Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

Л. С. Срубщик

(Ростов-на-Дону)

Система уравнений нелинейной теории пластин содержит естественный малый параметр ε^2 (относительная тонкостенность). В случае, когда в соответствующей мембране ($\varepsilon = 0$) развиваются только растягивающие усилия, при помощи асимптотических методов показано, что при малых ε существует равновесное состояние пластины, при котором пластина ведет себя подобно мембране всюду, кроме узкого участка вблизи границы, где имеет место краевой эффект. Попутно строится способ вычисления этого решения. Полученные общие результаты конкретизируются затем для случаев осесимметричной пластины и пластины произвольной формы, подвергнутой на контуре действию растягивающих усилий.

§ 1. К постановке задачи. Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений Кармана теории гибких пластинок [1]

$$\Delta^2 F + {}^1/_2\, [w, w] = 0, \qquad \varepsilon^2 \Delta^2 w - [w, F] - q = 0 \tag{1.1}$$

$$[w, F] \equiv w_{xx} F_{yy} + w_{yy} F_{xx} - 2 w_{xy} F_{xy} \tag{1.2}$$

$$\left(w = \frac{W}{\sqrt{E}}, \quad \varepsilon^2 = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}, \quad q = q_1 \frac{\sqrt{E}}{h} \qquad 0 < \nu < 0.5 \right) \tag{1.3}$$

Здесь F — функция напряжений, W — прогиб точек срединной поверхности. Величина ε^2 характеризует относительную тонкостенность, h — толщина пластины, E — модуль Юнга и ν — коэффициент Пуассона, $q_1(x, y)$ — интенсивность внешней нагрузки, действующей по нормали к поверхности пластины. Предполагается, что $q_1(x, y)$ достаточно гладкая функция.

Пусть пластина занимает ограниченную область D с достаточно гладким контуром Γ. Кроме того, предполагается, что на контуре [1]

$$w|_\Gamma = 0, \qquad w_n|_\Gamma = 0 \tag{1.4}$$

$${}_{\tau\tau}|_\Gamma = T(A) \geqslant 0, \qquad F_{n\tau}|_\Gamma = S(A) \qquad (A \in \Gamma) \tag{1.5}$$

Здесь n и τ — нормальное и касательное направления на границе, а $F_{\tau\tau}(A)$ и $F_{n\tau}(A)$ — соответственно нормальная и касательная составляющие внешнего усилия, приложенного к контуру пластины. При этом предполагается, что система сил, приложенных к контуру пластины, такова, что удовлетворяет условиям совместности и равнове-

[1] Случай жестко защемленной пластины выбран лишь для определенности: дальнейшее легко переносится и на некоторые другие распространенные случаи, например, шарнирное закрепление.

сия. Тогда существование решения задачи (1.1) — (1.5) следует из результатов [2,3].

Наряду с задачей (1.1) — (1.5) будем рассматривать «вырожденную» задачу (о равновесии мембраны)

$$\Delta^2 F_0 + {}^1/_2\,[w_0, w_0] = 0, \qquad -\,[w_0, F_0] - q = 0 \tag{1.6}$$

$$w_0|_\Gamma = 0, \qquad F_{0,\tau\tau}|_\Gamma = T\,(A), \qquad F_{0,n\tau}|_\Gamma = S\,(A) \qquad (A \in \Gamma) \tag{1.7}$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, индексы после запятой означают дифференцирование по соответствующим переменным.

Будем рассматривать задачу об асимптотическом поведении решений (1.1) — (1.5), когда $\varepsilon \to 0$. В случае круглой симметрично загруженной пластины при различных способах закрепления в работах [4–7] для симметричного решения были построены асимптотические представления и установлено, что решение близко к решению вырожденной задачи ($\varepsilon = 0$) всюду, кроме малой окрестности границы, где имеет место краевой эффект. В [8] П. Файф исследовал асимптотику решения задачи (1.1) — (1.5) в случае жестко защемленной пластины произвольной формы, подвергнутой однородному нормальному растяжению на контуре

$$F_{\tau\tau}|_\Gamma = \sigma \equiv \mathrm{const}, \qquad F_{n\tau}|_\Gamma = 0 \tag{1.8}$$

Так же, как и в случае радиальной симметрии, была установлена равномерная сходимость решения задачи (1.1) — (1.4), (1.8) к решению «вырожденной» задачи всюду, кроме малой окрестности границы, при $\varepsilon \to 0$. Но по ходу решения задачи величина $p = q\sigma^{-3/2}$ предполагается достаточно малой, что и позволяет методом последовательных приближений вместе с существованием решения обеих задач доказать их единственность. В то же время хорошо известно [9–11], что нагруженная пластина или оболочка имеет, вообще говоря, не одну форму равновесия.

