Две последние колонки таблицы посвящены задаче о взаимодействии жесткого бандажа с упругим бесконечным цилиндром. Для этой задачи аналогичным образом могут быть получены формулы (8) — (10), только в них необходимо положить $A = 1/2\,(1+\sigma)$

Для сравнения в таблице даны значения величины $\varkappa$, вычисленные по соответствующим формулам работ [1,4,5].

	а)			б) $\sigma = 0.3$		$\sigma = 0.3$	
λ	1	0.5	0.25	1	0.5	1	0.5
$\varkappa$	1.63	2.89	5.42	1.92	3.46	2.01	3.65
$\varkappa$ [1]	1.59	2.86	5.41	1.88	3.44	1.97	3.63
$\varkappa$ [4,5]	1.50	2.82	5.40	1.76	3.42	1.86	3.61

Как видно из таблицы, найденные здесь формулы могут с надежностью использоваться при $\lambda \leqslant 0.5$

В заключение заметим, что аналогичным образом может быть получен нулевой член симметричной асимптотики решения осесимметричных контактных задач для упругого слоя малой толщины.

Поступила 31 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 5.
2. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3.
3. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
4. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 5.
5. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962. № 5.

О СООТНОШЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ П. Ф. ПАПКОВИЧА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

В. К. Прокопов (Ленинград)

§ 1. Бигармоническое уравнение в декартовых координатах $\Delta\Delta W = 0$ допускает частные решения вида

$$W_k = e^{-\beta_k x} F_k(y) \tag{1.1}$$

применяемые в задаче о равновесии тонкой пластинки. В случае изгиба W — прогиб; для плоской задачи W — функция напряжений.

Функции $F_k(y)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$F_k^{\mathrm{IV}} + 2\beta_k^2 F_k'' + \beta_k^4 F_k = 0 \tag{1.2}$$

а параметры β_k определяются граничными условиями задачи. Например, при выполнении условий

$$F_k(\pm 1) = 0, \qquad F_k'(\pm 1) = 0 \tag{1.3}$$

что соответствует отсутствию напряжений на краях $y = \pm 1$ в плоской задаче теории упругости или жесткой заделке этих краев в задаче изгиба, параметры β_k будут корнями трансцендентного уравнения $\sin\beta\cos\beta \pm \beta = 0$.

П. Ф. Папковичу [1,2] принадлежит в этом случае следующий результат: им найдено соотношение «обобщенной ортогональности»

$$\int_{-1}^{1} (F_k'' F_s'' - \beta_k^2 \beta_s^2 F_k F_s)\, dy = 0 \qquad (k \neq s) \tag{1.4}$$

которому удовлетворяют функции $F_k(y)$ при наличии условий (1.3).

Однако соотношение (1.4) имеет место не только при выполнении условий (1.3). Чтобы это показать, воспроизведем вывод формулы (1.4), не связывая себя требованиями (1.3). Умножая уравнения (1.2) для номера k на $\beta_s^2 F_s(y)$, а для номера s — на $\beta_k^2 F_k(y)$, вычитая и интегрируя от -1 до $+1$, получим

$$\beta_s^2 \int_{-1}^{1} F_k^{\mathrm{IV}} F_s dy - \beta_k^2 \int_{-1}^{1} F_k F_s^{\mathrm{IV}} dy + 2\beta_k^2\beta_s^2 \int_{-1}^{1} (F_k'' F_s - F_k F_s'')\, dy +$$

$$+ \beta_k^2\beta_s^2 (\beta_k^2 - \beta_s^2) \int_{-1}^{1} F_k F_s dy = 0$$

Интегрированием по частям первых трех интегралов приходим к выражению

$$(\beta_s^2 - \beta_k^2) \int_{-1}^{1} (F_k'' F_s'' - \beta_k^2\beta_s^2 F_k F_s)\, dy + \tag{1.5}$$

$$+ [\beta_s^2 (F_k''' F_s - F_k'' F_s') - \beta_k^2 (F_k F_s''' - F_k' F_s'') + 2\beta_k^2\beta_s^2 (F_k' F_s - F_k F_s')]_{y=-1}^{y=+1} = 0$$

Очевидно, что при соблюдении условий (1.3) из выражения (1.5) сразу следует оотношение (1.4). Рассмотрим теперь случай свободных кромок изогнутой плиты; когда имеем

$$\frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^3 W_k}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W_k}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm 1$$

или, вследствие формулы (1.1),

$$F_k''(\pm 1) + \nu\beta_k^2 F_k(\pm 1) = 0, \qquad F_k'''(\pm 1) + (2 - \nu)\beta_k^2 F_k'(\pm 1) = 0 \tag{1.6}$$

Подстановка условий (1.6) в выражение (1.5) опять приводит к соотношению (1.4).

