ПРИВЕДЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ К ПРОСТЕЙШЕЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ

Г. Н. Мильштейн

(Свердловск)

1. Постановка задачи. Рассматривается задача о минимизации функционала (см., например, [1])

$$J = \int_0^{t_1} f_0(x)\,dt \qquad (1.1)$$

Здесь $x = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — n-мерный вектор, изменение которого во времени подчиняется системе дифференциальных уравнений, записанной в векторной форме

$$dx \,/\, dt = f(x, u) \qquad (1.2)$$

Здесь управление u есть r-мерный вектор, значения которого в каждый момент времени принадлежат некоторому множеству U из r-мерного эвклидового пространства. Множество U задается при помощи неравенства $\rho(u_1, \ldots, u_r) \leqslant m$, где $\rho(u_1, \ldots, u_r)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Функцию $f_0(x)$ в (1.1) будем считать для определенности всюду положительной за исключением точки $x = 0$.

Управление $u(t)$ требуется подобрать таким образом, чтобы траектория системы (1.2), выходя в начальный момент времени из точки x_0, проходила в некоторый момент времени $t_1 > 0$ через заданную точку x_1 и чтобы при этом функционал (1.1) достигал минимального значения по всем таким управлениям u.

Схема большинства задач оптимального регулирования построена так, что вторая точка обычно фиксируется, в то время как первая занимает произвольное положение. В дальнейшем первая точка (для определенности начало координат) фиксируется, а вторая выбирается произвольно. Для того чтобы привести обычно рассматриваемую задачу к поставленной выше, не меняя при этом хода времени, достаточно заменить систему (1.2) и функционал (1.1) соответственно на

$$dx \,/\, dt = -f(x, u)\,, \qquad J = \int_{-t_1}^{0} f_0(x)\,dt \qquad (1.3)$$

При этом управление $u(t)$ и траектория $x(t)$ задачи (1.1) — (1.2) соответствуют управлению $u(-t)$ и траектории $x(-t)$ задачи (1.3) и наоборот. Уравнение Беллмана [2] для задачи (1.1) — (1.2) имеет вид

$$\min\nolimits_u (p, f(x, u)) + f_0(x) = 0, \qquad (u \subset U,\ p = \partial J \,/\, \partial x) \qquad (1.4)$$

Для задачи (1.3) его можно представить в следующем виде

$$\max\nolimits_u (p, -f(x, u)) - f_0(x) = 0 \qquad (u \subset U) \qquad (1.5)$$

В (1.4) и (1.5) функция $J(x_1, \ldots, x_n)$ есть функция Беллмана оптимальной задачи, равная

$$J(x_1, \ldots, x_n) = \min\nolimits_u \int_0^{t_1} f_0(x)\,dt \qquad (1.6)$$

Вектор $p = \partial J \,/\, \partial x$ имеет координатами $p_1 = \partial J \,/\, \partial x_1 \ldots, p_n = \partial J \,/\, \partial x_n$, а выражение $(p, -f(x, u))$ есть скалярное произведение векторов p и $-f(x,u)$.

Пусть рассматриваемая задача такова, что уравнение (1.5) после исключения управления u из условия максимизации приводится к виду

$$L(x, p) = H(x, p) - f_0(x) = -(p, f(x, u(x, p))) - f_0(x) = 0 \qquad (1.7)$$

и функции $u(x, p)$ и $H(x, p)$ при этом достаточно гладкие функции в некоторой области S изменения своих переменных x и p. Уравнение (1.7) в дальнейшем будем называть, так же как и уравнение (1.5), уравнением Беллмана. Нетрудно обнаружить, что функция $H(x, p)$ должна быть положительно однородной первой степени относительно переменных p. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial (p, f(x, u(x, p)))}{\partial p_i} = -\sum_{i=1}^{n} p_i f_i (x, u(x, p)) -$$

$$-\sum_{i=1}^{r} p_i \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial (p, f(x, u(x, p)))}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial p_i} \qquad (1.8)$$

Но сумма

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial (p, f(x, u(x, p)))}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial p_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

в силу максимизации (1.5) обращается всегда в нуль, и (1.8) превращается в известную формулу Эйлера. Для уравнения (1.7) в частных производных первого порядка составим характеристическую систему уравнений [3]. Она будет иметь следующий вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial p_i} = -f_i(x, u(x, p)) \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial f_k(x, u(x, p))}{\partial x_i} + \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \qquad (1.9)$$

Условие (1.5) и система уравнений (1.9) могут быть получены из принципа максимума также методом Понтрягина [1].

