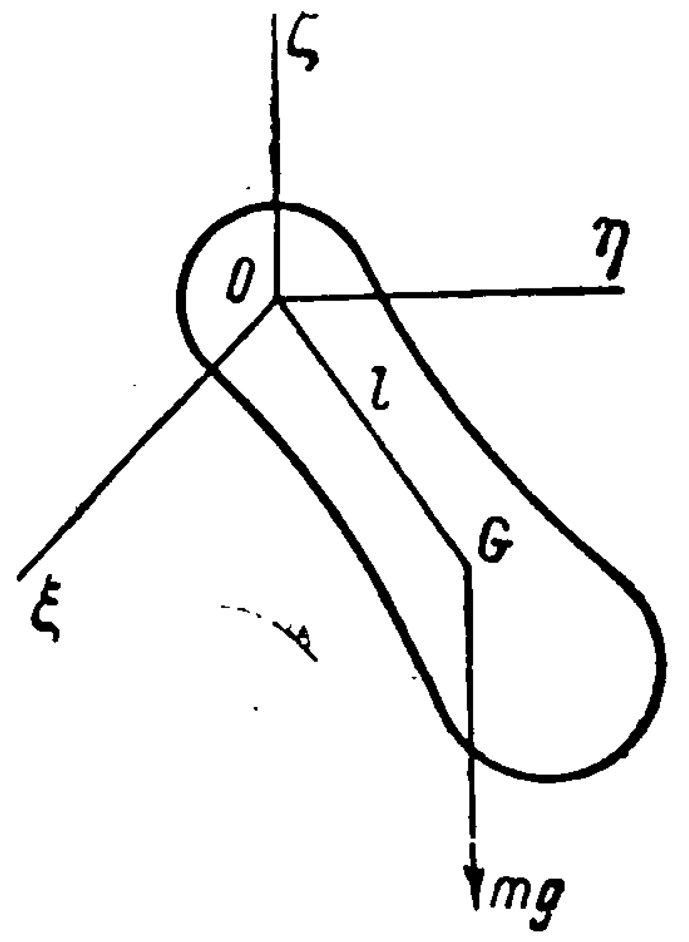
# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НЕВОЗМУЩАЕМОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Д. М. Климов (Москва)

Рассматривается движение известного [1] невозмущаемого физического маятника. Устанавливается условие устойчивости его движения (при движении точки подвеса маятника по окружности на поверхности неподвижной сферы с постоянной скоростью).

1. Рассмотрим движение физического маятника, у которого точка подвеса $O$ движется по поверхности неподвижной сферы $S$ радиуса $R$, окружающей Землю. Будем считать, что силы тяготения маятника к Земле приводятся к единственной силе $mg$, приложенной в центре тяжести $G$ (фиг. 1) и направленной по геоцентрической вертикали (нормали к поверхности сферы). Расстояние $OG$ обозначим через $l$.




Фиг. 1

Будем изучать движение маятника в поступательно движущейся системе координат $\xi\eta\zeta$ с центром в точке подвеса $O$. Введем еще трехгранник Дарбу $x_0$, $y_0$, $z_0$. Его ось $x_0$ направим по вектору $\mathbf{V}$ абсолютной скорости точки подвеса $O$, ось $z_0$ — по нормали к сфере. С маятником свяжем оси $x$, $y$, $z$ таким образом, чтобы направление оси $z$ совпало с направлением линии $GO$. Положение маятника относительно трехгранника Дарбу определим углами $\psi$, $\theta$ и $\varphi$ (фиг. 2).

Предположим, что моменты инерции маятника относительно осей $x$ и $y$ — главные и равны $mlR$; момент инерции маятника относительно оси $z$ обозначим через $C$.

