КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ

В. М. Александров, И. И. Ворович (Ростов-на-Дону)

Рассмотрим задачи о действии штампа на упругую полосу толщины h: а) лежащую без трения на жестком основании, б) жестко приделанную к недеформируемому основанию. В обоих случаях предполагаем, что силы трения между штампом и полосой отсутствуют, длина линии контакта равна $2a$, причем величина $\lambda = h / a$ мала.

В работе [1] получен нулевой член асимптотики решения указанных выше задач при малых λ в виде простых и удобных формул. Асимптотику этого вида будем называть несимметричной. Ниже дается метод получения нулевого члена симметричной асимптотики, более точно отражающей характер решения, в виде более простых формул.

Как известно, рассматриваемые задачи методами операционного исчисления могут быть приведены к решению интегрального уравнения следующего вида

$$\int_{-a}^{a} q(\xi) K\left(\frac{x-\xi}{h}\right) d\xi = \pi\Delta\gamma(x), \qquad |x| \leqslant a \qquad \left(\Delta = \frac{E}{2(1-\sigma^2)}\right) \tag{1}$$

где $q(\xi)$ — контактное давление, $\gamma(x)$ — осадка границы полосы в области контакта. Из свойств ядра $K(k)$ уравнения (1) понадобятся только следующие:

$$\begin{array}{lll} 1) & \text{ядро — четная функция по } k & \\ 2) & K(k) \to \pi A\delta(k) \quad \text{при } k\to\infty & (k = (x-\xi)/h) \end{array} \tag{2}$$

Здесь $\delta(k)$ — дельта-функция Дирака; для задач а) и б) соответственно

$$A = {}^1/_2, \qquad A = {}^1/_2(1-2\sigma)/(1-\sigma)^2 \tag{3}$$

Перейдем в уравнении (1) к новым переменным по формулам

$$x = \frac{h}{\lambda}\sqrt{1-2\lambda t}, \qquad \xi = \frac{h}{\lambda}\sqrt{1-2\lambda\tau} \tag{4}$$

Пренебрегая после этого в полученном уравнении членами порядка λ, полагая $1/\lambda = \infty$ и учитывая указанные выше свойства ядра $K(k)$, получим

$$\int_0^\infty q^*(\tau) K(t-\tau)\, d\tau = \frac{\pi\Delta\gamma^*(t)}{h} \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{5}$$

Таким образом, получено интегральное уравнение задачи для случаев а) и б).

Приближенные решения этих задач при условии $\gamma(x) = \gamma^*(t) \equiv \gamma$ получены в работе [1] методом Винера-Хопфа и имеют вид

$$q^*(t) = \frac{\Delta\gamma}{Ah}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{t}{A}\right)^{1/2} + \left(\frac{A}{\pi t}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{t}{A}\right)\right] \qquad (\gamma = \text{const}) \tag{6}$$

Переходя в соотношении (6) к переменной x по формуле

$$t = \frac{a^2 - x^2}{2ah} \tag{7}$$

получим нулевой член симметричной асимптотики решения задач а) и б) при малых значениях параметра λ для случая $\gamma(x) \equiv \gamma$ в виде

$$q(x) = \frac{\Delta\gamma}{Ah}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{a^2-x^2}{2Aah}\right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2Aah}{a^2-x^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{a^2-x^2}{2Aah}\right)\right] \tag{8}$$

Приближенные решения задач а) и б) при малых λ для произвольной функции $\gamma(x)$ могут быть получены по формуле М. Г. Крейна [2]. Найдем величину силы P, действующей на штамп, используя некоторые формулы монографии [3]

$$P = \int_{-a}^{a} q(x)\, dx = \pi\Delta\gamma\varkappa \tag{9}$$

$$\varkappa = 2\sqrt{2d/\pi}\, e^{-d}\{2d\,[I_0(d) + I_0(d)] + I_1(d)\} \qquad (d = {}^1/_4 A\lambda) \tag{10}$$

где $I_0(d)$ и $I_1(d)$ — функции Вебера.

Результаты вычислений $\varkappa$ по формуле (10) для задач а) и б) даны в таблице.

Две последние колонки таблицы посвящены задаче о взаимодействии жесткого бандажа с упругим бесконечным цилиндром. Для этой задачи аналогичным образом могут быть получены формулы (8) — (10), только в них необходимо положить $A = 1/2\,(1 + \sigma)$

Для сравнения в таблице даны значения величины $\varkappa$, вычисленные по соответствующим формулам работ [1,4,5].

Как видно из таблицы, найденные здесь формулы могут с надежностью использоваться при $\lambda \leqslant 0.5$

	а)			б) $\sigma = 0.3$		$\sigma = 0.3$	
λ	1	0.5	0.25	1	0.5	1	0.5
$\varkappa$	1.63	2.89	5.42	1.92	3.46	2.01	3.65
$\varkappa$ [1]	1.59	2.86	5.41	1.88	3.44	1.97	3.63
$\varkappa$ [4,5]	1.50	2.82	5.40	1.76	3.42	1.86	3.61

В заключение заметим, что аналогичным образом может быть получен нулевой член симметричной асимптотики решения осесимметричных контактных задач для упругого слоя малой толщины.

Поступила 31 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 5.
2. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3.
3. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
4. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 5.
5. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962. № 5.

О СООТНОШЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ П. Ф. ПАПКОВИЧА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

В. К. Прокопов (Ленинград)

§ 1. Бигармоническое уравнение в декартовых координатах $\Delta\Delta W = 0$ допускает частные решения вида

$$W_k = e^{-\beta_k x} F_k(y) \tag{1.1}$$

применяемые в задаче о равновесии тонкой пластинки. В случае изгиба W — прогиб; для плоской задачи W — функция напряжений.

Функции $F_k(y)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$F_k^{\mathrm{IV}} + 2\beta_k^2 F_k'' + \beta_k^4 F_k = 0 \tag{1.2}$$

а параметры β_k определяются граничными условиями задачи. Например, при выполнении условий

$$F_k(\pm 1) = 0, \qquad F_k'(\pm 1) = 0 \tag{1.3}$$

что соответствует отсутствию напряжений на краях $y = \pm 1$ в плоской задаче теории упругости или жесткой заделке этих краев в задаче изгиба, параметры β_k будут корнями трансцендентного уравнения $\sin\beta\cos\beta \pm \beta = 0$.

П. Ф. Папковичу [1, 2] принадлежит в этом случае следующий результат: им найдено соотношение «обобщенной ортогональности»

$$\int_{-1}^{1} (F_k'' F_s'' - \beta_k^2 \beta_s^2 F_k F_s)\, dy = 0 \qquad (k \neq s) \tag{1.4}$$

которому удовлетворяют функции $F_k(y)$ при наличии условий (1.3).