Разложив ее в ряд по степеням x_i ($i = 1, 2, \ldots, 5$), получим

$$W = W(0) + (mgl - Cq_0^2 - mlRr_0^2)\, x_1^2 + (mgl - mlRq_0^2 - mlRr_0^2)\, x_2^2 + \\ + mlR\,(x_3^2 + x_4^2) + Cx_5^2 + \ldots$$

Здесь $W(0)$ — значение функции W, когда $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, 5$), точками обозначены члены высшего порядка малости.

Функция $W - W(0)$ будет определенно положительной для достаточно малых x_i, если

$$mgl - Cq_0^2 - mlRr_0^2 > 0, \qquad mgl - mlRq_0^2 - mlRr_0^2 > 0 \tag{3.3}$$

Так как ее производная в силу уравнений возмущенного движения равна нулю, то при восполнении неравенств (3.3) невозмущенное движение (3.2) будет устойчиво.

Если $C > mlR$, то неравенства (3.3) заменяются одним условием

$$mgl > Cq_0^2 + mlRr_0^2$$

Если $C \leqslant mlR$, то неравенства (3.3) приводятся к условию

$$u_0 < \nu \qquad (\nu^2 = g/R) \tag{3.4}$$

которое совпадает с условием устойчивости движения гирогоризонткомпаса [3].

Несложно показать, что условие (3.4) является необходимым. Для этого нужно выписать необходимые условия устойчивости линеаризованной системы уравнений (3.1) при наличии малых диссипативных сил.

Поступила 8 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.
2. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики, ч. II. ОНТИ НКТП СССР, М.— Л., 1937.
3. Жбанов Ю. К. Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. Я. Кац (Свердловск)

Рассматривается задача об устойчивости по вероятности в целом стохастических систем дифференциальных уравнений. Дается критерий устойчивости, основанный на использовании двух функций Ляпунова [1].

Идея использования двух функций Ляпунова принадлежит Н. Г. Четаеву [2]. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений критерии устойчивости, построенные на применении двух функций, доказаны в [3].

Теорема, доказанная ниже для стохастических систем, аналогична той, которая была доказана для обыкновенных дифференциальных уравнений [4].

§ 1. Пусть дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$dx\,/\,dt = f(t,\ x,\ y(t)) \tag{1.1}$$

где x — n-мерный вектор фазовых координат системы, вектор-функция $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ непрерывна по всем переменным в области

$$-\infty < x_i < +\infty, \qquad t \geqslant 0, \qquad y \in Y \tag{1.2}$$

удовлетворяет в этой области условиям Липшица по переменным x_j, y и ограничена при всех $y \in Y$ в каждой конечной области $\|x\| \leqslant N$ ($\|x\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$).

Функция $y(t)$ описывает марковский случайный процесс [5], который будем предполагать либо чисто разрывным ([6], стр. 292), либо непрерывным ([6], стр. 284). Ограничимся рассмотрением лишь скалярной функции $y(t)$. Результаты обобщаются на случай, когда $y(t)$ — m-мерный вектор без существенных изменений в рассуждениях.

Непрерывный марковский случайный процесс при некоторых достаточно широких предположениях [5] можно рассматривать как решение диффузионного уравнения

$$dy / dt = m(t, y) + \sigma(t, y)\, dq / dt$$

где $q(t)$ — винеровский процесс, т. е. гауссов процесс с независимыми приращениями, удовлетворяющий условиям (при любых $t_1 \geqslant 0$, $t_2 \geqslant 0$)

$$M[q(t_2) - q(t_1)] = 0, \qquad M[q(t_2) - q(t_1)]^2 = |t_1 - t_2|$$

Вопросы устойчивости стохастических систем рассматривались в ряде работ [7-11]. В настоящей работе используются определения и обозначения, принятые в [11]. В [11] рассматривается случай, когда $y(t)$ — однородная марковская цепь с конечным числом состояний, однако определения и те результаты, которые используются далее, остаются справедливыми и при более общих предположениях.

Приведем некоторые определения.