Будем рассматривать функции $F(x, x^{\cdot})$, обладающие следующими свойствами [4]: а) область определения функции $F(x, x^{\cdot})$ есть такая область R $2n$-мерного пространства переменных $x, x^{\cdot}$, которая вместе с точкой $(x, x^{\cdot})$ содержит каждую точку вида $(x, \sigma x^{\cdot})$, где $\sigma > 0$; б) функция $F(x, x^{\cdot})$ является достаточно гладкой; в) функция $F(x, x^{\cdot})$ должна быть положительно однородной первой степени по переменным $x^{\cdot}$, т. е. имеет место равенство $F(x, \sigma x^{\cdot}) = \sigma F(x, x^{\cdot})$ для всех точек $(x, x^{\cdot})$ из R и всех $\sigma > 0$.

Постараемся теперь отыскать такую функцию $F(x, x^{\cdot})$, которая, помимо указанных, удовлетворяет следующему условию. Составим при помощи функции $F(x, x^{\cdot})$ функционал

$$J = \int_C F(x, x^{\cdot})\, dt \qquad (1.10)$$

и будем рассматривать задачу минимизации этого функционала по всем кривым C, проходящим через начало координат и некоторую точку x, т. е. простейшую вариационную задачу в параметрической форме. При этом потребуем, чтобы экстремали задачи (1.10) совпадали с экстремалями оптимальной задачи (1.3). Для этого достаточно, чтобы уравнения Эйлера для задачи (1.10), записанные в канонической форме, совпадали с уравнениями (1.9), а дополнительное условие, налагаемое на выбор параметра вариационной задачи (1.10), переходило после введения канонических переменных в уравнение (1.7). Таким образом, после того как будет найдена функция $F(x, x^{\cdot})$, задача оптимального регулирования (1.3) сведется к простейшей задаче вариационного исчисления в параметрической форме.

2. В книге [4] указывается, как найти функцию Гамильтона и построить систему канонических уравнений для вариационной задачи в параметрической форме (1.10). Несколько изменив и дополнив приведенные в [4] рассуждения, можно указать способ нахождения функции $F(x, x^{\cdot})$, если известен вид функции $L(x, p)$ из (1.7). Рассматривая задачу (1.10), введем функцию

$$G(x, x^{\cdot}, l) = F(x, x^{\cdot}) + l\left(\frac{F(x, x^{\cdot})}{f_0(x)} - 1\right) \qquad (2.1)$$

Рассмотрим для функции $G(x, x^{\cdot}, l)$ преобразование Лежандра [5] по переменным $x_1^{\cdot}, \ldots, x_n^{\cdot}, l$

$$p_i = G'_{x_i^{\cdot}} = F'_{x_i^{\cdot}}\left(1 + \frac{l}{f_0(x)}\right), \qquad \lambda = G_l' = \frac{F}{f_0(x)} - 1 \qquad (2.2)$$

Если якобиан преобразования (2.2)

$$d = \frac{(f_0(x)+l)^{n-1}}{[f_0(x)]^{n+1}} \begin{vmatrix} F''_{x_1^\cdot x_1^\cdot} & \ldots & F'_{x_1^\cdot x_n^\cdot} & F'_{x_1^\cdot} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ F''_{x_n^\cdot x_1^\cdot} & \ldots & F''_{x_n^\cdot x_n^\cdot} & F'_{x_n^\cdot} \\ F'_{x_1^\cdot} & \ldots & F'_{x_n^\cdot} & 0 \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

отличен от нуля в некоторой области R переменных x, $x^\cdot$ и при $|l| < 1$, то формулы (2.2) допускают обращение.

