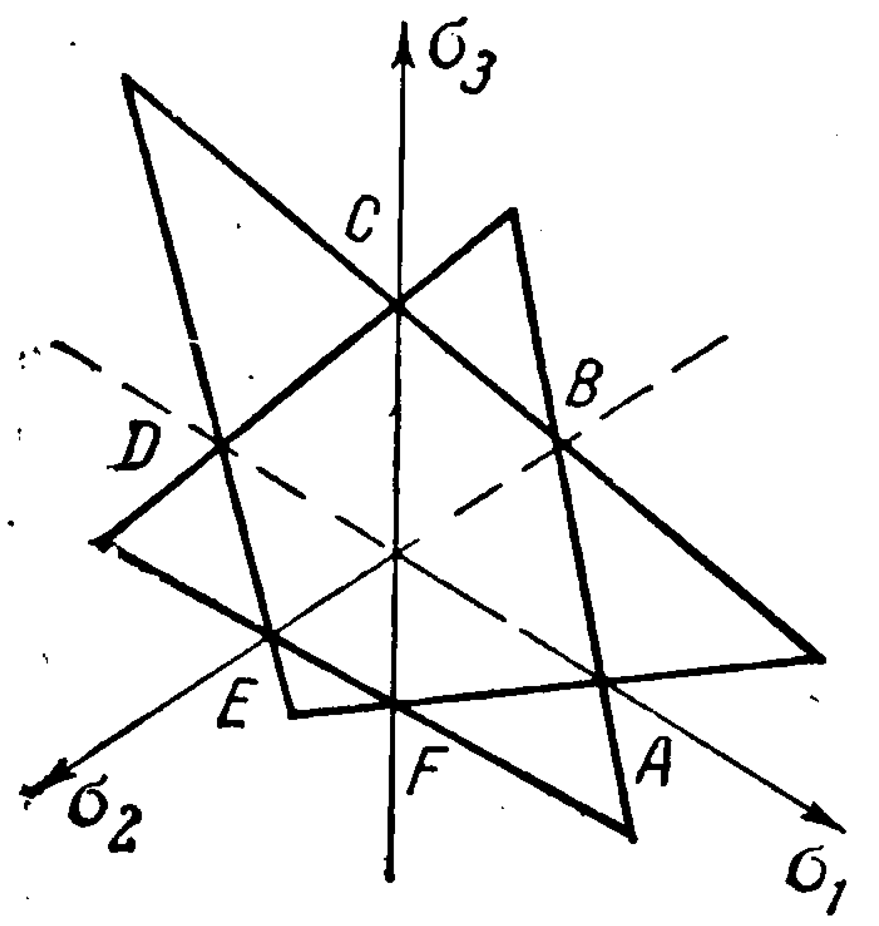
О СЛЕДСТВИЯХ ПОСТУЛАТА ДРУККЕРА ДЛЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Г. И. Быковцев
(Воронеж)

Рассматриваются ограничения, накладываемые постулатом Друккера [1,2] на возможные пределы текучести при растяжении или сжатии анизотропных пластических сред.

Рассмотрим анизотропное упруго-пластическое тело, причем в дальнейшем несущественно, является ли анизотропия начальной или приобретена в результате некоторой истории деформирования. Будем предполагать, что среднее давление не влияет на пластические свойства материала.

Пусть тело находится под действием некоторой системы массовых сил и поверхностных нагрузок, вызывающих в теле напряженное состояние σ_{ij}^*. Далее пусть благодаря некоторому внешнему воздействию к телу прикладывается, а затем снимается дополнительная нагрузка. Постулат Друккера [1,2] требует, чтобы работа, производимая внешним воздействием при нагружении, была положительна, а работа, производимая внешним воздействием за полный цикл нагружения и разгрузки, была неотрицательной. Пусть σ_{ij} — напряженное состояние тела после приложения внешнего воздействия, а ε_{ij} — скорости пластических деформаций. Из постулата Друккера следует



Фиг. 1

$$(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^*)\varepsilon_{ij}\geqslant 0 \tag{1}$$