Поэтому естественно возникает вопрос о том, какие из решений задачи (1.1) — (1.5) «близки», в указанном выше смысле, к решениям задачи (1.6) — (1.7), когда $\varepsilon \to 0$.

В мембране развиваются лишь растягивающие усилия [1]. Поэтому механический смысл имеют такие решения задачи (1.6) — (1.7), которые удовлетворяют в каждой точке области D условиям:

$$F_{0,xx} = \sigma_y > 0, \qquad F_{0,yy} = \sigma_x > 0, \qquad F_{0,xy} = -\,\tau, \ \ \sigma_x\sigma_y - \tau^2 > 0 \tag{1.9}$$

Дальше такие решения называются положительными. Естественно разыскивать решения задачи (1.1) — (1.5), близкие к положительным решениям задачи (1.6) — (1.7). Будем рассматривать такие решения задачи (1.1) — (1.5), для которых выполняется условие вида (1.9) и называть их мембранными.

В настоящей работе показывается, что если существует положительное решение задачи (1.6)—(1.7), то существует мембранное решение для пластины. Оно единственно (теорема 3.2), для него строятся асимптотические разложения и устанавливаются оценки погрешности при $\varepsilon \to 0$ (теорема 3.3). Именно, мембранные решения при

[1] В литературе такие мембраны называются неметаллическими (см. [20, 21]).

$\varepsilon \to 0$ переходят в положительные решения всюду, кроме малой окрестности границы, где имеет место краевой эффект. Для доказательства этих фактов вначале строятся асимптотические разложения решения задачи (1.1)—(1.5), аналогичные полученным в [6,7] для случая радиальной симметрии (§ 2), и применяется метод Ньютона, развитый для операторных уравнений Л. В. Канторовичем [12].

Как видно из сказанного, важным фактом является существование положительного решения для мембраны. В ряде случаев существование положительного решения удается установить. Например, это имеет место: 1) в случае симметричной пластины (теоремы 4.1, 4.2) и оболочек вращения [13], 2) в случае (1.6), (1.8) и аналогичных более общих (теоремы (4.3)—(4.5)). В общем случае задачи (1.6)—(1.7) положительных решений нет. Эти вопросы разобраны в § 4.

Отметим, что в отличие от работы [8] обоснование асимптотических разложений не связано с единственностью решения задач (следствия теоремы 4.1). Кроме того, в § 2 рассмотрен случай, когда краевой эффект описывается погранслоями дробного порядка. Это случай жестко защемленной пластины, контур которой свободен от напряжений. В общем случае, когда задача (1.6)—(1.7) не имеет положительного решения, вырождение носит более сложный характер. Один из примеров такого рода рассмотрен в работе Фридрихса и Стокера [14].

Все рассмотренные ниже построения и доказательства легко переносятся на случай оболочек с постоянными кривизнами.

§ 2. Построение асимптотики. Введем обозначения. Пусть вектор $\mathbf{V} \equiv (F, w)$ — решение, а $\mathbf{P}_1 [\mathbf{V}]$ — левая часть системы (1.1). Для решения (1.1) строятся асимптотические представления вида

$$F = \sum_{s=0}^{n+2} \varepsilon^s F_s + \sum_{s=0}^{n+2} \varepsilon^s h_s^\circ + z_n^{(1)}, \qquad w = \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s w_s + \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s g_s^\circ + z_n^{(2)} \tag{2.1}$$

Функции F_s, w_s получаем при помощи первого итерационного процесса [15]. Именно, полагаем

$$\mathbf{V}_n \equiv (F^n, w^n), \qquad F^n = \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s F_s, \qquad w^n = \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s w_s \tag{2.2}$$

и требуем, чтобы было

$$\mathbf{P}_1 [\mathbf{V}_n] = O(\varepsilon^{n+1}) \tag{2.3}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\varepsilon^\circ, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ в (2.3), для определения F_0, w_0 получаем систему уравнений (1.6) — (1.7), а для определения F_s, w_s — систему

$$\Delta^2 F_s + {}^1/_2 \sum_{k+m=s} [w_k, w_m] = 0 \qquad \Delta^2 w_{s-2} - \sum_{k+m=s} [F_k, w_m] = 0 \tag{2.4}$$
$$(w_{-1} = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, n+2)$$