Для тонкой пластинки, работающей в условиях плоской задачи, при функции Эйри, выражающейся формулой (1.1), имеем перемещения

$$Eu_k = e^{-\beta_k x} \left[\nu\beta_k F_k(y) - \frac{F_k''(y)}{\beta_k} \right], \qquad Ev_k = -e^{-\beta_k x} \left[(2 + \nu) F_k'(y) + \frac{F_k'''(y)}{\beta_k^2} \right]$$

Поэтому при заделке сторон $y = \pm 1$ такой пластинки имеем условия:

$$F_k''(\pm 1) - \nu\beta_k^2 F_k(\pm 1) = 0, \qquad F_k'''(\pm 1) + (2 + \nu)\beta_k^2 F_k'(\pm 1) = 0 \tag{1.7}$$

Условия (1.7) отличаются от условий (1.6) только знаком при коэффициенте Пуассона; соотношение (1.4) будет соблюдаться и для условий (1.7). Ясно также, что при наличии на краях $y = +1$ и $y = -1$ различных условий, но принадлежащих к одному из разобранных (условия (1.3) или (1.6) или (1.7)) [1], соотношение обобщенной ортогональности (1.4) также будет иметь место. Следует только подчеркнуть, что, как трансцендентное уравнение [2], определяющее собственные числа β_k, так и вид самих функций $F_k(y)$ существенно зависит от краевых условий при $y = \pm 1$.

Г. А. Гринберг [3] показал, что соотношению П. Ф. Папковича можно придать иные формы, например такую

$$2 \int_{-1}^{1} F_k' F_s' dy - (\beta_k^2 + \beta_s^2) \int_{-1}^{1} F_k F_s dy = 0 \qquad (k \neq s) \tag{1.8}$$

Легко проверить, что соотношение (1.8) также будет иметь место в перечисленных случаях.

---

[1] Или условия $F_k(\pm 1) = F_k''(\pm 1) = 0$, что соответствует опертому краю плиты.

[2] Трансцендентные уравнения для собственных чисел β_k и формы собственных функций $F_k(y)$ при различных краевых условиях для прямоугольной пластинки можно найти в статье К. А. Китовера [4]; см. также книгу Я. С. Уфлянда [5], где приведены значения первых собственных чисел β_k.

§ 2. Соотношение (1.4) было использовано П. Ф. Папковичем для удовлетворения краевым условиям в задаче изгиба плиты с жестко заделанными краями $y = \pm 1$ [2]. При любых условиях на краю $x = 0$ задача определения коэффициентов a_k в однородном решении

$$W = \sum_k a_k W_k = \sum_k a_k e^{-\beta_k x} F_k(y) \qquad (2.1)$$

методом П. Ф. Папковича приводится к некоторому интегральному уравнению [2, 3]; однако в случае опертого края $x = 0$ или скользящей заделки, как показал П. Ф. Папкович, соотношение (1.4) позволяет получить общую формулу для раздельного определения коэффициентов a_k. Так как однородные решения добавляются к частному интегралу, соответствующему нагрузке (и краевым условиям при $y = \pm 1$), то на опертом краю $x = 0$ можно считать заданными прогиб и изгибающий момент

$$W|_{x=0} = \varphi_1(y), \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\bigg|_{x=0} = \varphi_2(y)$$

Подставляя сюда W из (2.1), получаем

$$\sum_k a_k F_k(y) = \varphi_1(y), \qquad \sum_k a_k\, [\beta_k^2 F_k(y) + \nu F_k''(y)] = \varphi_2(y) \qquad (2.2)$$

Исключая из второго уравнения (2.2) $F_k''(y)$ при помощи первого уравнения, получаем более простую систему уравнений

$$\sum_k a_k F_k(y) = \varphi_1(y) = f_1(y), \qquad \sum_k a_k \beta_k^2 F_k(y) = \varphi_2(y) - \nu\varphi_1''(y) = f_2(y) \qquad (2.3)$$

П. Ф. Папкович дает следующее решение задачи определения коэффициентов a_k из условий (2.3): составляется разность

$$F_s''(y) f_1''(y) - \beta_s^2 F_s(y) f_2(y) = \sum_k a_k (F_s'' F_k'' - \beta_s^2 \beta_k^2 F_s F_k)$$

интегрируя которую от -1 до $+1$ и используя соотношение (1.4), получаем

$$a_s = \frac{1}{I_s} \int_{-1}^{+1} \{F_s''(y) f_1''(y) - \beta_s^2 F_s(y) f_2(y)\}\, dy \qquad (2.4)$$