Если поверхность текучести задана в виде

$$\varphi(\sigma_{ij})=1 \tag{2}$$

то из равенства (1) следует, что в шестимерном пространстве поверхность (2) будет невогнутой, а скорости пластических деформаций определяются ассоциированным законом течения

$$\varepsilon_{ij}=\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ij}} \tag{3}$$

Поверхность текучести любого пластически анизотропного тела, нечувствительного к гидростатическому давлению, в некоторый фиксированный момент времени можно записать в виде

$$f(\sigma_1-\sigma_2,\ \sigma_1-\sigma_3,\ \sigma_2-\sigma_3,\ l_i,\ m_i,\ n_i)=1 \tag{4}$$

где l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы главных направлений, таблица которых приведена справа. Если два главных из напряжений равны, то в плоскости, в которой лежат эти главные напряжения, все направления будут главными, и поэтому условие пластичности не должно зависеть от направляющих косинусов этих направлений, т. е. должны иметь место равенства

	1	2	3
x	l_1	m_1	n_1
y	l_2	m_2	n_2
z	l_3	m_3	n_3

$$\partial f/\partial n_i=\partial f/\partial m_i=0 \quad \text{при } \sigma_2=\sigma_3$$
$$\partial f/\partial l_i=\partial f/\partial m_i=0 \quad \text{при } \sigma_1=\sigma_2$$
$$\partial f/\partial l_i=\partial f/\partial n_i=0 \quad \text{при } \sigma_1=\sigma_3$$

Если известны пределы текучести при растяжении и сжатии в трех взаимно ортогональных направлениях, то в девиаторной плоскости фиг. 1 известны шесть точек кривой текучести. Из условия невогнутости поверхности текучести следует, что при этом все возможные условия пластичности располагаются между шестиугольником $ABCDEF$ и внешней шестиугольной звездой, полученной продолжением сторон шестиугольника, причем условие пластичности в виде шестиугольника $ABCDEF$, предложенное в работе [3], определяет нижнюю границу для комбинаций нагрузок, при которой тело переходит в пластическое состояние.

Теперь для определения диапазона изменения возможных условий пластичности остается найти ограничения, которые накладывает постулат Друккера на пределы текучести при растяжении и сжатии во всевозможных направлениях, т. е. на функции $k(\alpha_i)$ и $s(\alpha_i)$, где α_i — косинусы углов, между направлением растяжения (сжатия) и координатными осями x, y, z.

При чистом растяжении в направлении (l_1, l_2, l_3) в теле имеет место напряженное состояние

$$\begin{aligned} &\sigma_x = k(l_i)\, l_1^2, \qquad \sigma_y = k(l_i)\, l_2^2, \qquad \sigma_z = k(l_i)\, l_3^2 \\ &\tau_{xy} = k(l_i)\, l_1 l_2, \qquad \tau_{xz} = k(l_i)\, l_1 l_3, \qquad \tau_{yz} = k(l_i)\, l_2 l_3 \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть в результате некоторого внешнего воздействия в теле возникло напряженное состояние $\sigma_x = k(1, 0, 0)$, $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$, до внешнего воздействия тело было упругим и имело напряженное состояние, достаточно близкое к напряженному состоянию (5) при некоторых заданных значениях l_i. Далее, пусть внешнее воздействие таково, что оно переводит тело из состояния, близкого к (5), в состояние $\sigma_x = k(1, 0, 0)$, $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ только упругим образом. В этом случае неравенство (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &[k(1, 0, 0) - k(l_i)\, l_1^2]\, \varepsilon_x - k(l_i)\, l_2^2\, \varepsilon_y - k(l_i)\, l_3^2\, \varepsilon_z - \\ &- k(l_i)\, l_1 l_2\, \varepsilon_{xy} - k(l_i)\, l_1 l_3\, \varepsilon_{xz} - k(l_i)\, l_2 l_3\, \varepsilon_{yz} \geqslant 0 \end{aligned} \tag{6}$$

где ε_x, ε_y, ε_z, ε_{xy}, ε_{xz} и ε_{yz} — скорости пластических деформаций при напряженном состоянии

$$\sigma_x = k(1, 0, 0), \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0$$

Для определения скоростей деформаций в этой точке применим ассоциированный закон течения.

