# К ЗАДАЧЕ ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЯХ РАКЕТЫ

**И. В. Иослович** (Москва)

Экстремальным задачам, связанным с изменением вектора скорости V идеально управляемой ракеты на вектор ΔV в поле постоянной силы тяжести, посвящены работы [1-3].

Ниже предложенное Ю. А. Гореловым [1] решение задачи о максимальной продолжительности времени активного полета $\Delta t = t_f - t_i$ в горизонтальной плоскости при заданной конечной величине массы $m_f$, выводится из уравнений для экстремалей, полученных Г. Лейтманном [2]. Исследуется особый случай, когда на некоторых участках траектории тяга используется лишь для поддержания постоянной высоты.

Для случая полета в вертикальной плоскости показано, что условие Ю. А. Горелова $\beta / m = \text{const}$, где $\beta = - m^{\cdot}$, не будет в общем случае необходимым. Если же ищется $\max m_f$ при незаданном $t_f$, то для некоторого класса граничных условий $\beta \neq \beta_{\max}$.

**1. Полет в горизонтальной плоскости.** Как известно [1, 2], решение задачи о $\max t_f$ при заданном $m_f$ совпадает с решением задачи о $\max m_f$ при заданном $t_f$ В работе [2] отмечается, что в решении последней задачи может появиться промежуточ ная тяга. В этом случае $\beta$ определяется пятым из уравнений (8) и уравнением (20) Эти уравнения, с учетом (23), можно записать в виде

$$\lambda_m = \frac{c^2\beta}{m^2}\left[\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2\right]^{-1/2}\left[\left(\frac{\lambda_\gamma}{V}\right)^2 + \lambda_V^2\right]^{1/2} \tag{1.1}$$

Третье из уравнений (8), учитывая (20) и (23), запишем в виде

$$\lambda_m^{\cdot} = \frac{c^2\beta^2}{m^3}\left[\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2\right]^{-1/2}\left[\left(\frac{\lambda_\gamma}{V}\right)^2 + \lambda_V^2\right]^{1/2} \tag{1.2}$$

Непосредственно проверяется, что

$$\left(\frac{\lambda_\gamma}{V}\right)^2 + \lambda_V^2 = \text{const} \tag{1.3}$$

Разделив (1.2) на (1.1), получим

$$\frac{\lambda_m^{\cdot}}{\lambda_m} = \frac{\beta}{m}, \qquad \text{или} \qquad \lambda_m = \frac{c_1}{m} \tag{1.4}$$

Подставляя последнее выражение в (1.1) и учитывая (1.3), после несложных преобразований, получаем

$$\frac{\beta}{m} = \text{const} \tag{1.5}$$

как и в решении Ю. А. Горелова.

При наличии ограничения $\beta \leqslant \beta_{\max}$ указанный режим, очевидно, имеет место на всей траектории, если выполнено условие $\beta(t_i) \leqslant \beta_{\max}$. Выпишем его в явном виде.

Следуя А. И. Лурье [3], запишем уравнения движения в векторной форме

$$\mathbf{V}^{\cdot} = \left[\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2\right]^{1/2}\mathbf{e}, \qquad \mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = 1, \qquad m^{\cdot} = -\beta \tag{1.6}$$

В [3] показано, что $\mathbf{e} = \text{const}$. Учитывая также (1.5) и интегрируя, получаем

$$\frac{\beta}{m} = \frac{1}{\Delta t}\ln\frac{m_i}{m_f}, \qquad \Delta V = |\Delta\mathbf{V}| = \left[\left(c\ln\frac{m_i}{m_f}\right)^2 - (g\Delta t)^2\right]^{1/2} \tag{1.7}$$

Условие имеет вид

$$\beta(t_i) = m_i g \ln\frac{m_i}{m_f}\left[\left(c\ln\frac{m_i}{m_f}\right)^2 - (\Delta V)^2\right]^{-1/2} \leqslant \beta_{\max} \tag{1.8}$$

Чтобы окончательно решить задачу о $\max t_f$ при заданном $m_f$, необходимо проверить полученное решение на оптимальность по сравнению с решением, содержащим участки «пассивного» полета, где $\beta = mg / c$, так как на таких участках теряют смысл уравнения (1.1) и (1.2). Следует отметить, что для этого случая неприменима также формула (1.6) работы [1].