с краевыми условиями

$$w_s|_\Gamma = 0, \qquad F_{s,\tau\tau}|_\Gamma = B_s^{(1)}, \qquad F_{s,n\tau}|_\Gamma = B_s^{(2)} \qquad (s = 0, 1, \ldots, n+2) \tag{2.5}$$

Здесь $B_s^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ — пока неизвестные функции. Функции F^s, w^s $(s = 0, 1, \ldots)$ не удовлетворяют всем краевым условиям (1.4) — (1.5) и, следовательно, разность $\mathbf{V} - \mathbf{V}_n$ не мала вблизи границы Γ. Возникающие невязки в выполнении краевых условий (1.4) — (1.5) компенсируются функциями типа пограничного слоя h_s° и g_s°, которые определяются при помощи второго итерационного процесса [15].

Именно, ищем разность $\mathbf{V} - \mathbf{V}_n$ в следующем виде:

$$F - F^n = \sum_{m=0}^{n} \varepsilon^m h_m, \qquad w - w^n = \sum_{m=0}^{n} \varepsilon^m g_m \tag{2.6}$$

Для того чтобы определить функции h_m, g_m, надо перейти от координат x, y к локальным координатам. Введем в окрестности границы Г систему координат ρ, φ: именно, строим систему нормалей, т. е. векторов AR длины $\eta > 0$, проведенных из точек A дуги Г, внутрь области D, причем вектор $\mathbf{AR}$ образует прямой угол с касательной в точке A к дуге Г. При достаточно малом η нормали не пересекаются. Координата ρ точки N, на нормали AR, есть ее расстояние AN, а φ есть длина дуги OA, где O — некоторая точка дуги Г, для которой $\varphi = 0$.

В (1.1) подставляем (2.6), учитываем (2.3), и в полученном выражении переходим к локальным координатам

$$\sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s \triangle^2 h_s + {}^1/_2 \sum_{k+m=s}^{n} \varepsilon^s [w_m, g_k] + {}^1/_2 \sum_{k+m=s}^{n} \varepsilon^s [g_m, g_k] = O(\varepsilon^{n+1})$$

$$\sum_{s=0}^{n} \varepsilon^{s+2} \triangle^2 g_s - \sum_{k+m=s}^{n} \varepsilon^s [F_m, g_k] - \sum_{k+m=s}^{n} \varepsilon^s [w_m, h_k] - \sum_{k+m=s}^{n} \varepsilon^s [g_k, h_m] = O(\varepsilon^{n+1}) \tag{2.7}$$

Здесь

$$g_{x_i x_k} = g_{\rho\rho}\rho_{x_i}\rho_{x_k} + g_{\varphi\rho}(\varphi_{x_i}\rho_{x_k} + \varphi_{x_k}\rho_{x_i}) + g_{\varphi\varphi}\varphi_{x_i}\varphi_{x_k} + g_\rho \rho_{x_i x_k} + g_\varphi \varphi_{x_i x_k}$$
$$(i, k = 1, 2, \; x_1 = x, \; x_2 = y)$$

В новой системе координат оператор Δ^2 будет того же порядка, но с переменными коэффициентами. Разлагая эти коэффициенты в ряды Тейлора по ρ в окрестности $\rho = 0$ и произведя замену $\rho = \varepsilon t$, получим

$$\Delta^2 u = \varepsilon^{-4}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^i R_i u + \varepsilon^{N+1} R_{N+1} u\right)$$

Здесь R_i $(i \leqslant N)$ и R_{N+1} — линейные дифференциальные операторы, коэффициенты которых соответственно имеют вид

$$\sum_{j \leqslant i} f_j(\varphi) t^j, \qquad \sum_{j \leqslant N+1} d_j(\rho, \varphi) t^j$$

где $d_i(\rho, \varphi)$ — не зависящие от ε функции ρ, φ. Пусть далее

$$F_m = \sum_{l=0}^{N} F_{ml}\rho^l, \qquad w_m = \sum_{l=0} w_{ml}\rho^l \tag{2.8}$$