Так как $\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_3)$, то условие пластичности (4) всегда можно преобразовать к виду

$$f(\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_2 - \sigma_3, l_i, m_i, n_i) = 1$$

Разрешая условие пластичности относительно $\sigma_1 - \sigma_2$, это решение представим в виде ряда по степеням $(\sigma_1 - \sigma_3)$:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = k(l_i) - A(\sigma_2 - \sigma_3) + \ldots \qquad \left(A = \frac{\partial f}{\partial(\sigma_2 - \sigma_3)} \Big/ \frac{\partial f}{\partial(\sigma_1 - \sigma_2)}\right) \tag{7}$$

Здесь выражение для A следует положить $\sigma_2 - \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 - \sigma_2 = k(l_i)$ и, таким образом A будет функцией только направляющих косинусов l_i, m_i, n_i. Условие (7) можно представить в виде

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{k(l_i)} + \frac{A}{k(l_j)}(\sigma_2 - \sigma_3) + \ldots = 1 \tag{8}$$

Применяя к (8) ассоциированный закон течения, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = \lambda \Bigg[& k^{-1}(l_\alpha)\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_{ij}} - \frac{\partial\sigma_2}{\partial\sigma_{ij}}\right) + (\sigma_1 - \sigma_2)\frac{\partial k^{-1}}{\partial l_\alpha}\frac{\partial l_\alpha}{\partial\sigma_{ij}} + Ak^{-1}(l_\alpha)\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial\sigma_{ij}} - \frac{\partial\sigma_3}{\partial\sigma_{ij}}\right) + \\ & + (\sigma_2 - \sigma_3)\left(\frac{\partial Ak^{-1}}{dl_\alpha}\frac{\partial l_\alpha}{\partial\sigma_{ij}} + k^{-1}(l_\alpha)\frac{\partial A}{\partial m_\alpha}\frac{\partial m_\alpha}{\partial\sigma_{ij}} + k^{-1}(l_\alpha)\frac{\partial A}{\partial n_\alpha}\frac{\partial n_\alpha}{\partial\sigma_{ij}}\right)\Bigg] + \ldots \end{aligned} \tag{9}$$

Компоненты напряжений связаны с главными напряжениями и направляющими косинусами по формулам

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 l_i l_j + \sigma_2 m_i m_j + \sigma_3 n_i n_j \tag{10}$$

Среди направляющих косинусов независимых только три, так как они связаны соотношениями

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \delta_{ij} \tag{11}$$

Дифференцируя равенства (10) и (11) по σ_{ij} и подставляя значения направляющих косинусов $l_1 = m_2 = n_3 = 1$, $l_2 = l_3 = m_1 = m_3 = n_1 = n_2 = 0$, после простых преобразований получаем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_x} = \frac{\partial\sigma_2}{\partial\sigma_y} = \frac{\partial\sigma_3}{\partial\sigma_z} = 1, \qquad \frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\sigma_{ij}} = 0 \\
\frac{\partial l_2}{\partial\tau_{xy}} = -\frac{\partial m_1}{\partial\tau_{xy}} = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_3}, \qquad \frac{\partial l_3}{\partial\tau_{xz}} = -\frac{\partial n_1}{\partial\tau_{xz}} = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} \\
\frac{\partial m_3}{\partial\tau_{yz}} = -\frac{\partial n_2}{\partial\tau_{yz}} = \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_3}, \qquad \frac{\partial l_\alpha}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{\partial m_\alpha}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{\partial n_\alpha}{\partial\sigma_{ij}} = 0
\end{gathered} \tag{12}$$