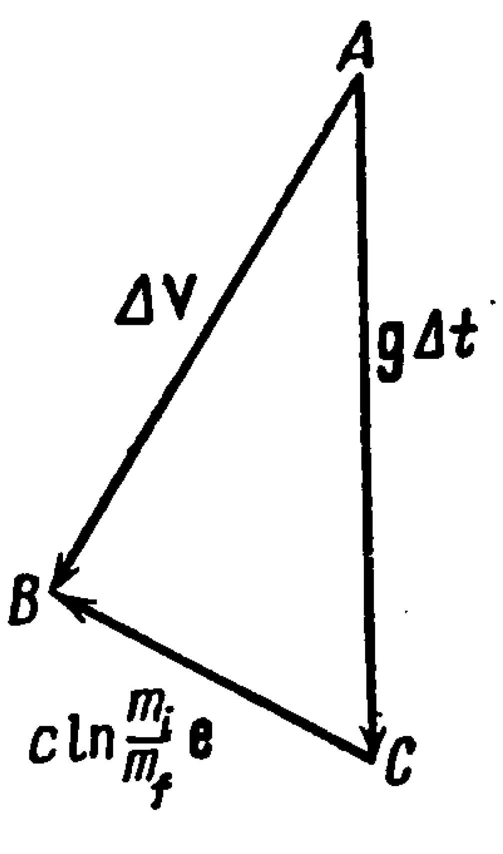
Пусть траектория состоит из двух участков, причем на первом $\beta / m = \text{const} \neq g / c$, и масса меняется от $m_i$ до $m_1$, а на втором $\beta = mg / c$, и масса меняется от $m_1$ до $m_f$. Тогда общее время полета будет соответственно состоять из двух слагаемых

$$\Delta t = \frac{1}{g}\left[\left(c \ln \frac{m_i}{m_1}\right)^2 - (\Delta V)^2\right]^{1/2} + \frac{c}{g} \ln \frac{m_1}{m_f} \qquad (1.9)$$

Вычислив производную $\partial \Delta t / \partial m_1$, найдем, что она отрицательна. Если поменять участки местами, то производная станет положительной. Таким образом, любое включение в траекторию участка, где $\beta = mg / c$, уменьшает $t_f$.

**2. Полет в вертикальной плоскости.** Используя уравнения движения в векторной форме, запишем

$$\mathbf{V}^{\cdot} = \frac{c\beta}{m}\mathbf{e} + \mathbf{g}, \qquad \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1, \qquad m^{\cdot} = -\beta \qquad (2.1)$$




Будем решать задачу о max $t_f$ при заданном $m_f$. Используя метод Л. С. Понтрягина, получаем

$$H = \lambda\left(\frac{c\beta}{m}\mathbf{e} + \mathbf{g}\right) - \lambda_m \beta$$

$$\lambda^{\cdot} = 0, \qquad \mathbf{e} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \text{const} \qquad (2.2)$$

Проинтегрировав (2.1) с учетом постоянства $\mathbf{e}$, получаем

$$\Delta \mathbf{V} = c \ln \frac{m_i}{m_f}\mathbf{e} + \mathbf{g}\Delta t$$

Из треугольника $ABC$ (см. фигуру) определяется величина $\Delta t$. Очевидно, при этом $\mathbf{e} \cdot \mathbf{g} \leqslant 0$. На $\beta$ накладывается условие

$$\int_{t_i}^{t_f} \beta \, dt = m_i - m_f \qquad (2.3)$$

а не условие Ю. А. Горелова $\beta / m = \text{const}$.

В общем случае условию (2.3) удовлетворяет бесконечное множество решений.

Если решается задача о max $m_f$ при незаданном $t_f$, то сторона $BC$ (см. фигуру) должна быть минимальной. Пусть при этом $\Delta \mathbf{V}$ имеет вертикальную составляющую, направленную вниз, и $\beta_{\max}$ достаточно велико. Тогда треугольник $ABC$ будет прямоугольным и величины $\Delta t$ и $m_f$ определятся однозначно. По-прежнему, $\beta$ будет удовлетворять условию (2.3).

Пример подобной неединственности решения был указан Г. Лейтманном [4] ($m_f$ задано, максимизируется горизонтальная составляющая скорости).

Поступила 17 I 1963

## ЛИТЕРАТУРА

1. Горелов Ю. А. О двух классах плоских экстремальных движений рекеты в пустоте. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.
2. Лейтманн Г. Об оптимальных траекториях ракеты. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 6.
3. Лурье А. И. Замечание к работе Г. Лейтманна «Об оптимальных траекториях ракеты». ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.
4. Leitmann G. On a Class of Variational Problems in Rocket Flight. J. Aero/Space Sci, 1959, 26.