где

$$I_s = \int_{-1}^{+1} \{[F_s''(y)]^2 - \beta_s^4 [F_s(y)]^2\}\, dy \qquad (2.5)$$

При скользящей заделке края $x = 0$ задается угол поворота и реакция опоры

$$\frac{\partial W}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \varphi_1(y), \qquad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\bigg|_{x=0} = \varphi_2(y)$$

Подстановка в эти условия ряда (2.1) приводит к уравнениям

$$-\sum_k a_k \beta_k F_k(y) = \varphi_1(y), \qquad -\sum_k a_k \beta_k\, [\beta_k^2 F_k(y) + (2 - \nu) F_k''(y)] = \varphi_2(y) \qquad (2.6)$$

Легко заметить, что заменою коэффициентов $-a_k\beta_k = b_k$ и введением функций

$$f_1(y) = \varphi_1(y), \qquad f_2(y) = \varphi_2(y) - (2 - \nu)\varphi_1''(y)$$

уравнения (2.6) приводятся к виду, тождественному с системой (2.3)

$$\sum_k b_k F_k(y) = f_1(y), \qquad \sum_k b_k \beta_k^2 F_k(y) = f_2(y)$$

В случае плоской задачи для прямоугольной полосы разрешимыми оказываются комбинации, при которых на краю $x = 0$ задается нормальное перемещение u и касательное напряжение τ_{xy} или нормальное напряжение σ_x и касательное перемещение v. В первом случае имеем условия

$$Eu|_{x=0} = \sum_k a_k \left\{\nu\beta_k F_k(y) - \frac{F_k''(y)}{\beta_k}\right\} = \varphi_1(y), \qquad -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x=0} = \sum_k a_k \beta_k F_k'(y) = \varphi_2(y) \qquad (2.7)$$

Предположим, что хотя бы одна из продольных кромок полосы свободна от напряжений; пусть это будет сторона $y = -1$; тогда $F_k(-1) = 0$. Введем функции

$$f_1(y) = \nu f_2(y) - \varphi_1(y), \qquad f_2(y) = \int_{-1}^{y} \varphi_2(y)\,dy \tag{2.8}$$

и коэффициенты

$$b_k = a_k / \beta_k$$

Интегрируя второе условие (2.7) от -1 до y, после несложных преобразований придем к системе

$$\sum_k b_k F_k''(y) = f_1(y), \qquad \sum_k b_k \beta_k^2 F_k(y) = f_2(y) \tag{2.9}$$

которая даже проще системы (2.3). Используя соотношение «обобщенной ортогональности» (1.4), получаем из системы (2.9) следующую формулу для коэффициентов

$$b_k = \frac{1}{I_k}\int_{-1}^{1} \{F_k''(y)\, f_1(y) - \beta_k^2 F_k(y)\, f_2(y)\}\,dy \tag{2.10}$$

Если обе продольные кромки $y = \pm 1$ полосы жестко заделаны, то преобразование системы (2.7) будет несколько сложнее. Продифференцируем дважды первое уравнение (2.7); учитывая дифференциальное уравнение (1.2), имеем

$$\varphi_1''(y) = \sum_k a_k \{(2+\nu)\,\beta_k F_k''(y) + \beta_k^3 F_k(y)\} \tag{2.11}$$

Далее введем функции

$$\varphi_1''(y) - (2+\nu)\,\varphi_2'(y) = f_2(y), \qquad \varphi_2'(y) = f_1(y) \tag{2.12}$$

и вводим коэффициенты

$$b_k = a_k \beta_k$$

для которых опять получается система (2.9). Конечно, и в предыдущем случае можно было бы ввести функции (2.12), однако их введение накладывает дополнительные условия существования производных (φ_1'' и φ_2') на правые части условий (2.7).

При задании на краю $x = 0$ нормального напряжения и касательного перемещения имеем условия

$$\left.\frac{\partial W^2}{\partial y^2}\right|_{x=0} = \sum_k a_k F_k''(y) = \varphi_1(y)$$
$$E v\,|_{x=0} = -\sum_k a_k \left\{(2+\nu)\,F_k'(y) + \frac{F_k'''(y)}{\beta_k^2}\right\} = \varphi_2(y) \tag{2.13}$$

Дифференцируя второе условие (2.13) и используя дифференциальное уравнение (1.2), получаем

$$\sum_k a_k \{\beta_k^2 F_k(y) - \nu F_k''(y)\} = \varphi_2'(y) \tag{2.14}$$

вводя далее функции

$$f_1(y) = \varphi_1(y), \qquad f_2(y) = \varphi_2'(y) + \nu\varphi_1(y) \tag{2.15}$$

приходим к уравнениям, тождественным системе (2.9)

$$\sum_k a_k F_k''(y) = f_1(y), \qquad \sum_k a_k \beta_k^2 F_k(y) = f_2(y) \tag{2.16}$$

Таким образом, метод П. Ф. Папковича оказывается возможным обобщить на все те случаи, когда имеет место соотношение (1.4), что, как было показано в § 1, не обязательно связано с условиями $F_k(\pm 1) = F_k'(\pm 1) = 0$.