Определение 1.1. Решение $x = 0$ системы (1.1) будем называть устойчивым по вероятности, если для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $p > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для произвольных начальных данных, удовлетворяющих условию

$$\| x(t_0) \| \leqslant \delta, \qquad y(t_0) \in Y \tag{1.3}$$

будет справедливо неравенство

$$P\{\| x(t) \| < \varepsilon, \quad t \geqslant t_0 / \| x(t_0) \| \leqslant \delta, \quad y(t_0) \in Y\} > 1 - p \tag{1.4}$$

Символом $P\{A / \beta\}$ обозначается условная вероятность события A.

Уравнения (1.1) порождают вероятностный марковский процесс $\{x(t), y(t)\}$, который можем считать сепарабельным ([5], стр. 53). Тогда выражение, стоящее в левой части неравенства (1.4), имеет смысл.

Определение 1.2. Решение $x = 0$ системы (1.1) будем называть асимптотически устойчивым в целом, если оно устойчиво в смысле определения (1.1) и если, каковы бы ни были ограниченная область $\| x \| \leqslant H_0$ и числа $\gamma > 0$, $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, можно указать такую ограниченную область $\| x \| < H_1$ и число $T > 0$, что будут выполнены условия

$$P\{\| x(t) \| < H_1 \quad t > t_0 / \| x_0 \| \leqslant H_0, \ y_0 \in Y\} > 1 - p \tag{1.5}$$

$$P\{\| x(t) \| > \gamma, \quad t > t_0 + T / \| x_0 \| \leqslant H_0, y_0 \in Y\} > 1 - q \tag{1.6}$$

Смысл этого определения состоит в следующем: если решение $x = 0$ асимптотически устойчиво в целом, то для любого начального условия $\{x_0, y_0\}$ движение $x(t)$ с вероятностью, сколь угодно близкой к 1, будет находиться в некоторой ограниченной области $\| x \| < H_1$ при $t > t_0$. При этом, начиная с некоторого достаточно большого момента времени $t_0 + T$, траектория движения попадет в сколь угодно малую окрестность начала координат и будет оставаться там при всех $t > t_0 + T$ с вероятностью, сколь угодно близкой к 1.

Примечание 1.1. Определения (1.1) и (1.2) совпадают с соответствующими определениями статьи [11] при принятом в ней условии об обрывах реализаций.

Примечание 1.2. Условие устойчивости, аналогичное неравенству (1.4), из определения (1.1) может быть выбрано в форме

$$\lim \{P[\sup \| x(t) \|, \quad t_0 \leqslant t < \infty] > \varepsilon / x(t_0) = x_0\} = 0 \quad \text{при } x_0 \to 0 \tag{1.7}$$

Так дано определение устойчивости в работе Р. З. Хасьминского [10].

§ 2. Достаточные условия устойчивости стохастических систем могут быть даны в форме, аналогичной теоремам второй методы Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений [10, 11]. В частности, если для уравнений (1.1) существует определенно положительная функция $v(t, x, y)$, допускающая бесконечно малый высший и бесконечно большой низший пределы ([12], стр. 36), производная которой

$dM\ [v]\ /\ dt$ в силу системы (1.1) определенно отрицательна [1], то решение $x = 0$ асимптотически устойчиво в целом.

Однако, для стохастических систем, как и для детерминированных, иногда можно построить функцию, которая будет определенно положительной, допускает бесконечно малый высший и бесконечно большой низший пределы, но производная которой является лишь функцией знакоотрицательной. Следовательно, применить цитированную выше теорему в этом случае нельзя.

Для детерминированных систем в подобной ситуации можно применить теорему 4 из статьи [4]. Приводимая ниже теорема указывает условия, когда асимптотическая устойчивость в целом стохастической системы обеспечивается функцией со знакоотрицательной производной. Эта теорема основана на применении двух функций. Идея использования двух функций Ляпунова принадлежит Н. Г. Четаеву [2]. Теоремы об асимптотической устойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием двух функций доказаны в работе [3].

Введем некоторые определения.