соответствующие разложения функций F_m и w_m в ряды Тейлора в окрестности $\rho = 0$. Теперь полагаем в (2.7), (2.8) $\rho = \varepsilon t$, подставляем (2.8) в (2.7) и приравниваем нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε. Для определения h_s, g_s получаем системы линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка с коэффициентами, зависящими от φ. Краевые условия для функций h_s, g_s при $t = 0$ определяются значениями разности $\mathbf{V} - \mathbf{V}_n$ на границе Г при соответствующих степенях ε^s

$$g_s|_{\rho=0} = 0, \qquad \frac{\partial g_s}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=0} = -\frac{\partial w_s}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} \qquad (s = 0, 1, \ldots) \tag{2.9}$$

а при $t = \infty$ из условия существования погранслоя, т. е.

$$\left.\frac{\partial g_s}{\partial t}\right|_{t=\infty} = \left.\frac{\partial h_s}{\partial t}\right|_{t=\infty} = h_s|_{t=\infty} = 0 \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (2.10)$$

Тогда из (2.7) для определения h_0 и h_1 получаем

$$\frac{\partial^4 h_i}{\partial t^4} = 0, \qquad h_i|_{t=\infty} = \left.\frac{\partial h_i}{\partial t}\right|_{t=\infty} = 0 \qquad (i = 0, 1) \qquad (2.11)$$

Отсюда следует, что

$$h_0 = h_1 \equiv 0 \qquad (2.12)$$

Теперь определим функции $B_s^{(i)}(\varphi)$, приравнивая нулю коэффициенты при ε^s $(s = 0, 1, \ldots, n+2)$ в выражениях

$$\sum_{s=0}^{n+2} \varepsilon^s (B_s^{(1)} + h_{s,\tau\tau})|_{\rho=0} = T(\varphi), \qquad \sum_{s=0}^{n+2} \varepsilon^s (B_s^{(2)} + h_{s,\rho\tau})|_{\rho=0} = S(\varphi)$$

В частности, из (2.12) находим, что $B_0^{(1)} = T(\varphi)$, $B_0^{(2)} = S(\varphi)$. Именно отсюда вытекает правильность выбора краевого условия для положительного решения задачи (1.6) — (1.7).

Приравнивание нулю коэффициента при ε^{-2} в соотношении, получающемся из второго выражения (2.7) с учетом (2.9) — (2.12) приводит к уравнению

$$\frac{\partial^4 g_0}{\partial t^4} - a\frac{\partial^2 g_0}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.13)$$

$$g_0|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial g_0}{\partial t}\right|_{t=0} = -\varepsilon\left.\frac{\partial w_0}{\partial n}\right|_\Gamma, \qquad \left.\frac{\partial g_0}{\partial t}\right|_{t=\infty} = 0 \qquad (2.14)$$

Здесь a — функция, зависящая от координаты φ, и определяется соотношением

$$a = [F_{0,xx}\rho_y^2 + F_{0,yy}\rho_x^2 - 2F_{0,xy}\rho_x\rho_y]|_\Gamma = [(\rho_x\varphi_y - \rho_y\varphi_x)^2 F_{\tau\tau}]|_\Gamma = T(\varphi)$$

В случае, когда $T(\varphi) > 0$, из (2.13) — (2.14) получаем

$$\frac{\partial g_0}{\partial \rho} = -w_{00}\exp\frac{-\sqrt{T(\varphi)}\,\rho}{\varepsilon}, \qquad w_{00} = \left.\frac{\partial w_0}{\partial n}\right|_\Gamma \qquad (2.15)$$

т. е. $\partial g_0 / \partial\rho$ — функция типа погранслоя нулевого порядка [15]. Из (2.15) находим

$$g_0(\rho) = \frac{\varepsilon w_{00}}{\sqrt{T(\varphi)}}\left[\exp\frac{-\sqrt{T(\varphi)}\,\rho}{\varepsilon} - 1\right] \qquad (2.16)$$

Далее из первого выражения (2.7) точно так же получаем уравнение для определения h_2

$$\frac{\partial^4 h_2}{\partial t^4} = -w_{00,\varphi\varphi}\, g_{0,tt} - {}^1/_2\, [g_0, g_0]_{(\varphi,\, t)}, \qquad h_2\Big|_{t=\infty} = \left.\frac{\partial h_2}{\partial t}\right|_{t=\infty} = 0 \qquad (2.17)$$

где g_0 определено в (2.16). Интегрируя, находим

$$h_2 = \varepsilon\, [c_1(t, \varphi)\, e^{-2\sqrt{T(\varphi)}\, t} + c_2(t, \varphi)\, e^{-\sqrt{T(\varphi)}\, t}] \qquad (2.18)$$