Заметим, что требование необращения в нуль определителя d налагает дополнительное условие на функцию $F(x, x^\cdot)$. Таким образом, рассматриваемый класс функций $F(x, x^\cdot)$ заведомо не включает функции, для которых определитель d обращается в нуль, например, функции линейные относительно переменных $x^\cdot_1, \ldots, x^\cdot_n$.

Пусть из (22)

$$x_i^\cdot = Q_i(x, p, \lambda), \qquad l = L(x, p, \lambda) \tag{2.4}$$

Функция $\Phi(x, p, \lambda)$, двойственная в преобразовании Лежандра функции $G(x, x^\cdot, l)$, имеет следующий вид

$$\Phi(x, p, \lambda) = \Big[\sum_{i=1}^n x_i^\cdot p_i + l\lambda - G\Big]^{x_i^\cdot = Q_i,\ l=L} =$$

$$= \Big[\sum_{i=1}^n x_i^\cdot G'_{x_i^\cdot} + l\Big(\frac{F}{f_0} - 1\Big) - G\Big]^{x_i^\cdot = Q_i,\ l=L} = L(\lambda + 1) \tag{2.5}$$

При выводе (2.5) использовано свойство однородности функции $F(x, x^\cdot)$. Так как преобразование Лежандра инволютивно, то, совершая это преобразование над функцией $\Phi(x, p, \lambda)$, придем к переменным $x^\cdot$, l и функции $G(x, x^\cdot, l)$. Переменные $x^\cdot$ и связаны с p и λ, если использовать функцию $\Phi(x, p, \lambda)$, следующим образом

$$x^\cdot_i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = \frac{\partial L}{\partial p_i}(\lambda + 1), \qquad l = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = L + \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\lambda + 1) \tag{2.6}$$

Для отыскания функции $G(x, x; l)$ понадобится обращение формул (2.6). Для этого достаточно, чтобы якобиан Δ преобразования (2.6), равный, как это выяснится несколько позже, определителю

$$\Delta = (\lambda + 1)^{n-1} \begin{vmatrix} L''_{p_1p_1} & \ldots & L''_{p_1p_n} & L'_{p_1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ L''_{p_np_1} & \ldots & L''_{p_np_n} & L'_{p_n} \\ L'_{p_1} & \ldots & L'_{p_n} & 0 \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

был отличен от нуля в некоторой области S изменения переменных x, p и при $|\lambda| < 1$. Отметим, что требование необращения в нуль определителя Δ является существенным дополнительным условием, которое ограничивает рассматриваемый класс функций $L(x, p)$, а следовательно, и класс рассматриваемых задач. Сравнивая последние равенства из (2.4) и (2.6), убеждаемся, что $\partial L / \partial\lambda = 0$ при $|\lambda| < 1$ и, следовательно, L не зависит от λ. Чтобы обнаружить другие свойства функции $L(x, p)$, рассмотрим выражение

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial L}{\partial p_i}(\lambda + 1) \tag{2.8}$$

Но, с другой стороны,

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = \Big[\sum_{i=1}^n p_i x_i^\cdot\Big]^{x_i^\cdot = Q_i} = \Big[\sum_{i=1}^n x_i^\cdot F'_{x_i^\cdot}\Big(1 + \frac{l}{f_0}\Big)\Big]^{x_i^\cdot = Q_i,\ l=L}$$

Используя свойство однородности функции $F(x, x^\cdot)$ и последнее равенство в (2.2), получим окончательно, что

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = (L + f_0)(\lambda + 1) \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) следует равенство

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial L}{\partial p_i} = L + f_0 \tag{2.10}$$

которое указывает на свойство положительной однородности первой степени функции $L + f_0(x)$ по переменным p. Обратно, если $L(x, p)$ обладает указанными свойствами, т. е. функция $L + f_0$ положительно однородна по переменным p, и L не зависит от λ, то, составив при помощи L функцию $\Phi(x, p, \lambda) = L(x, p)(\lambda + 1)$ и осуществив над $\Phi(x, p, \lambda)$ преобразование Лежандра по переменным p и λ, получим функцию $G(x, x^{\cdot}, l)$. Функция $F(x, x^{\cdot})$, найденная с помощью функции $G(x, x^{\cdot}, l)$ по формуле

$$F(x, x^{\cdot}) = \frac{f_0(G + l)}{f_0 + l} \tag{2.11}$$

будет положительно однородной первой степени по переменным $x^{\cdot}$ и не будет зависеть от l. Это утверждение можно получить рассуждениями, аналогичными тем, которые применялись при выводе свойств функции L. При этом попутно найдем

$$F(x, x^{\cdot}) = f_0(x)(1 + \Lambda(x, x^{\cdot})) \tag{2.12}$$

где $\Lambda(x, x^{\cdot})$ есть переменная λ, найденная из (2.6) и не зависящая от l.