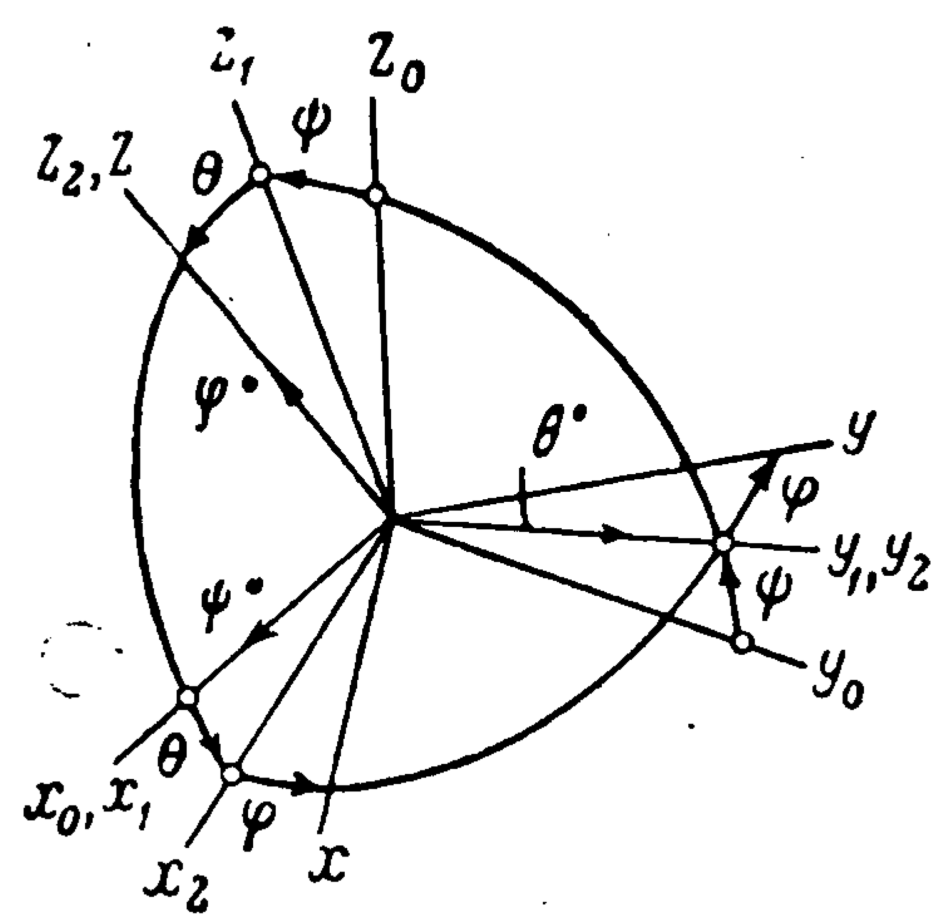
Такой маятник является невозмущаемым, т. е. при произвольном движении его точки подвеса по неподвижной сфере $S$ ось $z$ направлена по геоцентрической вертикали [1].

Проекции угловой скорости $\mathbf{u}_0$ трехгранника Дарбу на его оси имеют вид

$$p_0 = 0, \quad q_0 = \frac{V(t)}{R}, \quad r_0 = r_0(t) \qquad (1.1)$$

Здесь $q_0$ и $r_0$ считаются известными функциями времени. Вычисляя проекции угловой скорости трехгранника $x_2y_2z_2$ на его оси (фиг. 2), находим

$$\begin{aligned} p_2 &= q_0 \sin\psi \sin\theta - r_0 \cos\psi \sin\theta + \psi^{\cdot} \cos\theta \\ q_2 &= q_0 \cos\psi + r_0 \sin\psi + \theta^{\cdot} \qquad (1.2) \\ r_2 &= - q_0 \sin\psi \cos\theta + r_0 \cos\psi \cos\theta + \psi^{\cdot} \sin\theta \end{aligned}$$




Фиг. 2

Здесь и в дальнейшем точка означает дифференцирование по времени. Обозначим вектор угловой скорости маятника через $\omega$. Имеем

$$\omega_{x_2} = p_2, \qquad \omega_{y_2} = q_2, \qquad \omega_{z_2} = r_2 + \varphi^{\cdot} \qquad (1.3)$$

Уравнения движения маятника запишем в следующей форме

$$\begin{aligned} mlRp_2^{\cdot} + Cq_2 (r_2 + \varphi^{\cdot}) - mlRq_2r_2 &= M_{x_2} \\ mlRq_2^{\cdot} + mlRp_2r_2 - Cp_2 (r_2 + \varphi^{\cdot}) &= M_{y_2} \qquad (1.4) \\ [C (r_2 + \varphi^{\cdot})]^{\cdot} &= M_{z_2} \end{aligned}$$

Здесь $M_{x_2}$, $M_{y_2}$, $M_{z_2}$ — проекции момента внешних сил, в число которых входят силы инерции переносного движения.