Здесь $c_1(t, \varphi)$ и $c_2(t, \varphi)$ — многочлены второго порядка по t. Функции $g_s (s = 1, \ldots, n)$ определяем из уравнений вида (2.13), (2.14), но неоднородных, а функции h_s находятся почленным интегрированием выражений вида $p_s(t, \varphi) \exp(-k(\varphi)t)$, где $k(\varphi) > 0$, а $p_s(t, \varphi)$ — многочлен от t степени не выше s. Методом индукции так же, как и в работе [15], легко показать, что функции h_s и g_s будут функциями типа погранслоя целого порядка. Наконец, определим функции h_s° и g_s° $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ в формулах (2.1). Для этого положим

$$h_s^\circ = \psi(\rho / \delta)\, h_s, \qquad g_s^\circ = \psi(\rho / \delta)\, g_s \tag{2.19}$$

Здесь $\psi(\eta)$ — сглаживающая функция (равная 1 при $\eta \leqslant 1/3$ и равная 0 при $\eta \geqslant 2/3$).

Таким образом, процесс построения асимптотики сводится к следующему. Находим положительное решение F_0, w_0 задачи (1.6), (1.7) и из (2.13) — (2.14) определяем g_0. Затем из (2.4) последовательно находим F_s, w_s $(s = 1, 2, \ldots)$, а из неоднородных уравнений вида (2.13) — (2.14) находим g_s. (Эти уравнения не выписаны ввиду их большой громоздкости.)

Теперь построим асимптотику в случае, когда $T(A) = S(A) = 0$, т. е. когда край пластины свободен от напряжений. В этом случае, как известно, условия на контуре для функции F можно привести к виду

$$F(A) = F_n(A) = 0 \qquad (A \in \Gamma) \tag{2.20}$$

Так как $T(A) = 0$, уравнения (2.13) — (2.14) несовместны. Это означает, что погранслои целого порядка по ε непригодны для описания явления краевого эффекта, и поэтому надо учитывать члены более высокого порядка по ε. Для этого снова рассмотрим уравнение (2.7) и более подробно выпишем в локальных координатах выражение

$$\sum_{m+k=s} [F_m, g_k]_{(x,y)} = \sum_{m+k=s} \{(\rho_x\varphi_y - \rho_y\varphi_x)^2 [F_m, g_k]_{(\rho,\varphi)} + g_{k,\rho\rho} [(\rho_{xx}\rho_y^2 + \rho_{yy}\rho_x^2 - 2\rho_{xy}\rho_x\rho_y) F_{m,\rho} + (\varphi_{xx}\rho_y^2 + \varphi_{yy}\rho_x^2 - 2\varphi_{xy}\rho_x\rho_y) F_{m,\varphi}] + L\}$$

$$\left(F_m = \sum_{l=0}^{N} F_{ml}\rho^l\right) \tag{2.21}$$

Здесь в L отнесены члены, содержащие производные функции g_k низших порядков по ρ. Далее полагаем $\mu = \varepsilon^{2/3}$ и в (2.7), (2.21) производим замену $\rho = \mu t$. Точно так же, как и в общем случае, получаем, что $h_0 = h_1 = 0$ и $B_0^{(i)} = B_1^{(i)} = 0$ $(i = 1, 2)$. Так как $B_1^{(i)} = 0$ из (2.4) — (2.5) при $s = 1$, выводим $F_1 = w_1 \equiv 0$. Теперь для определения g_0 собираем члены при μ^{-1}, и принимая во внимание, что $F_1 = w_1 = 0$ всюду в D, а $F_{00,\varphi} = F_{00,\varphi\varphi} = F_{00,\varphi\rho} = F_{00,\varphi\varphi\rho} = F_{00,\rho} = 0$ на контуре Γ, получаем

$$\frac{\partial^4 g_0}{\partial t^4} - a_1 t F_{0,\rho\rho} \frac{\partial^2 g_0}{\partial t^2} = 0 \tag{2.22}$$

Здесь

$$a_1 = (\rho_{xx}\rho_y^2 + \rho_{yy}\rho_x^2 - 2\rho_{xy}\rho_x\rho_y)\,|_\Gamma$$

$$g_0\Big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial g_0}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\mu \frac{\partial w_0}{\partial n}\Big|_\Gamma, \qquad \frac{\partial g_0}{\partial t}\Big|_{t=\infty} = 0 \tag{2.23}$$