Подставляя значения (12) в равенства (9), получаем

$$\begin{gathered}
\varepsilon_x = \lambda + \ldots, \qquad \varepsilon_y = \lambda(A - 1) + \ldots, \qquad \varepsilon_z = -\lambda A + \ldots \\
\varepsilon_{xy} = \lambda\left[-\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial l_2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}\frac{\partial}{\partial l_2}\frac{A}{k} + \ldots\right] \\
\varepsilon_{xz} = \lambda\left[-\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial l_3}\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_2}\frac{\partial}{\partial l_3}\frac{A}{k} + \ldots\right] \\
\varepsilon_{yz} = \lambda\left[\frac{\partial A}{\partial m_3} - \frac{\partial A}{\partial n_2} + \ldots\right]
\end{gathered} \tag{13}$$

Полагая в равенствах (13) $\sigma_2 = \sigma_3$, получаем

$$\begin{gathered}
\varepsilon_x = \lambda, \qquad \varepsilon_y = \lambda(A - 1), \qquad \varepsilon_z = -\lambda A \\
\varepsilon_{xy} = -\frac{\lambda}{k}\frac{\partial k}{\partial l_2}, \qquad \varepsilon_{xz} = -\frac{\lambda}{k}\frac{\partial k}{\partial l_3}, \qquad \varepsilon_{yz} = \lambda\left(\frac{\partial A}{\partial m_2} - \frac{\partial A}{\partial n_2}\right)
\end{gathered} \tag{14}$$

Если точка $\sigma_2 = \sigma_3$ будет точкой пересечения регулярных поверхностей, то, представляя все эти поверхности в виде (8) и используя концепцию обобщенного пластического потенциала [4], получаем равенство (14) в виде

$$\begin{gathered}
\varepsilon_x = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n, \qquad \varepsilon_y = \lambda_k(A_k - 1), \qquad \varepsilon_z = \lambda_k A_k \\
\varepsilon_{xy} = -\frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}{k}\frac{\partial k}{\partial l_2}, \qquad \varepsilon_{xz} = -\frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}{k}\frac{\partial k}{\partial l_3} \\
\varepsilon_{yz} = \lambda_k\left(\frac{\partial A_k}{\partial m_3} - \frac{\partial A_k}{\partial n_2}\right)
\end{gathered}$$

Причем $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$. Подставляя полученные значения в неравенство (6), имеем

$$\begin{gathered}
(k_0 - kl_1^2)(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) + kl_2^2\lambda_k(1 - A_k) + kl_3^2\lambda_k A_k + \\
+ \frac{k}{k_0}\left(\frac{\partial k_0}{\partial l_2} l_1 l_2 + \frac{\partial k_0}{\partial l_3} l_1 l_3\right)(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) - kl_2 l_3 \lambda_k\left(\frac{\partial A_k}{\partial m_2} - \frac{\partial A_k}{\partial n_2}\right) \geqslant 0
\end{gathered} \tag{15}$$

Здесь значения с индексом 0 подсчитываются в точке $l_1 = m_2 = n_3 = 1$. Полагая все $\lambda_k = 0$, кроме λ_i, получаем

$$\begin{gathered}
k_0 - kl_1^2 - (A_i - 1)kl_2^2 + A_i k l_3 + l_1 l_3 \frac{k}{k_0}\frac{\partial k_0}{\partial l_2} + \\
+ l_1 l_2 \frac{k}{k_0}\frac{\partial k_0}{\partial l_3} + \left[\frac{\partial A_i}{\partial n_2} - \frac{\partial A_i}{\partial m_3}\right] kl_2 l_3 \geqslant 0
\end{gathered} \tag{16}$$

Покажем, что в уравнении (16) величину в квадратных скобках можно положить равной нулю за счет выбора n_2 и m_3.