Если относительно функции $L(x, p)$, являющейся левой частью уравнения Беллмана (1.7), дополнительно предположить, необращение в нуль определителя $\Delta(\lambda + 1)^{1-n}$, то она будет удовлетворять всем вышеуказанным условиям. Как нами выяснено, знание $L(x, p)$, позволяет найти функцию $F(x, x^{\cdot})$, являющуюся подынтегральной для некоторой вариационной задачи в параметрической форме (1.10). Выбирая параметр t вдоль экстремалей задачи (1.10) так, чтобы выполнялось равенство $F(x, x^{\cdot}) = f_0(x)$, добиваемся обращения в нуль параметра λ в преобразованиях (2.2). Положим $l = 0$, тогда функция L также обращается в нуль. В точности повторяя далее рассуждения, приведенные в книге ([4], стр. 160), убеждаемся, что каждой экстремали задачи (1.10), на которой параметр t выбран так, что вдоль нее $F(x, x^{\cdot}) = f_0(x)$, ставится в соответствие решение $x(t)$, $p(t)$ характеристической системы уравнений (1.9), вдоль которого выполняется уравнение (1.7). Верно и обратное. Заметим, что условие необращения в нуль определителей d и Δ можно несколько видоизменить.

Во-первых, в силу равенства $d \cdot \Delta = 1$ (см. [5]) достаточно требовать необращения в нуль одного из этих якобианов. Во-вторых, это условие вдоль экстремалей эквивалентно тому, чтобы ранг матрицы

$$\|F_{x_i^{\cdot}}{}''{}_{x_j^{\cdot}}\| \qquad (\text{соответственно } \|L_{p_i}{}''{}_{p_j}\| = \|H_{p_i}{}''{}_{p_j}\|)$$

был равен $n - 1$. Это можно показать так же, как и в теореме 43. 1 книги [4]. При этом для доказательства этого факта в первом случае следует воспользоваться условием необращения в нуль функции

$$F = x_1^{\cdot} F'_{x_1^{\cdot}} + \ldots + x_n^{\cdot} F'_{x_n^{\cdot}} = f_0(x)$$

вдоль экстремалей, а во втором — условием необращения в нуль функции

$$H(x, p) = p_1 \partial H / \partial p_1 + \ldots + p_n \partial H / \partial p_n$$

которая в силу равенства (1.7), выполняющегося вдоль экстремалей, также отлична от нуля. Уравнение (1.7), будучи уравнением Беллмана рассматриваемой оптимальной задачи (1.3), будет одновременно уравнением Гамильтона—Якоби задачи (1.10). Таким образом, функция J, представляющая собой геодезическое расстояние задачи (1.10) и функция Беллмана задачи (1.3) совпадают.

3. Обсудим кратко, что может дать указанный переход к простейшей задаче вариационного исчисления в параметрической форме для исследования той или иной оптимальной задачи регулирования. Для приближенного вычисления оптимальных траекторий и функции Беллмана знание функции $F(x, x^{\cdot})$ позволяет применять различные прямые методы вариационного исчисления. При этом, очевидно, что для приближенного отыскания кривых, дающих минимум функционалу (1.10), не обязательно придерживаться параметризации, доставляемой условием

$$F(x, x^{\cdot}) = f_0(x) \tag{3.1}$$

так как функционал (1.10) не зависит от выбора параметризации. Найденные приближенно экстремали будут приближать оптимальные траектории в фазовом пространстве X, но, вообще говоря, их нельзя считать приближенными оптимальными траекториями, поскольку выбранный параметр при использовании некоторого прямого метода не будет, как правило, совпадать со временем t. Однако на приближенных кривых можно всегда ввести параметр, подчиняющийся условию (3.1). Пусть, например, при использовании прямых методов в качестве параметра выбирается длина дуги s и приближенная минималь найдена в виде $x_n(s)$, $0 \leqslant s \leqslant s_1$. Найдем зависимость $s(t)$ параметра s от времени t. Функция $s(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$F(x_n(s(t)),\ x_{n_t}'(s(t))) = f_0(x_n(s(t))) \tag{3.2}$$