Проводя несложные выкладки и учитывая (1.1), находим

$$M_{x_2} = -mgl\sin\psi - mlRq_0r_0\cos\psi + mlRq_0^2\sin\psi, \qquad M_{z_2} = 0 \tag{1.5}$$

$$M_{y_2} = -mgl\cos\psi\sin\theta + mlRq_0^{\cdot}\cos\theta + mlRq_0r_0\sin\psi\sin\theta +$$
$$+ mlRq_0^2\cos\psi\sin\theta$$

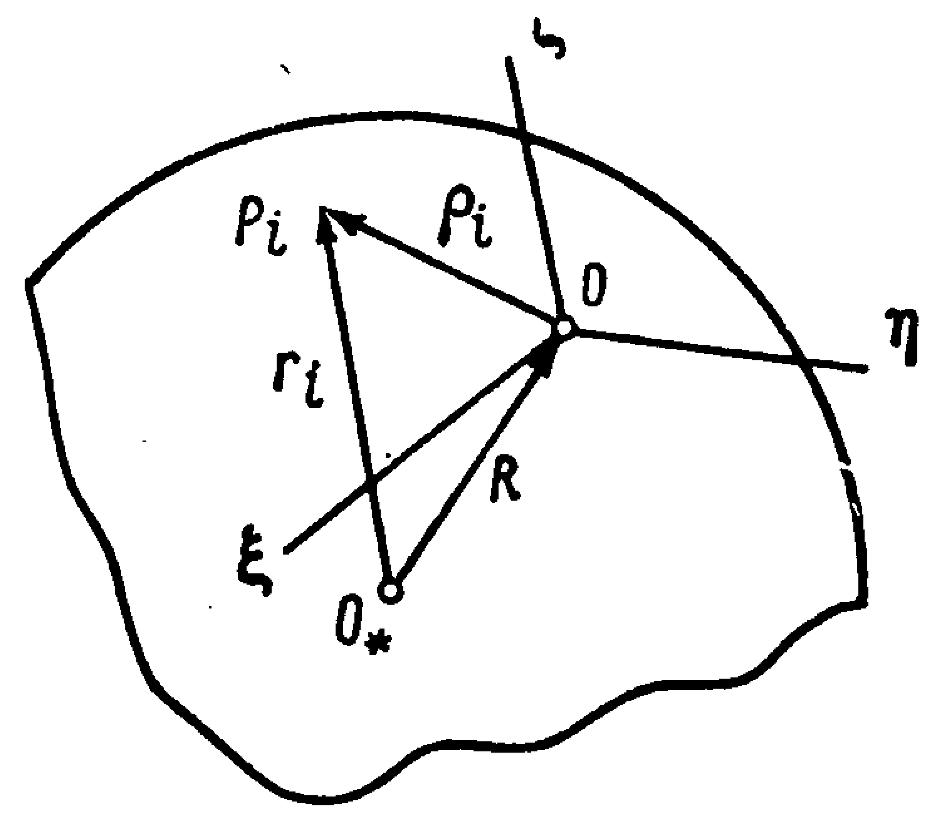
2. Кинетическая энергия физического маятника (фиг. 3) имеет вид

$$T = {}^1/_2\,\Sigma m_i \mathbf{r}_i^{\cdot 2} = {}^1/_2\,\Sigma m_i(\mathbf{R}^{\cdot} + \boldsymbol{\varrho}_i^{\cdot})^2$$