Определение 2.1. Пусть G — открытая область в пространстве $\{x_i\}$. Будем называть функцию $\psi\ (t,\ x,\ y)$ определенно положительной в области $G \times Y$, если для любых чисел $\varepsilon > 0$, $H > \varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что

$$\psi\ (t,\ x,\ y) \geqslant \delta \quad \text{при } t \geqslant 0,\ \{x,\ y\} \in G \times Y; \quad \varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant H \tag{2.1}$$

Определение 2.2. Будем говорить, что функция $F\ (t,\ x,\ y)$ удовлетворяет условиям $A\ (G)$, если:

1. Она ограничена при всех $t \geqslant 0$ в любой конечной области

$$\|x\| \leqslant H, \qquad y \in Y \tag{2.2}$$

2. Производная $dM\ [F]\ /\ dt$ функции $F\ (t,x,y)$ в силу системы (1.1) ограничена в каждой области (2.2) т. е. $|\ dM\ [F]\ /\ dt\ | \leqslant K$.

3. В области $G \times Y$ производная $dM\ [F]\ /\ dt$ в силу уравнений (1.1) определенно положительна.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть для уравнений (1.1), определенных в области (1.2), выполнены условия.

1. Существует определенно положительная функция $v\ (t,\ x,\ y)$, допускающая бесконечно малый высший и бесконечно большой низший пределы, т. е. равномерно по t и y справедливы условия

$$\lim v\ (t,\ x,\ y) = 0 \quad \text{при } x \to 0, \qquad \lim v\ (t,\ x,\ y) = \infty \quad \text{при } x \to \infty$$

2. Производная $dM\ [v]\ /\ dt$ в силу системы (1.1) удовлетворяет условию

$$dM\ [v]\ /\ dt \leqslant -\ \Phi\ (x) \leqslant 0$$

где функция $\Phi\ (x)$ непрерывна в области $\|x\| \leqslant H$.

3. Множество Q точек, где $\Phi\ (x) = 0$ (кроме точки $x = 0$), является внутренним по отношению к некоторой открытой области $G \supset Q$.

4. Существует функция $F\ (t,\ x,\ y)$, удовлетворяющая условиям $A\ (G)$.

Тогда невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво в целом по вероятности.

---

[1] Производная $dM\ [v]\ /\ dt$ в точке $t = \tau$, $x = \xi$, $y = \eta$ имеет следующий смысл ([11], стр. 812)

$$\frac{dM\ [v]}{dt} = \lim_{t \to \tau + 0} \frac{1}{t - \tau} \{M\ [v\ (t,\ x\ (t),\ y\ (t)) - v\ (\tau,\ \xi,\ \eta)]\ /\ \xi,\ \eta\}$$

и определяется инфинитезимальным оператором [13] процесса $\{x\ (t),\ y\ (t)\}$.

Величину $dM\ [v]\ /\ dt$ можно истолковать как усредненное значение производной функции $v\ (t,\ x,\ y)$ вдоль всех реализаций $\{x\ (\omega,\ t),\ y\ (\omega,\ t)\}$, выходящих из точки $\{\xi,\ \eta\}$ в момент времени τ.

Доказательство. Возьмем произвольные числа $H_0 > 0$, $\varepsilon < H_0$, $0 < \mu < 1$, $0 < \gamma < 1$. По этим числам определим два числа $H > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ из условий

$$[\sup v(t_0, x_0, y_0),\ \| x_0 \| \leqslant H_0,\ y_0 \in Y] < \mu\ [\inf v(t, x, y), \| x \| \geqslant H,\ y \in Y,\ At \geqslant t_0] \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}[\sup v(t, x, y),\ \| x \| \leqslant \varepsilon_1,\ y \in Y,\ t \geqslant t_0] < \\ < {}^1/_2\, \gamma\ [\inf v(t, x, y),\ \| x \| \geqslant \varepsilon,\ y \in Y,\ t \geqslant t_0]\end{gathered} \tag{2.4}$$

Как было показано в [11], из этих неравенств в силу условий теоремы следует справедливость соотношений

$$P\{ \| x(t) \| < H,\ t \geqslant t_0 / \| x_0 \| \leqslant H_0,\ y_0 \in Y\} > 1 - \mu \tag{2.5}$$

$$P\{ \| x(t) \| > \varepsilon,\ t \geqslant \tau,\ / \| x(\tau) \| \leqslant, \varepsilon\, y(\tau) \in Y\} > 1 - {}^1/_2\gamma \tag{2.6}$$