или, ввиду свойства однородности функции F по производным $x^{\cdot}$, уравнению

$$F(x_n(s),\ x_n'(s)) = f_0(x_n(s))\, t_s' \tag{3.3}$$

Учитывая, что $t(s_1)$ должно равняться нулю, найдем из (3.3) функцию $t(s)$

$$t(s) = \int\limits_s^{s_1} \frac{F(x_n(s),\ x_n'(s))}{f_0(x_n(s))}\, ds \tag{3.4}$$

Искомая функция $s(t)$ найдется как обратная для функции $t(s)$. Таким образом, становятся известными приближенные оптимальные траектории $x_n(t) = x_n(s(t))$, что позволяет, вообще говоря, находить приближенно оптимальные управления. Найденная же приближенно в некоторой области фазового пространства X функция Беллмана в качестве

$$\min_c \int\limits_c F(x, x^{\cdot})\, dt \tag{3.5}$$

позволяет осуществить приближенно синтез оптимальной задачи регулирования в этой области. Преобразование задачи оптимального регулирования в простейшую вариационную задачу может оказаться весьма полезным. Оно позволяет, в частности, пользоваться достаточными условиями задачи (1.10) для установления оптимальности экстремалей. Наличие тех или иных дифференциальных свойств функции $F(x, x^{\cdot})$ указывает на определенные дифференциальные свойства экстремалей [4] функции $J(x_1, \ldots, x_n)$, и, следовательно, оптимальных траекторий и управлений.

Укажем также на значение факта положительной определенности функции $F(x, x^{\cdot})$ при любых $x^{\cdot}$ в некоторой области D фазового пространства X, включающей начало координат. В этом случае функция $J(x_1, \ldots, x_n)$, равная (3.5), будет определенно положительной в области D и удовлетворять уравнению Беллмана (1.7). Уравнение же (1.7) показывает, что функция J будет функцией Ляпунова для рассматриваемой первоначальной системы регулирования (1.2), если вместо управлений u подставить в правую часть системы (1.2) функцию $u(x, dJ / dx)$ из (1.7). Отсюда следует, что каждое состояние области D управляемо [6], и можно получить оценки снизу для области управляемости задачи (1.1)—(1.2).

4. В качестве примера приведем задачу, рассмотренную Н. Н. Красовским [7]. В этой задаче система уравнений (1.2) имеет вид

$$dx / dt = Ax + Bu \tag{4.1}$$

где A и B — n-мерные матрицы с постоянными коэффициентами, причем B — неособенная матрица, u — n-мерный управляющий вектор. Область управления U — единичный шар, т. е. управление $u = (u_1, \ldots, u_n)$ удовлетворяет в каждый момент времени условию

$$(u, u) = u_1^2 + \ldots + u_n^2 \leqslant 1 \tag{4.2}$$

Н. Н. Красовским рассматривалась задача по быстродействию, т. е. в (1.1) функция $f_0(x) \equiv 1$. Все дальнейшие вычисления проходят без изменений, если вместо (4.1) рассматривать систему

$$dx / dt = f(x) + B(x)\, u \tag{4.3}$$

где $B(x)$ — n-мерная неособенная матрица, коэффициенты которой зависят от фазовых координат. Уравнение (1.5) для задачи (1.1) — (4.1) имеет вид

$$\max_u (p,\ -Ax - Bu) - f_0(x) = 0 \qquad ((u, u) \leqslant 1) \tag{4.4}$$

Из условия максимизации (4.4) можно найти управление u как вектор-функцию от переменных x, p и получить уравнение в частных производных первого порядка независимо от u, как это сделано в [7]; получим