Так как $\varrho_i^{\cdot} = \omega \times \varrho_i$, то, обозначая $OG = \mathbf{l}$, имеем

$$T = {}^1/_2\,mV^2 + m\mathbf{V}\cdot(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{l}) + m\mathbf{V}\cdot[(\omega - \mathbf{u}_0)\times \mathbf{l}] +$$
$$+ {}^1/_2\,mlR\,(p_2^2 + q_2^2) + {}^1/_2\,C\,(r_2 + \varphi^{\cdot})^2 \tag{2.1}$$

Предположим теперь, что точка подвеса маятника движется по дуге окружности, лежащей на поверхности неподвижной сферы, с постоянной по величине скоростью. В этом случае угловая скорость трехгранника Дарбу $u_0$ постоянна, а кинетическая энергия маятника не зависит явно от времени.




Фиг. 3

Так как силы тяготения потенциальны, то имеет место обобщенный интеграл энергии [2] вида

$$T_2 - T_0 + \Pi = h \tag{2.2}$$

Здесь $T_2$ — часть кинетической энергии, которая является квадратичной формой от обобщенных скоростей, $T_0$ — часть кинетической энергии, не зависящая от обобщенных скоростей, $\Pi$ — потенциальная энергия силы тяготения.

Учитывая (1.1)—(1.3), (2.1), запишем интеграл (2.2) в следующей форме

$$W_1 = {}^1/_2\,mlR\,(\psi^{\cdot 2}\cos^2\theta + \theta^{\cdot 2}) + {}^1/_2C\,(\psi^{\cdot}\sin\theta + \varphi^{\cdot})^2 + \tag{2.3}$$
$$+ mlRq_0\,(q_0\cos\psi + r_0\sin\psi)\cos\theta - {}^1/_2\,mlR\,(q_0\sin\psi - r_0\cos\psi)^2\sin^2\theta -$$
$$- {}^1/_2\,mlR\,(q_0\cos\psi + r_0\sin\psi)^2 - {}^1/_2\,C\,(q_0\sin\psi - r_0\cos\psi)^2\cos^2\theta - mgl\cos\psi\cos\theta = h$$

Из третьего уравнения системы (1.4) получим другой первый интеграл

$$W_2 = C\,(r_0 + \varphi^{\cdot}) = H \tag{2.4}$$

3. Используя (1.1) — (1.5), напишем уравнения движения маятника для случая $\mathbf{u}_0 = \mathrm{const}$. Имеем (3.1)

$$mlR\,(q_0\psi^{\cdot}\cos\psi\sin\theta + q_0\theta^{\cdot}\sin\psi\cos\theta + r_0\psi^{\cdot}\sin\psi\sin\theta - r_0\theta^{\cdot}\cos\psi\cos\theta +$$
$$+ \psi^{\cdot\cdot}\cos\theta - \psi^{\cdot}\theta^{\cdot}\sin\theta) + C\,(q_0\cos\psi + r_0\sin\psi + \theta^{\cdot})\,(-q_0\sin\psi\cos\theta +$$
$$+ r_0\cos\psi\cos\theta + \psi^{\cdot}\sin\theta + \varphi^{\cdot}) - mlR\,(q_0\cos\psi + r_0\sin\psi + \theta^{\cdot})\cdot(-q_0\sin\psi\cos\theta +$$
$$+ r_0\cos\psi\cos\theta + \psi^{\cdot}\sin\theta) = -mgl\sin\psi - mlR\,q_0r_0\cos\psi + mlRq_0^2\sin\psi$$

$$mlR\,(-q_0\psi^{\cdot}\sin\psi + r_0\psi^{\cdot}\cos\psi + \theta^{\cdot\cdot}) + mlR\,(q_0\sin\psi\sin\theta - r_0\cos\psi\sin\theta + \psi^{\cdot}\cos\theta)\times$$
$$\times(-q_0\sin\psi\cos\theta + r_0\cos\psi\cos\theta + \psi^{\cdot}\sin\theta) - C\,(q_0\sin\psi\sin\theta -$$
$$- r_0\cos\psi\sin\theta + \psi^{\cdot}\cos\theta)\,(-q_0\sin\psi\cos\theta + r_0\cos\psi\cos\theta + \psi^{\cdot}\sin\theta + \varphi^{\cdot}) =$$
$$= -mgl\cos\psi\sin\theta + mlRq_0r_0\sin\psi\sin\theta + mlRq_0^2\cos\psi\sin\theta$$

$$[C\,(-q_0\sin\psi\cos\theta + r_0\cos\psi\cos\theta + \psi^{\cdot}\sin\theta + \varphi^{\cdot})]^{\cdot} = 0$$