Теперь нам достаточно показать, что для любой точки $\{x_0, y_0\}$ из области

$$\| x_0 \| \leqslant H_0, \qquad y_0 \in Y$$

найдется момент времени $\tau \geqslant t_0$, для которого выполнено неравенство

$$P\{ \| x(\tau) \| \leqslant \varepsilon_1 / \| x_0 \| \leqslant H_0,\ y_0 \in Y\} > 1 - {}^1/_2\, \gamma - \mu \tag{2.7}$$

так как в этом случае вследствие устойчивости по вероятности и (2.6) выполнялось бы условие

$$P\{ \| x(t) \| < \varepsilon,\ t \geqslant \tau / \| x_0 \| \leqslant H_0,\ y_0 \in Y\} > 1 - \mu - \gamma \tag{2.8}$$

Доказательство неравенства (2.7) будем вести от противного. Пусть (2.7) не выполняется, тогда найдется точка $\{x_0, y_0\}$, такая, что при каждом $t \geqslant t_0$ будет справедливо неравенство

$$P\{ \| x(t) \| > \varepsilon_1,\ / \| x_0 \| \leqslant H_0,\ y_0 \in Y\} \geqslant {}^1/_2\, \gamma + \mu \tag{2.9}$$

В силу устойчивости системы теперь по числам $\gamma > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ можно определить $\delta > 0$ так, чтобы при каждом $t \geqslant t_0$ выполнялось условие

$$P\{ \| x(t) \| > \varepsilon_1 / \| x(t_0) \| \leqslant \delta,\ y(t_0) \in Y\} < {}^1/_8\, \gamma \tag{2.10}$$

Из (2.9) и (2.10) вытекает соотношение

$$P(\{ \| x(t) \| > \delta,\ t \geqslant t_0 / x_0, y_0\} > {}^1/_4\, \gamma + \mu \tag{2.11}$$

В самом деле, если бы (2.11) не выполнялось, то имело бы место условие

$$P\{ \| x(t) \| > \delta,\ t \geqslant t_0 / x_0, y_0\} = \lim_{\theta \to \infty} P\{ \| x(t) \| > \delta, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \theta / x_0, y_0\} \leqslant {}^1/_4\, \gamma + \mu$$

Но тогда можно указать настолько большое значение $\theta_0 > t_0$, что

$$P\{ \| x(t) \| > \delta,\ t_0 \leqslant t \leqslant \theta_0 / x_0, y_0\} < {}^3/_8\, \gamma + \mu \tag{2.12}$$

Обозначим через τ момент первого попадания траектории $x(t)$ на поверхность $\| x \| = \delta$, тогда будем иметь при $t > \theta_0$

$$\begin{gathered}P\{ \| x(t) \| > \varepsilon_1 / x_0, y_0\} \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{\eta \in Y,\ \|\xi\| = \delta} P\{ \| x(t) \| > \varepsilon_1 / \| x(\tau_\delta) \| = \xi,\ y(\tau_\delta) = \eta\} P\{x(\tau_\delta) \in d\xi, \\ y(\tau_\delta) \in d\eta,\ \tau_\delta \leqslant \theta_0 / x_0, y_0\} + P\{ \| x(s) \| > \delta,\ t_0 \leqslant s \leqslant \theta_0 / x_0; y_0\} < \\ < {}^1/_8\gamma + {}^3/_8\gamma + \mu = {}^1/_2\gamma + \mu\end{gathered} \tag{2.13}$$

Здесь используется свойство вероятностной устойчивости, в известном смысле аналогичное свойству строгой марковости [13], т. е. используется неравенство (1.4) в предположении, что t_0 — случайный момент времени, не зависящий от будущего.