$$u = -\frac{B^* p}{\sqrt{((BB^* p, p)}} \tag{4.5}$$

Подставив это управление в (4.4), найдем уравнение типа (1.7), обозначив предварительно матрицу BB^* через Γ

$$L(x, p) = -(p, Ax) + \sqrt{(\Gamma, p, p)} - f_0(x) = 0 \tag{4.6}$$

Уравнения (2.6) для рассматриваемой задачи примут вид

$$x^{\cdot} = \left(-Ax + \frac{\Gamma p}{\sqrt{(\Gamma p, p)}}\right)(\lambda + 1), \qquad l = -(p, Ax) + \sqrt{(\Gamma p, p)} - f_0(x) \tag{4.7}$$

Для отыскания функции $F(x, x^{\cdot})$ достаточно выразить $\lambda + 1$ через переменные x и $x^{\cdot}$ из (4.7). Переписывая двояким образом первые n равенств из (4.7), получаем

$$\frac{x^{\cdot}}{\lambda + 1} + Ax = \frac{\Gamma p}{\sqrt{(\Gamma p, p)}}, \qquad \frac{\Gamma^{-1} x^{\cdot}}{\lambda + 1} + \Gamma^{-1} Ax = \frac{p}{\sqrt{(\Gamma p, p)}} \tag{4.8}$$

Перемножая скалярно попарно правые и левые части этих равенств, получим

$$\left(\frac{\Gamma^{-1} x^{\cdot}}{\lambda + 1} + \Gamma^{-1} Ax, \quad \frac{x^{\cdot}}{\lambda + 1} + Ax\right) = 1 \tag{4.9}$$

Из этого квадратного уравнения найдем корень $\lambda + 1$, удовлетворяющий задаче, а затем функцию $F(x, x^{\cdot})$ по формуле (2.12):

при $1 - (\Gamma^{-1} Ax, Ax) \neq 0$

$$F(x, x^{\cdot}) = f_0(x) \frac{(\Gamma^{-1} x^{\cdot}, Ax) + \sqrt{(\Gamma^{-1} x^{\cdot}, Ax)^2 + (\Gamma^{-1} x^{\cdot}, x^{\cdot})\,[1 - (\Gamma^{-1} Ax, Ax)]}}{1 - (\Gamma^{-1} Ax, Ax)} \tag{4.10}$$

при $1 - (\Gamma^{-1} Ax, Ax) = 0$

$$F(x, x^{\cdot}) = -\frac{f_0(x)\,(\Gamma^{-1} x^{\cdot}, x^{\cdot})}{2\,(\Gamma^{-1} x^{\cdot}, Ax)} \tag{4.11}$$

Так как функция $F(x, x^{\cdot})$ определенно положительна, если $1 - (\Gamma^{-1} Ax, Ax) > 0$, при любых $x^{\cdot}$, то область управляемости во всяком случае включает внутренность эллипсоида, уравнение которого $(\Gamma^{-1} Ax, Ax) = 1$. Матрица A предполагается здесь неособенной. Можно указать на следующую геометрическую интерпретацию оптимальных кривых данной задачи. Именно, внутри эллипсоида $(\Gamma^{-1} Ax, Ax) = 1$, оптимальные траектории будут геодезическими линиями финслеровой геометрии ([8], гл. X).

Для задачи (1.1) — (4.3) при $f(x) \equiv 0$ в (4.3) функция

$$F(x, x^{\cdot}) = \sqrt{(C(x)\, x^{\cdot}, x^{\cdot})}$$

где $C(x)$ — матрица определенно положительной квадратичной формы по $x^{\cdot}$. В этом случае оптимальные траектории являются геодезическими римановой геометрии.

Автор признателен Е. А. Барбашину за обсуждение результатов статьи.

Поступила 15 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
2. Беллман Р. Динамическое программирование. ИЛ, 1960.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV. Физматгиз, 1960.
4. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. ИЛ, 1950.
5. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, т. II. Гостехиздат, 1951.
6. Маркус (L. Markus), Ли (E. B. Lee). О существовании оптимальных управлений. Техническая механика, 1962, № 1 (русск. пер. трудов Американского общества инженеров-механиков).
7. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.
8. Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. Гостехиздат, 1947.