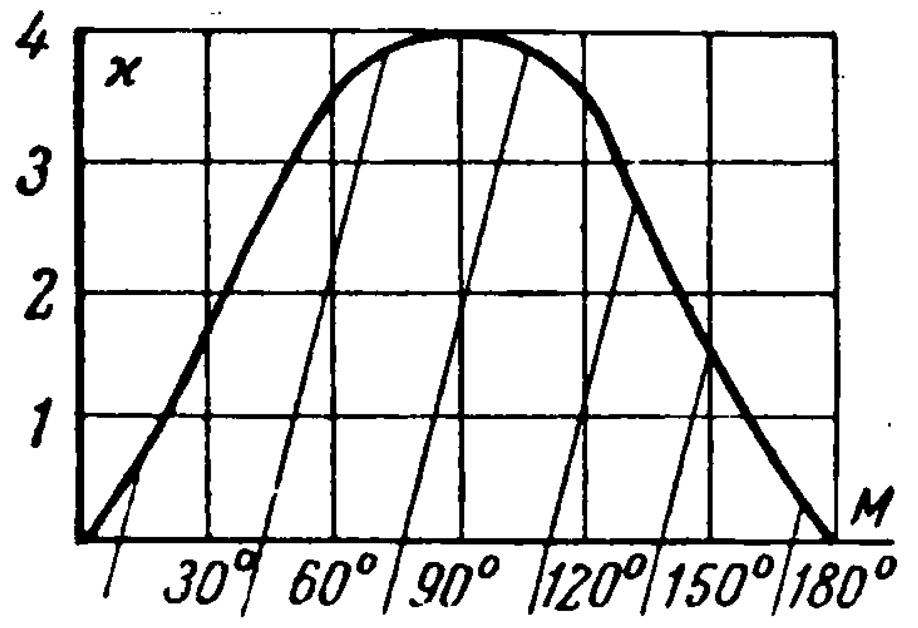
Рассмотрим некоторую плоскость тела, выберем в этой плоскости некоторое направление, которое принимаем за ось полярной системы координат ρ, φ. Для каждого значения угла φ отложим ρ, равное пределу текучести в направлении, определяемом этим углом. Тогда в заданной плоскости тела получим кривую (фиг. 3), уравнение которой

$$\rho = k(\varphi) \qquad (22)$$

Неравенство (21) требует, чтобы

$$\sin^3 \mu + 3 \sin \mu \geqslant \varkappa \qquad (23)$$

где μ — угол между направлением касательной к кривой и радиус-вектором (фиг. 3), а $\varkappa = k(\varphi) / R$ — безразмерная кривизна кривой. На фиг. 4 область изменения параметров $\varkappa$ и μ показана штриховкой.



Фиг. 4

Таким образом, постулат Друккера накладывает ограничения на выпуклые относительно начала координат кривые (22), а на участках, где эти кривые вогнуты, неравенство (23) выполнено при любых $\mu > 0$.

Поступила 15 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Drucker D. C. Some implications of work hardening and ideal plasticity. Quart. Appl. Math., 1950, 7.
2. Drucker D. C. A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. Proc. First U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1952.
3. Ивлев Д. Д. К теории идеальной пластической анизотропии. ПММ, 1959, т. 23, № 26
4. Koiter W. T. General theorems for elastic-plastic solid. Progress in solid Mechanics, ch. 4, North-Holland, 1960.

О ЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ДЛЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ЗАКЛЮЧАЮЩЕГО ВНУТРИ СЕБЯ ПОДВИЖНЫЕ МАССЫ

А. А. Богоявленский

(Москва)

1. Знание циклического перемещения [1] механической системы позволяет находить первые интегралы. Это обстоятельство может дать возможность проинтегрировать уравнения движения или, по крайней мере, понизить порядок этих дифференциальных уравнений. Для нахождения циклического перемещения необходимо ввести в рассмотрение группу бесконечно-малых преобразований С. Ли, такую, чтобы хотя бы один (в лучшем случае все) оператор группы был бы перестановочен (коммутативен) со всеми другими операторами.