Полученное неравенство противоречит условию (2.9). Отсюда следует справедливость соотношения (2.11). Сопоставляя (2.5) и (2.11), получим следующую оценку

$$P\{\delta < \| x(t) \| < H,\ t \geqslant t_0 / x_0, y_0\} > {}^1/_4\gamma \tag{2.14}$$

Покажем, что (2.14) противоречит условиям теоремы. Для этого рассмотрим области D и E, определяемые равенствами

$$D = G \cap \{\delta < \| x \| < H\}, \qquad E = \{\delta < \| x \| < H\} \setminus D$$

Тогда можно указать такие положительные постоянные k^2 и m^2, что будут справедливы соотношения

$$\left[\sup \frac{dM\,[v]}{dt}, \ x \in E, \ y \in Y, \ t \geqslant t_0\right] = -k^2 \tag{2.15}$$

$$\left[\inf \frac{dM\,[F]}{dt}, \ x \in D, \ y \in Y, \ t \geqslant t_0\right] = m^2 \tag{2.16}$$

Наряду с процессом $\{x(t), y(t)\}$, являющимся решением уравнений (1.1), рассмотрим вспомогательный случайный процесс $\{x^*(t), y^*(t)\}$.

Будем предполагать, что реализации $\{x^*(t,\omega), y^*(t,\omega)\}$ случайного процесса $\{x^*(t), y^*(t)\}$ существуют и совпадают с соответствующими реализациями $\{x(t,\omega), y(t,\omega)\}$ процесса $\{x(t), y(t)\}$ лишь до тех пор, пока $\delta < \|x(t,\omega)\| < H$. Если $t = t(\omega)$ — момент первого выхода реализации на границу рассматриваемой области, то будем считать, что при $t \geqslant t(\omega)$ реализация $\{x^*(t,\omega), y^*(t,\omega)\}$ не существует.

Если теперь $\varphi(t, x, y)$ — некоторая скалярная функция, то каждая реализация $\{x^*(t,\omega), y^*(t,\omega)\}$ порождает реализацию случайной функции $\varphi(t)$ с соответствующим распределением вероятностей, причем предположим, что

$$\varphi(t,\omega) = \begin{cases} \varphi(t, x, (t, \omega), y(t, \omega)) & \text{при } t_0 \leqslant t < t(\omega) \\ \varphi(t(\omega), x(t(\omega), \omega))\, y(t(\omega, \omega)) & \text{при } t \geqslant t(\omega) \end{cases} \tag{2.17}$$

Пусть $\varphi_t = M[\varphi(t) / x_0, y_0]$ — математическое ожидание случайной функции $\varphi(t)$. Тогда справедливо равенство [1]

$$\left(\frac{d\varphi_t}{dt}\right)_{dt=+0} = M\left[\frac{dM\,[\varphi]}{dt} \Big/ x_0, y_0\right] \tag{2.18}$$

Введем обозначение

$$P\{x^*(t) \in E / x_0, y_0\} = p(t) \tag{2.19}$$

Тогда в силу (2.14) будем иметь

$$P\{x^*(t) \in D / x_0, y_0\} \geqslant {}^1/_4\gamma - p(t) \tag{2.20}$$

Учитывая (2.15) и (2.18), имеем

$$\frac{dv_t}{dt} = M\left[\frac{dM\,[v]}{dt} \Big/ x_0, y_0\right] \leqslant -k^2 p(t)$$

Интегрируя и принимая во внимание, что $v_t \geqslant 0$ при всех $t \geqslant t_0$, получим

$$\int_{t_0}^{\infty} p(t)\,dt \leqslant \frac{v_0}{k^2} \qquad (v_0 = v(t_0, x_0, y_0)) \tag{2.21}$$

С другой стороны, учитывая условия (2.16) и (2.20), а также ограниченность производной $dM\,[F] / dt$ в области (2.2), будем иметь

$$\frac{dF_t}{dt} = M\left[\frac{dM\,[F]}{dt} \Big/ x_0, y_0\right] \geqslant m^2 \left[\frac{1}{4}\gamma - p(t)\right] - Kp(t)$$

Интегрируя это неравенство и принимая во внимание (2.16), получим $\lim F_t = \infty$ при $t \to \infty$, что невозможно, так как F_t — ограниченная функция. Полученное противоречие доказывает справедливость (2.7) и, следовательно, теоремы (2.1).

Наметим доказательство равенства (2.18).

---

[1] Равенство (2.18) доказывается строго на основе теории инфинитезимальных операторов марковских процессов [13]. Ниже будут даны некоторые соображения для вывода этой формулы.