Система нелинейных уравнений (3.1) имеет частное решение

$$\psi = 0, \quad \theta = 0, \quad \varphi^{\cdot} + r_0 = 0 \tag{3.2}$$

Исследуем его устойчивость. Для этого положим в возмущенном движении

$$\psi = x_1, \quad \theta = x_2, \quad \psi^{\cdot} = x_3, \quad \theta^{\cdot} = x_4, \quad \varphi^{\cdot} = -r_0 + x_5$$

и рассмотрим функцию $W = 2W_1 + 2r_0W_2$.

Разложив ее в ряд по степеням $x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 5$), получим

$$W = W(0) + (mgl - Cq_0^2 - mlRr_0^2)\, x_1^2 + (mgl - mlRq_0^2 - mlRr_0^2)\, x_2^2 + \\ + mlR\,(x_3^2 + x_4^2) + Cx_5^2 + \ldots$$

Здесь $W(0)$ — значение функции $W$, когда $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, 5$), точками обозначены члены высшего порядка малости.

Функция $W - W(0)$ будет определенно положительной для достаточно малых $x_i$, если

$$mgl - Cq_0^2 - mlRr_0^2 > 0, \qquad mgl - mlRq_0^2 - mlRr_0^2 > 0 \tag{3.3}$$

Так как ее производная в силу уравнений возмущенного движения равна нулю, то при восполнении неравенств (3.3) невозмущенное движение (3.2) будет устойчиво.

Если $C > mlR$, то неравенства (3.3) заменяются одним условием

$$mgl > Cq_0^2 + mlRr_0^2$$

Если $C \leqslant mlR$, то неравенства (3.3) приводятся к условию

$$u_0 < \nu \qquad (\nu^2 = g/R) \tag{3.4}$$

которое совпадает с условием устойчивости движения гирогоризонткомпаса [3].

Несложно показать, что условие (3.4) является необходимым. Для этого нужно выписать необходимые условия устойчивости линеаризованной системы уравнений (3.1) при наличии малых диссипативных сил.

Поступила 8 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.
2. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики, ч. II. ОНТИ НКТП СССР, М.— Л., 1937.
3. Жбанов Ю. К. Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. Я. Кац (Свердловск)

Рассматривается задача об устойчивости по вероятности в целом стохастических систем дифференциальных уравнений. Дается критерий устойчивости, основанный на использовании двух функций Ляпунова [1].

Идея использования двух функций Ляпунова принадлежит Н. Г. Четаеву [2]. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений критерии устойчивости, построенные на применении двух функций, доказаны в [3].

Теорема, доказанная ниже для стохастических систем, аналогична той, которая была доказана для обыкновенных дифференциальных уравнений [4].

§ 1. Пусть дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$dx\,/\,dt = f\,(t,\ x,\ y\,(t)) \tag{1.1}$$

где $x$ — $n$-мерный вектор фазовых координат системы, вектор-функция $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ непрерывна по всем переменным в области

$$-\infty < x_i < +\infty, \qquad t \geqslant 0, \qquad y \in Y \tag{1.2}$$

удовлетворяет в этой области условиям Липшица по переменным $x_j$, $y$ и ограничена при всех $y \in Y$ в каждой конечной области $\|x\| \leqslant N$ ($\|x\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$).

Функция $y(t)$ описывает марковский случайный процесс [5], который будем предполагать либо чисто разрывным ([6], стр. 292), либо непрерывным ([6], стр. 284). Ограничимся рассмотрением лишь скалярной функции $y(t)$. Результаты обобщаются на случай, когда $y(t)$ — $m$-мерный вектор без существенных изменений в рассуждениях.