Привлечение методов теории групп С. Ли для нахождения первых интегралов имеет преимущество перед методом Лагранжа — Раусса в том, что позволяет заметить более сложные по структуре перемещения механической системы, чем перемещения, описываемые обычными лагранжевыми координатами. Такие циклические перемещения, с другой стороны, упрощают дело, позволяя находить первые интегралы.

Естественно, что перемещения, связанные с лагранжевыми координатами, являются частным случаем перемещений, описываемых операторами группы.

2. Введем в рассмотрение группу бесконечно-малых преобразований С. Ли следующим образом.

Пусть положение твердого тела, имеющего неподвижную точку, определяется девятью направляющими косинусами между двумя прямоугольными системами координат, имеющими общее начало в неподвижной точке, одна из которых x_1, x_2, x_3 неподвижна в пространстве, а вторая x^1, x^2, x^3 неизменно связана с твердым телом.

Обозначим эти направляющие косинусы между неподвижной осью x_i и осью, связанной с телом x^k, через β_i^k. Примем величины β_i^k (которые зависимы между собой) за переменные Пуанкаре [1, 2]. За параметры действительных перемещений возьмем выражения

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\psi'}{a} - \frac{\varphi'}{b}\right), \qquad \eta_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\psi'}{a} + \frac{\varphi'}{b}\right), \qquad \eta_3 = \frac{\theta'}{\sin\theta} \tag{1}$$

Здесь a, b — постоянные ($a \neq 0$, $b \neq 0$), остальные обозначения общепринятые.

Для переменных Пуанкаре можно записать дифференциальные зависимости, легко проверяемые через углы Эйлера

$$\frac{d\beta_i^k}{dt} = (-1)^k b\beta_i^{3-k}(\eta_1 - \eta_2) + (-1)^i a\beta_{3-i}^k(\eta_1 + \eta_2) + (\beta_i^3\beta_3^k - \delta_i^k)\,\eta_3$$

$$(i, k = 1, 2, 3) \tag{2}$$

Здесь положено $\beta_i^\circ = \beta_0^k = 0$

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k = 3 \\ 0 & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}$$

Изменение функции положения нашей механической системы $f(t, \beta_i^k)$ на действительном перемещении системы определяется

$$df = \left(X_0 + \sum_{s=1}^{3} \eta_s X_s f\right) dt$$

где операторы инфенитезимальной группы С. Ли действительных перемещений суть

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{i,k} [(-1)^k b\beta_i^{3-k} + (-1)^i a\beta_{3-i}^k] \frac{\partial}{\partial\beta_i^k} \\ X_2 &= \sum_{i,k} [(-1)^{3-k} b\beta_i^{3-k} + (-1)^i a\beta_{3-i}^k] \frac{\partial}{\partial\beta_i^k} \\ X_3 &= \sum_{i,k} (\beta_i^3\beta_3^k - \delta_i^k) \frac{\partial}{\partial\beta_i^k} \qquad (i, k = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{3}$$

Значения δ_i^k и β с нулевым верхним или нижним индексом те же самые, как и в уравнениях (2).

Операторы подгруппы возможных перемещений

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3 \tag{4}$$

так же, как и группы действительных перемещений, перестановочны, т. е.

$$(X_i, X_k) = 0 \quad (X_i, X_0) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{5}$$

Операторы подгруппы возможных перемещений можно записать в другом виде

$$\begin{aligned} X_1 &= a \sum_{i=1}^{3} \left(\beta_1^i \frac{\partial}{\partial\beta_2^i} - \beta_2^i \frac{\partial}{\partial\beta_1^i}\right) + b \sum_{i=1}^{3} \left(\beta_i^1 \frac{\partial}{\partial\beta_i^2} - \beta_i^2 \frac{\partial}{\partial\beta_i^1}\right) \\ X_2 &= a \sum_{i=1}^{3} \left(\beta_1^i \frac{\partial}{\partial\beta_2^i} - \beta_2^i \frac{\partial}{\partial\beta_1^i}\right) - b \sum_{i=1}^{3} \left(\beta_i^1 \frac{\partial}{\partial\beta_i^2} - \beta_i^2 \frac{\partial}{\partial\beta_i^1}\right) \\ X_3 &= \sum_{i,k=1}^{3} \beta_i^3\beta_3^k \frac{\partial}{\partial\beta_i^k} - \frac{\partial}{\partial\beta_3^3} \end{aligned} \tag{6}$$