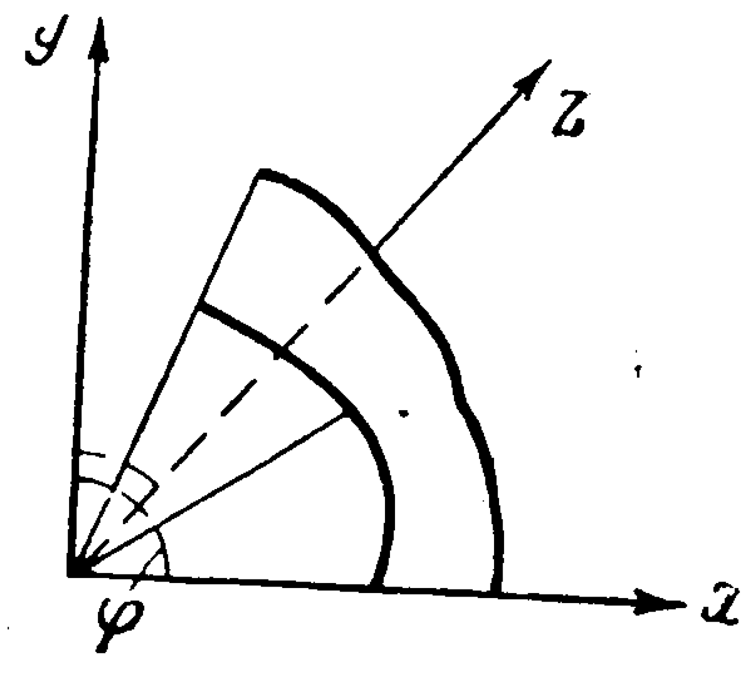
Величина A_i есть коэффициент перед $\sigma_2 - \sigma_3$ в условии пластичности (7). При изменении направления осей 2 и 3 на обратные, условие (7) не должно изменяться, и следовательно

$$A_i(m_3, n_2) = A_i(-m_3, -n_2)$$

Вместо m_3 и n_2 введем новые переменные $\xi = m_3 - n_2$ и $\eta = m_3 + n_2$, тогда

$$\frac{\partial A_i}{\partial n_2} - \frac{\partial A_i}{\partial m_3} = -2\frac{\partial A i}{\partial \xi}$$

и $\partial A i / \partial \xi$ обращается в нуль при некотором значении ξ, так как $A(\xi) = A i(-\xi)$. Теперь условие (16) за счет выбора m и n можно записать в виде



Фиг. 2

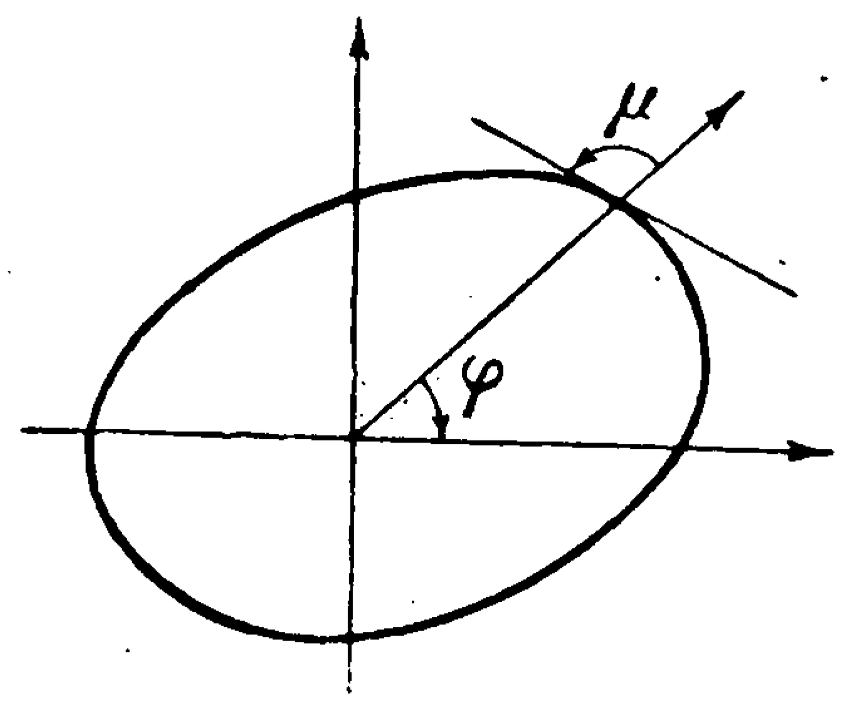
$$k_0 - kl_1^2 + (1 - A_i)\,kl_2^2 + A_i k l_3^2 + \\ + \frac{k}{k_0}\frac{\partial k_0}{\partial l_2} l_1 l_2 + l_1 l_2 \frac{k}{k_0}\frac{\partial k_0}{\partial l_3} \geqslant 0 \qquad (17)$$