§ 3. При решении плоской задачи теории упругости для полубесконечной полосы $x \geqslant 0$, края $y = \pm 1$ которой свободны от внешних усилий, встает вопрос, каким условиям должны удовлетворять функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$, характеризующие распределение заданных на краю $x = 0$ напряжений или перемещений, для того, чтобы при удалении от края, напряжения (и перемещения) затухали. Если на краю полосы задаются напряжения

$$\sigma_x |_{x=0} = \varphi_1 (y), \qquad \tau_{xy} |_{x=0} = \varphi_2 (y) \tag{3.1}$$

то, в соответствии с принципом Сен-Венана, необходимым условием затухания будет равенство нулю главного вектора и главного момента приложенных к краю $x = 0$ усилий (2.1), т. е.

$$\int_{-1}^{1} \varphi_1 (y)\, dy = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \varphi_1 (y)\, y dy = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \varphi_2 (y)\, dy = 0 \tag{3.2}$$

В других случаях вопрос нуждается в специальном исследовании. В случае задания нормального перемещения u и касательного напряжения τ_{xy} (2.7) или касательного перемещения v и нормального напряжения σ_x (2.13) такие условия легко устанавливаются. Так как в указанных случаях фактическое решение задачи определяется системами (2.9) и (2.16), которые тождественны, то и условия, накладываемые на функции $f_1 (y)$ и $f_2 (y)$, будут в обоих случаях одинаковыми.

Рассмотрим задачу (2.7). Одно из условий пишется сразу: оно совпадает с последним условием (3.2), так как функция $\varphi_2 (y)$ представляет собой краевое значение касательного напряжения τ_{xy}. В задаче (2.13) функция $f_1 (y)$ будет заданным напряжением σ_x при $x = 0$, поэтому и в задаче (2.7) должны иметь место условия

$$\int_{-1}^{1} f_1 (y)\, dy = 0, \qquad \int_{-1}^{1} f_1 (y)\, y\, dy = 0 \tag{3.3}$$

Но в задаче (2.7) функция $f_1 (y)$ определяется формулами (2.8), поэтому вместо (3.3) будем иметь

$$\nu \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{y} \varphi_2 (\eta)\, d\eta - \int_{-1}^{1} \varphi_1 (y)\, dy = 0, \qquad \nu \int_{-1}^{1} y dy \int_{-1}^{y} \varphi_2 (\eta)\, d\eta - \int_{-1}^{1} y\varphi_1 (y)\, dy = 0$$

Меняя порядок интегрирования и учитывая последнее из условий (3.2), получим окончательное выражение дополнительных условий

$$\int_{-1}^{1} \{\varphi_1 (y) + \nu y \varphi_2 (y)\}\, dy = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \left\{y\varphi_1 (y) + \frac{\nu}{2} y^2 \varphi_2 (y)\right\} dy = 0 \tag{3.4}$$

Последнее из условий (3.2) и условия (3.4) должны быть наложены на функции $\varphi_1 (y)$ и $\varphi_2 (y)$ в краевой задаче (2.7) для полубесконечной полосы, на сторонах $y = \pm 1$ которой отсутствуют напряжения. Аналогичными рассуждениями приходим к условиям

$$\int_{-1}^{1} \varphi_1 (y)\, dy = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \varphi_1 (y)\, y dy = 0, \qquad \varphi_2' (1) + \nu \varphi_1 (1) = \varphi_2' (-1) + \nu \varphi_1 (-1) \tag{3.5}$$

которые имеют место в краевой задаче (2.13) для полубесконечной полосы со свободными от напряжений краями $y = \pm 1$.

Поступила 19 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы. Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 4.
2. Папкович П. Ф. Два вопроса теории изгиба тонких упругих плит. ПММ, 1941, т. 5, вып. 3.
3. Гринберг Г. А. О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях. ПММ, 1953, т. 17, вып. 2.
4. Китовер К. А. Об использовании специальных систем бигармонических функций для решения некоторых задач теории упругости. ПММ, 1952, т. 16, № 6.
5. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. АН СССР, 1963.