3. Применим понятие циклического перемещения для нахождения первых интегралов в задаче о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку и заключающего внутри себя подвижные массы (гироскоп или жидкость, циркулирующую в односвязной или многосвязных полостях).Эта задача рассматривалась Нейманом [4], Жуковским [5], Сретенским [6], Харламовым [7] и другими авторами.

Живая сила и силовая функция рассматриваемой механической системы могут быть записаны

$$T = {}^1/_2\, (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + Pp + Qq + Rr + S, \qquad U = U\,(\theta, \psi, \varphi) \tag{7}$$

Здесь, наряду с обычными обозначениями, введены P, Q, R, S, не зависящие от β_i^k, характеризующие движения подвижных масс, которые заключает в себе твердое тело. Переменные p, q, r можно выразить через переменные Пуанкаре

$$p = a\beta_3^1\,(\eta_1 + \eta_2) + \beta_3^2\eta_3, \qquad q = a\beta_3^2\,(\eta_1 + \eta_2) - \beta_3^1\eta_3 \tag{8}$$
$$r = a\beta_3^3\,(\eta_1 + \eta_2) - b\,(\eta_1 - \eta_2)$$

Подставляя указанные значения p, q, r в (7), получим живую силу системы в переменных Пуанкаре

$$T = {}^1/_2\,\{[a^2\theta + b\,(b - 2a\beta_3^3)\,C]\,\eta_1^2 + [a^2\theta + b\,(b + 2a\beta_3^3)\,C]\,\eta_2^2 +$$
$$+ [A\,(\beta_3^2)^2 + B\,(\beta_3^1)^2]\,\eta_3^2 + 2\,(a^2\theta - b^2C)\,\eta_1\eta_2 + 2a\,(A - B)\,\beta_3^1\beta_3^2\eta_1\eta_3 +$$
$$+ 2a\,(A - B)\,\beta_3^1\beta_3^2\,\eta_2\eta_3\} + (aN - bR)\,\eta_1 + (aN + bR)\,\eta_2 + (P\beta_3^2 - Q\beta_3^1)\,\eta_3 + S \tag{9}$$

Здесь

$$\theta = A\,(\beta_3^1)^2 + B\,(\beta_3^2)^2 + C\,(\alpha_3^3)^2, \qquad N = P\beta_3^1 + Q\beta_3^2 + R\beta_3^3$$

Из переменных Пуанкаре в выражение живой силы вошли только величины β с нижним индексом, равным 3. Поэтому при вычислении выражений $X_1\,(T)$ и $X_2\,(T)$ в операторах будут иметь значения только два члена

$$X_1 = b\left(\beta_3^1\frac{\partial}{\partial\beta_3^2} - \beta_3^2\frac{\partial}{\partial\beta_3^1}\right) + \ldots, \qquad X_2 = -\,b\left(\beta_3^1\frac{\partial}{\partial\beta_3^2} - \beta_3^2\frac{\partial}{\partial\beta_3^1}\right) + \ldots$$

Перемещения X_1, X_2 будут циклическими по Н. Г. Четаеву в силу (5), что всегда выполняется, и требования

$$X_1\,(L) = 0, \qquad X_2\,(L) = 0$$

соответственно. Последние могут быть удовлетворены, если положить

$$X_i\,(T) = 0, \quad X_i\,(U) = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

Условие $X_i\,(T) = 0$ выполняется, если ввести ограничение на систему

$$A = B, \quad P = Q = 0 \tag{10}$$

Рассмотрим условие $X_1\,(U) = 0$, которое в переменных Эйлера запишется

$$a\,\frac{\partial U}{\partial\psi} - b\,\frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0 \tag{11}$$

