+\frac{1}{\rho w^2}\frac{\partial^2 p}{\partial y_2}=0$$

Интегралы системы (6) дают зависимость угла θ от координат q_1, q_2 и линии тока на поверхности тела. Из уравнения (5) можно получить нелинейное уравнение второго порядка для определения линий тока [3].

Поступила 20 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Vaglio-Laurin R. Laminar heat transfer on three — dimensional blunt nosed bodies in hypersonic flow. ARS Journal, 1959, v. 29, No 2.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. ГОНТИ, 1939.
3. Майкапар Г. И. Учет влияния центробежных сил на давление воздуха на поверхность тела произвольной формы, обтекаемого потоком с большой сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 1.