Если $F_{0,\rho\rho} a_1 = l(\varphi) > 0$, то решение задачи (2.22), (2.23) можно получить в виде

$$\frac{\partial g_0}{\partial t_1} = -\frac{6\mu}{\pi} w_{00}(0, \varphi) \int A_1(-t_1)\, dt_1, \qquad w_{00} = \frac{\partial w_0}{\partial n}\Big|_\Gamma \tag{2.24}$$

Здесь [16]

$$A_1(-t_1) = \int\limits_0^\infty \cos(\tau^3 + t_1\tau)\, d\tau, \qquad t_1 = (3l(\varphi))^{1/3} \ (t > 0)$$

Асимптотическое представление $A_1(-t)$ для больших значений t имеет вид

$$A_1(-t) = {}^1/_2 \sqrt{\pi}\, (3t)^{-1/4} \exp\left[-2({}^1/_3 t)^{3/2}\right] (1 + O(t^{-3/2})), \qquad t > 0 \tag{2.25}$$

Отметим, что в случае круглой симметрично загруженной жестко защемленной пластины (контур свободен от напряжений) нетрудно показать, что $l(\varphi) > 0$ [7]. Действительно, в этом случае $\rho = 1 - r$, $r^2 = x^2 + y^2 \leqslant 1$ и $a_1 = -1$. Остается показать, что $F_{00,\rho\rho} < 0$. Последнее непосредственно следует из формулы (4.10) при $T = 0$ и $r = 1$. Имеем

$$F_{00,\rho\rho} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{\varphi^2(\tau)\,\tau}{v^2}\, d\tau < 0 \qquad [\varphi(1) = 0]$$

В этом параграфе установлено, что если на контуре выполняется (1.9) (это влечет за собой неравенство $F_{\tau\tau}(A) > 0$ $(A \in \Gamma)$), то можно формально построить асимптотические разложения решения (2.1). Ниже будет показано, что существование положительного решения будет достаточным условием существования мембранного решения, для которого справедливы асимптотические разложения. Попутно будут установлены оценки погрешности при $\varepsilon \to 0$.

§ 3. Обоснование асимптотических разложений. Существование мембранных решений. Введем функциональные пространства.

1. Пространство $L_p(D)$, состоящее из функций, суммируемых со степенью $p > 1$ и с нормой

$$\| f \|_{L_p} = \Big(\int\limits_D | f |^p\, dx\, dy\Big)^{1/p} \tag{3.1}$$

Если рассматривается вектор-функция $\mathbf{V} \equiv (F, w)$, то будем считать, что $\mathbf{V} \in L_2(D)$, если каждая ее составляющая $F, w \in L_2(D)$ и норму $\mathbf{V}$ определим соотношением

$$\| \mathbf{V} \|_{L_2}^2 = \| F \|_{L_2}^2 + \| w \|_{L_2}^2 \tag{3.2}$$

2. Пространство H функций f, удовлетворяющих краевым условиям (1.4) и имеющих в D обобщенные производные порядка $l = 4$, принадлежащие L_2 с нормой

$$\| f \|_H = \Big(\int\limits_D \sum_{k=0}^{4} \sum_{m+n=k} \Big| \frac{\partial^k f}{\partial x^m \partial y^n} \Big|\, dx\, dy\Big)^{1/2} \tag{3.3}$$

Если у вектор-функции $\mathbf{V} \equiv (F, w)$ составляющие $F, w \in H$, то будем говорить, что $\mathbf{V} \in H$, отнеся $\mathbf{V} \in H$ норму

$$\| \mathbf{V} \|_H^2 = \| F \|_H^2 + \| w \|_H^2 \tag{3.4}$$

3. Пространство $C^{(m)}$ функций f, непрерывно дифференцируемых m раз вплоть до контура. Норма в $C^{(m)}$ определяется по формуле

$$\| f \|_{C^{(m)}} = \sum_{\substack{k=1 \\ \alpha+\beta=k}}^{m} \max \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \right| + \max |f|$$

Пусть f — произвольная четырежды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая на Γ условиям (1.5). Положим

$$F_1 = F - f, \qquad w_1 = w \tag{3.5}$$

Тогда (1.1) — (1.5) сводятся к задаче

$$\triangle^2 F_1 + {}^1/_2\,[w_1, w_1] + \triangle^2 f = 0 \tag{3.6}$$

$$\varepsilon^2 \triangle^2 w_1 - [w_1, F_1] - [w_1, f] - q = 0$$

с однородными граничными условиями

$$w_1(A) = w_{1,n}(A) = F_1(A) = F_{1,n}(A) = 0 \qquad (A \in \Gamma) \tag{3.7}$$