Полагая, что до действия дополнительной нагрузки $l_2 = l_3$ или $l_2 = -l_3$ получаем, что $k(l_i)$ должно быть таким, что

$$k_0 - kl_1^2 + kl^2 + kl_1 l\frac{1}{k_0}\frac{\partial k_0}{\partial l_2} + kl_1 l\frac{1}{k_0}\frac{\partial k_0}{\partial l_3} \geqslant 0 \qquad \left(l = \frac{l_2 + l_3}{2}\right)$$

$$k_0 - kl_1^2 + kl_*^2 + kl_1 l_*\frac{1}{k_0}\frac{\partial k_0}{\partial l_2} - kl_1 l_*\frac{\partial k_0}{\partial l_3} \geqslant 0 \qquad \left(l_* = \frac{l_2 - l_3}{2}\right) \qquad (18)$$

В неравенства (18) не входят величины, связанные с видом условия пластичности, и эти неравенства определяют ограничения на результаты возможных экспериментальных величин пределов текучести во всевозможных направлениях для материалов, подчиняющихся постулату Друккера.



Фиг. 3

Учитывая, что

$$\frac{\partial k_0}{\partial l_2} + \frac{\partial k_0}{\partial l_3} = \frac{\partial k_0}{\partial l}, \qquad \frac{\partial k_0}{\partial l_2} - \frac{\partial k_0}{\partial l_3} = \frac{\partial k_0}{\partial l_*}$$

неравенства (18) принимают вид

$$k_0 - k + 3kl^2 + k\sqrt{1 - 2l^2}\,\frac{l}{k_0}\frac{\partial k_0}{\partial l} \geqslant 0$$

$$k_0 - k + 3kl_*^2 + k\sqrt{1 - 2l_*^2}\,\frac{l_*}{k_0}\frac{\partial k_0}{\partial l} \geqslant 0 \qquad (19)$$

Оба неравенства (19) равносильны и различие их написания связано только с выбором начальной системы координат, и далее используется только одно из них.

Для локальной формулировки условий (19) полагаем, что внешнее воздействие сколь угодно мало, а следовательно, сколь угодно близко к нулю. Разлагая левую часть неравенства (19) в ряд по l и поделив обе части неравенства на l^2 после устремления l к нулю, получаем

$$\frac{d^2k}{dl^2} + 6k + \frac{1}{k}\left(\frac{\partial k}{\partial l}\right)^2 \geqslant 0 \qquad (20)$$