Обозначим открытую область $\delta < \|x\| < H$ через L. Возьмем произвольное число $0 < \nu < {}^1/_2 (H - \delta)$ и определим замкнутую область S условиями

$$S = \{\delta + \nu \leqslant \|x\| \leqslant H - \nu\}$$

Вычислим приращение $\Delta\varphi_t$ функции $\varphi_t = M\,[\varphi\,(t,\, x^*(t),\, y^*(t))\, /\, x_0,\, y_0]$. Для этого рассмотрим следующие несовместные события, образующие полную группу.

Событие A — решение $\{x^*(t),\, y^*(t)\}$ не обрывается ни в какой точке интервала времени $(t_0,\, t]$, причем $x^*(t) = x(t) \in S$.

Событие B — решение $\{x^*(t),\, y^*(t)\}$ не обрывается ни в какой точке интервала времени $(t_0,\, t]$, но $x^*(t) = x(t) \in L \diagdown S$.

Событие C — решение $\{x^*(t),\, y^*(t)\}$ обрывается в некоторый момент $\tau \in (t_0,\, t]$

Тогда будем иметь (при $\Delta t > 0$)

$$\Delta\varphi_t = \varphi_{t+\Delta t} - \varphi_t = M\,[\varphi\,(t + \Delta t) - \varphi\,(t)\, /\, x_0,\, y_0 A] +$$
$$+ M\,[\varphi\,(t + \Delta t) - \varphi\,(t)\, /\, x_0,\, y_0,\, B] + M\,[\varphi\,(t + \Delta t) - \varphi\,(t)\, /\, x_0,\, y_0,\, C] \qquad (2.22)$$

Оценим каждое из этих слагаемых. Правые части уравнений (1.1) удовлетворяют условиям Липшица, поэтому при выполнении условия A можно указать столь малое значение Δt, что решение $\{x^*(t),\, y^*(t)\}$ не будет обрываться и на интервале времени $(t,\, t + \Delta t)$. Тогда, применяя формулу повторных математических ожиданий ([5], стр. 40), будем иметь

$$M\,[\varphi\,(t + \Delta t) - \varphi\,(t)\, /\, x_0,\, y_0,\, A] = M\,[M\,[\varphi\,(t + \Delta t,\;\; x\,(t + \Delta t),\;\; y\,(t + \Delta t) -$$
$$- \varphi\,(t,\, x\,(t),\, y\,(t))/\, x\,(t) = \xi \in S,\;\; y\,(t) =$$
$$= \eta \in Y\, /\, x_0,\, y_0,\, A]] = M\left[\frac{dM\,[\varphi]}{dt}\,\Big/\, x_0,\, y_0,\, A\right]\Delta t + o\,(\Delta t) \qquad (2.23)$$

Для второго слагаемого в правой части (2.22) справедлива оценка (K — некоторая постоянная)

$$|\, M\,[\varphi\,(t + \Delta t) - \varphi\,(t)\, /\, x_0,\, y_0,\, B]\,| \leqslant K \Delta t\, P\, \{x^*(t) \in L \diagdown S\, /\, x_0,\, y_0\} + o\,(\Delta t) \quad (2.24)$$

Наконец, из определения функции $\varphi\,(t)$ ясно, что

$$M\,[\varphi\,(t + \Delta t) - \varphi\,(t)\, /\, x_0,\, y_0,\, C] = 0 \qquad (2.25)$$

Таким образом, из оценок (2.23), (2.24) и (2.25), следует, что функция $\varphi_t = M\,[\varphi\,(t)\, /\, x_0,\, y_0]$ непрерывна справа по t равномерно в области $t \geqslant t_0$ и, следовательно, она непрерывна в этой области. Учитывая теперь, что

$$\lim P\, \{x^*(t) \in L \diagdown S\, /\, x_0,\, y_0\} = 0 \quad \text{при } \nu \to 0$$

получим равенство (2.18).