Задачу (3.6), (3.7) рассматриваем как функциональное уравнение

$$\mathbf{P}\,[\mathbf{V}] = 0 \tag{3.8}$$

Здесь $\mathbf{V} \equiv (F_1, w_1)$ и введено в (3.5), а оператор $\mathbf{P}$ определяется левой частью системы с (3.6). Нетрудно показать, что оператор $\mathbf{P}$ действует из пространства H в пространство L_2.

Для дальнейшего в (2.1) удобно ввести обозначения

$$\varphi_k = F - z_k^{(1)}, \qquad \psi_k = w - z_k^{(2)} \tag{3.9}$$

Лемма 3.1. Для φ_k и ψ_k справедливы оценки [1]

$$\triangle^2 \varphi_k + {}^1/_2\,[\psi_k, \psi_k] = O(\varepsilon^{k+1}), \qquad \varepsilon^2 \triangle^2 \psi_k - [\varphi_k, \psi_k] - q = O(\varepsilon^{k+1}) \tag{3.10}$$

Подробное доказательство опустим. Здесь же заметим, что для получения оценок (3.10) надо подставить значения φ_k, ψ_k в левую часть (1.1) и оценить ее отдельно в окрестности границы, в узкой полоске D_δ ($\rho < \delta$) и отдельно внутри области, т. е. в $D - D_\delta$. Оценка (3.10) в области $D - D_\delta$ непосредственно следует из (2.3) и того факта, что функции типа погранслоя h_s° и g_s° равны нулю вне области D_δ. Оценка в полоске D_δ проводится точно так же, как и в случае круглой пластины [7].

Лемма 3.2. Пусть $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $c(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемые функции в области D. Тогда

$$1) \quad \int_D [a, b]\, c\, dx dy = \int_D [a, c]\, b\, dx\, dy \tag{3.11}$$

если $c(A) = b(A) = 0$ $(A \in \Gamma)$

$$2) \quad \int_D [a, b]\, a\, dx dy = - \int_D (b_{xx} a_y^2 + b_{yy} a_x^2 - 2 b_{xy} a_x a_y)\, dx\, dy \tag{3.12}$$

если $a(A) = 0$ $(A \in \Gamma)$.

Доказательство леммы в обоих случаях легко достигается интегрированием по частям.

---

[1] Условие $f(\varepsilon) = O(\varepsilon^{k+1})$ означает, что $|f(\varepsilon)| \leqslant m\varepsilon^{k+1}$.

Теорема 3.1. Положительное решение задачи (1.6) — (1.7) единственно.

Доказательство. Уравнения мембраны возьмем в виде (3.6) — (3.7), полагая $\varepsilon = 0$ в (3.6) и отбрасывая в (3.7) краевое условие для $w_{1,n}$.

Предположим существование двух решений $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$. Тогда имеем $P[V^{(1)}] = 0$ и $P[V^{(2)}] = 0$. Вычтем одно равенство из другого и умножим на разность $V^{(1)} - V^{(2)}$, проинтегрируем по области D и сложим. Применяя лемму 3.2, получим

$$\int\limits_D [\Delta (F_1^{(1)} - F_1^{(2)})]^2 \, dx\, dy + \int\limits_D [(F_1^{(1)} + F_1^{(2)})_{xx} (w_1^{(1)} - w_1^{(2)})_y^2 + (F_1^{(1)} + F_1^{(2)})_{yy} \times$$
$$\times (w_1^{(1)} - w_1^{(2)})_x^2 - 2 (F_1^{(1)} + F_1^{(2)})_{xy} (w_1^{(1)} - w_1^{(2)})_x (w_1^{(1)} - w_1^{(2)})_y] \, dy\, dx = 0 \quad (3.13)$$

Принимая во внимание, что (1.9) справедливо для обоих решений $F_1^{(1)}$ и $F_1^{(2)}$, получаем, что второй интеграл в (3.13) будет неотрицательным; отсюда $F_1^{(1)} \equiv F_1^{(2)}$.

Теорема 3.2. Если задача (1.6), (1.7) имеет положительное решение, то задача (1.1) — (1.5) имеет одно и только одно мембранное решение.