Введем в плоскости $l_2 = l_3$ угол φ, как показано на фиг. 2, имеем

$$l = {}^1/_2 \sin\varphi$$

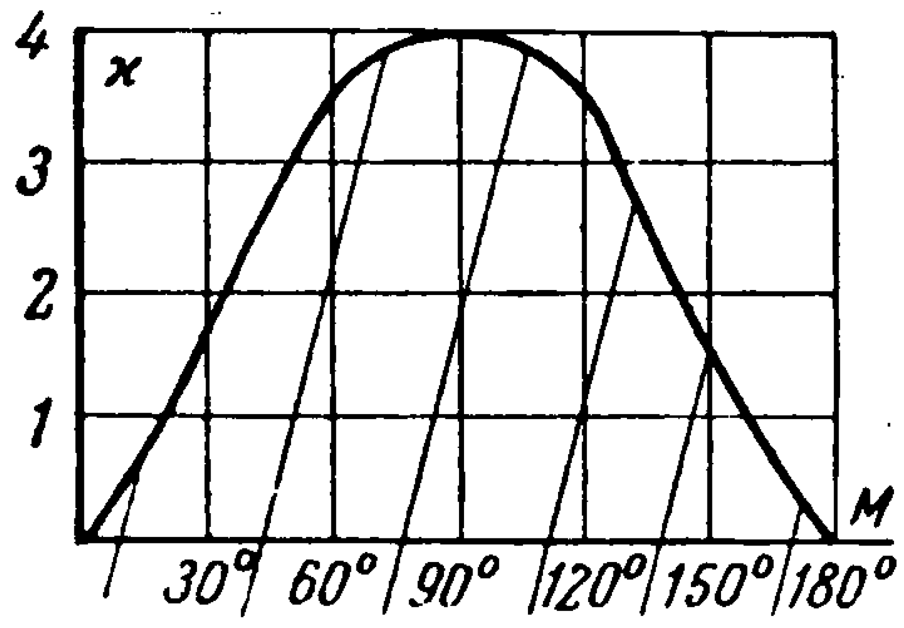
И неравенство (20) принимает вид

$$\frac{d^2k}{d\varphi^2} + 3k + \frac{1}{k}\left(\frac{dk}{d\varphi}\right)^2 \geqslant 0 \qquad (21)$$

Выбирая соответствующим образом систему координат x, y, z, легко видеть, что неравенство (21) должно иметь место в любой плоскости, а так как при изменении на любой угол вид неравенства (21) не изменяется, то оно имеет место не только при $\varphi = 0$, но и при любом φ.

Рассмотрим некоторую плоскость тела, выберем в этой плоскости некоторое направление, которое принимаем за ось полярной системы координат ρ, φ. Для каждого значения угла φ отложим ρ, равное пределу текучести в направлении, определяемом этим углом. Тогда в заданной плоскости тела получим кривую (фиг. 3), уравнение которой

$$\rho = k(\varphi) \qquad (22)$$



Фиг. 4

Неравенство (21) требует, чтобы

$$\sin^3 \mu + 3 \sin \mu \geqslant \varkappa \qquad (23)$$

где μ — угол между направлением касательной к кривой и радиус-вектором (фиг. 3), а $\varkappa = k(\varphi)/R$ — безразмерная кривизна кривой. На фиг. 4 область изменения параметров $\varkappa$ и μ показана штриховкой.

Таким образом, постулат Друккера накладывает ограничения на выпуклые относительно начала координат кривые (22), а на участках, где эти кривые вогнуты, неравенство (23) выполнено при любых $\mu > 0$.

Поступила 15 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Drucker D. C. Some implications of work hardening and ideal plasticity. Quart. Appl. Math., 1950, 7.
2. Drucker D. C. A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. Proc. First U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1952.
3. Ивлев Д. Д. К теории идеальной пластической анизотропии. ПММ, 1959, т. 23, № 26
4. Koiter W. T. General theorems for elastic-plastic solid. Progress in solid Mechanics, ch. 4, North-Holland, 1960.

О ЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ДЛЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ЗАКЛЮЧАЮЩЕГО ВНУТРИ СЕБЯ ПОДВИЖНЫЕ МАССЫ

А. А. Богоявленский

(Москва)

1. Знание циклического перемещения [1] механической системы позволяет находить первые интегралы. Это обстоятельство может дать возможность проинтегрировать уравнения движения или, по крайней мере, понизить порядок этих дифференциальных уравнений. Для нахождения циклического перемещения необходимо ввести в рассмотрение группу бесконечно-малых преобразований С. Ли, такую, чтобы хотя бы один (в лучшем случае все) оператор группы был бы перестановочен (коммутативен) со всеми другими операторами.

Привлечение методов теории групп С. Ли для нахождения первых интегралов имеет преимущество перед методом Лагранжа — Раусса в том, что позволяет заметить более сложные по структуре перемещения механической системы, чем перемещения, описываемые обычными лагранжевыми координатами. Такие циклические перемещения, с другой стороны, упрощают дело, позволяя находить первые интегралы.

Естественно, что перемещения, связанные с лагранжевыми координатами, являются частным случаем перемещений, описываемых операторами группы.

2. Введем в рассмотрение группу бесконечно-малых преобразований С. Ли следующим образом.

Пусть положение твердого тела, имеющего неподвижную точку, определяется девятью направляющими косинусами между двумя прямоугольными системами координат, имеющими общее начало в неподвижной точке, одна из которых x_1, x_2, x_3 неподвижна в пространстве, а вторая x^1, x^2, x^3 неизменно связана с твердым телом.