§ 3. В качестве примера рассмотрим уравнение второго порядка

$$x^{\cdot\cdot} + a x^{\cdot} + b x = 0 \qquad (3.1)$$

которое эквивалентно системе

$$x^{\cdot} = z, \qquad z^{\cdot} = -\, bx - az \qquad (3.2)$$

Здесь $a(y)$ и $b(y)$ — известные ограниченные функции переменной y, а $y\,(t)$ описывает однородный марковский случайный процесс с конечным числом состояний $Y\, \{y_1, \ldots, y_r\}$, причем элементы матрицы перехода $p_{ij}\,(\Delta t)$ за время Δt задаются формулами

$$p_{ij}\,(\Delta t) = \alpha_{ij}\, \Delta t + o\,(\Delta t) \qquad (i \neq j,\; \alpha_{ij} = \text{const},\; i, j = 1, \ldots, r) \qquad (3.3)$$

Здесь $p_{ij}\,(\Delta t)$ — есть вероятность смены значений $y_i \to y_j$ за время Δt.

Известно, что в детерминированном случае необходимым и достаточным условием устойчивости системы (3.2) при $a = \text{const}$ и $b = \text{const}$ будет выполнение неравенств $a > 0$, $b > 0$. Предположим, что

$$b\,(y) > 0 \quad \text{при } y \in Y \qquad (3.4)$$

Введем обозначения

$$a(y_k) = a_k, \qquad b(y_k) = b_k > 0 \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

Рассмотрим теперь определенно положительную функцию

$$v(x, z, k) = x^2 + \frac{1}{b_k} z^2 \tag{3.5}$$

Для вычисления $dM [v] / dt$ в силу уравнений (3.2) в точке $\{x, z, k\}$ воспользуемся равенством ([11], стр. 812])

$$\frac{dM [v]}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} z + \frac{\partial v}{\partial z}(- b_k x - a_k z) + \sum_{j \neq k}^{r} \alpha_{kj} [v(x, k, j) - v(x, z, k)] \tag{3.6}$$

После преобразований будем иметь

$$\frac{dM [v]}{dt} = - z^2 \left\{ \frac{2a_k}{d_k} - \sum_{j \neq k}^{r} \left(\frac{1}{b_j} - \frac{1}{b_k} \right) \alpha_{kj} \right\} \tag{3.7}$$

Потребуем теперь выполнения условий

$$\frac{2a_k}{b_k} - \sum_{j \neq k}^{r} \left(\frac{1}{b_j} - \frac{1}{b_k} \right) \alpha_{kj} > 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{3.8}$$

Тогда $dM [v] / dt$ будет знакоотрицательной, причем может обращаться в нуль на прямой $z = 0$. Построим функцию

$$F(x, z) = - xz \tag{3.9}$$

Тогда можно указать такую область G, содержащую прямую $z = 0$, что $dM[F]/dt$ в силу уравнений (3.2) будет определенно положительной в этой области G, так как при $z = 0$

$$\frac{dM [F]}{dt} = b_k x^2 > 0$$

Итак, для асимптотической устойчивости по вероятности в целом системы (3.2) достаточно выполнения условий (3.4) и (3.8). Из этих условий, в частности, видно, что асимптотическая устойчивость по вероятности в целом может иметь место и в том случае, когда некоторые из возможных значений a_k будут отрицательны или равны нулю.

Автор благодарит Н. Н. Красовского, предложившего тему и высказавшего ряд весьма ценных замечаний.

Поступила 6 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М. — Л., 1950.
2. Четаев Н. Г. О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1938, т. 98, кн. 9, вып. 3.
3. Матросов В. М. Об устойчивости движения. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 5.
4. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. Докл. АН СССР, 1952, т. 86, вып. 3.
5. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. ИЛ, 1956.
6. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Гостехиздат, М. — Л., 1954.
7. Ворович И. И. Об устойчивости движения при случайных возмущениях. Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, т. XX, № 1.
8. Bertram I. E. a. Sarachik P. E. Stability of Circuits With Rondomly Time — Varying Parameters, Proc. Int. Symp. on Circuit and Information Theory, Los Angeles, Calif., 1959.
9. Новоселов В. С. Исследование вероятностной устойчивости на примере автоматического регулирования курса самолета. Автоматика и телемеханика, 1960, т. XXI, № 6.
10. Хасьминский Р. З. Об устойчивости траекторий марковского процесса. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 6.
11. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
12. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
13. Дынкин Е. Б. Инфинитезимальные операторы марковских процессов. Теор. вероятн. и ее применения, 1956, т. 1, вып. 1.