При выполнении условий (10) и (11) получаем интеграл циклического перемещения X_1

$$\frac{\partial T}{\partial\eta_1} = [a^2\theta + b\,(b - 2a\beta_3^3)\,C]\,\eta_1 + (a^2\theta - b^2C)\,\eta_2 + (a\beta_3^3 - b)R = \mathrm{const}$$

В переменных Эйлера этот интеграл будет иметь вид

$$a\,[A\sin\theta\,(p\sin\varphi + q\cos\varphi) + (Cr + R)\cos\theta\,] - b\,(Cr + R) = \mathrm{const} \tag{12}$$

В частном случае при $R = 0$, для движения только твердого тела вокруг неподвижной точки под действием заданных сил, такой интеграл другим способом был найден Д. Н. Горячевым [3].

Если потребовать, чтобы перемещение X_2 было циклическим, то можно найти интеграл, который получается при выполнении условий (10) и $X_2\,(U) = 0$, которое может быть записано

$$a\frac{\partial U}{\partial\psi}+b\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0$$

Этот интеграл имеет вид

$$a\,[A\sin\theta\,(p\sin\varphi+q\cos\varphi)+(Cr+R)\cos\theta\,]+b\,(Cr+R)=\mathrm{const}\qquad(13)$$

Требование одновременного наличия циклических перемещений X_1 и X_2 приводит к условиям

$$a\frac{\partial U}{\partial\psi}\mp b\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0\qquad(14)$$

(условие (10) при этом сохраняется), и к интегралам

$$a\,[A\sin\theta\,(p\sin\varphi+q\cos\varphi)+(Cr+R)\cos\theta]\mp b\,(Cr+R)=\mathrm{const}\qquad(15)$$

Если взять сумму и разность условий (14) и интегралов (15), то условия (14) и интегралы (15) распадаются на части, выписывать которые нет необходимости.

Интегрирование уравнений и изучение движения далее можно провести аналогично хорошо изученному случаю Лагранжа движения тяжелого твердого тела.

Кроме указанных интегралов, уравнения движения имеют известный интеграл живой силы, который не принадлежит к категории интегралов циклических перемещений.

4. После того как найден интеграл циклического перемещения, можно просто произвести проверку этого интеграла (12), используя условия (10), (11) и дифференциальные уравнения движения механической системы

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr+(Rq-Qr)=\cos\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta}+\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}-\sin\varphi\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}$$

$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp+(Pr-Rp)=-\sin\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}-\cos\varphi\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}$$

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq+(Qp-Pq)=\frac{\partial U}{\partial\varphi}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=p\cos\varphi-q\sin\varphi,\quad\frac{d\psi}{dt}=\frac{p\sin\varphi+q\cos\varphi}{\sin\theta},\quad\frac{d\varphi}{dt}=r-\operatorname{ctg}\theta\,(p\sin\varphi+q\cos\varphi)$$

Найденные результаты можно также изложить при тех же параметрах возможных перемещений, приняв за переменные Пуанкаре углы Эйлера.

Настоящая статья была уже в наборе, когда автору стала известна работа И. А. Кейса [8], в которой другим способом получен интеграл вида (12) методом Д. Н. Горячева.

Поступила 14 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре. ПММ, 1941, т. 5, вып. 2; Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд. АН СССР, стр. 201—210.
2. Poincaré H. Sur une forme nouvelle des équations de la mechanique. Compt. rend. Acad. sci. Paris, 1901, v. 132, p. 369—371.
3. Горячев Д. Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава, 1910.
4. Neumann. Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig, 1883.
5. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., 1936.
6. Сретенский Л. Н. О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом. Вестн. МГУ, 1963, № 3, стр. 56—67.
7. Харламов П. В. Один случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего полости, заполненные жидкостью. Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 4.
8. Кейс И. А. О существовании некоторых интегралов уравнений движения гиростата, закрепленного в одной точке. Вестн. МГУ, 1963, № 6.