Доказательство. Единственность доказывается точно так же, как и единственность положительного решения для мембраны. Для доказательства существования мембранного решения применяется теорема Л. В. Канторовича [12] о сходимости метода Ньютона для операторных уравнений. За начальное приближение принимается $V_k^* \equiv (\varphi_k - f, \psi_k)$. В применении к данной задаче эта теорема имеет вид.

Теорема. Пусть оператор P определен в сфере Ω ($\| V - V_k^* \| \leqslant R$) пространства H и имеет в замкнутой сфере Ω_0 ($\| V - V_k^* \| \leqslant r$) непрерывную вторую производную. Пусть, кроме того,

1) существует линейная операция $\Gamma_0 = [P'_{V_k^*}(V)]^{-1}$

2) $\Gamma_0 (P[V_k^*]) \|_H \leqslant \eta$

3) $\| \Gamma_0 (P''(V)) \|_H \leqslant K$

4) $h = K\eta \leqslant 1/2, \; r \geqslant r_0 = (1 - \sqrt{1 - 2h})\, h^{-1} \eta$

Тогда уравнение (3.8) имеет решение V^*, к которому сходится процесс. При этом

$$\| V - V_k^* \|_H \leqslant r_0 \quad (3.14)$$

Очевидно, что условия теоремы выполняются, если

$$\| P(V_k^*) \|_{L_2} \| (P'_{V_k^*})^{-1} \|^2 \| P_V'' \| \leqslant 1/2 \quad (3.15)$$

Покажем, что (3.15) выполняется при достаточно малых ε для любого $k > 5$. Из леммы 3.1 выводим [1]

$$\| P(V_k^*) \| \leqslant m_1 \varepsilon^{k+1} \quad (3.16)$$

Чтобы оценить второй сомножитель в (3.15), рассмотрим линейное уравнение

$$P'_{V_k^*}(\delta V) = \mathbf{f}, \qquad \delta V \equiv (\delta F, \delta w), \qquad \mathbf{f} \equiv (f_1, f_2) \quad (3.17)$$

$$P'_{V_k^*}(\delta V) \equiv (\Delta^2 (\delta F) + [\psi_k, \delta w], \; \varepsilon^2 \Delta^2 (\delta w) - [\psi_k, \delta F] - [\varphi_k, \delta w])$$
$$\delta F |_\Gamma = (\delta F)_n |_\Gamma = \delta w |_\Gamma = (\delta w)_n |_\Gamma = 0 \quad (3.18)$$
$$\mathbf{f} \in L_2, \qquad P'_{V_k^*} \in [H \to L_2]$$

---

[1] Здесь и всюду в дальнейшем m_i — некоторые постоянные, не зависящие от ε.

Из (3.17), (3.18) получим

$$\int_D (\triangle(\delta F))^2\, dx\, dy + \varepsilon^2 \int_D (\triangle(\delta w))^2\, dx\, dy + \int_D [\varphi_{k,\, xx} (\delta w_y)^2 + \varphi_{k,\, yy} (\delta w_x)^2 -$$

$$- 2\varphi_{k,\, xy} \delta w_x \delta w_y]\, dx\, dy = \int_D (f_1 \delta F + f_2 \delta w)\, dx\, dy \qquad (3.19)$$

Докажем, что для достаточно малых ε последний интеграл в (3.17) будет положительным. Для того чтобы доказать это, рассмотрим вторые производные $\varphi_{k,\, xx}$, $\varphi_{k,\, yy}$, $\varphi_{k,\, xy}$. Например, для $\varphi_{k,\, xx}$ имеем

$$\varphi_{k,\, xx} = F_{0,\, xx} + \sum_{s=1}^{k+2} \varepsilon^s F_{s,\, xx} + \sum_{s=0}^{k+2} \varepsilon^s h_{s,\, xx}$$

Учитывая, что $h_0 = h_1 = 0$ и $\varepsilon^2 h_{2,\, xx} = O(\varepsilon)$ (см. (2.18)), легко получаем

$$\varphi_{k,\, xx} = F_{0,\, xx} + O(\varepsilon) \qquad (3.20)$$

Точно так же доказывается справедливость соотношений

$$\varphi_{k,\, yy} = F_{0,\, yy} + O(\varepsilon), \qquad \varphi_{k,\, xy} = F_{0,\, xy} + O(\varepsilon) \qquad (3.21)$$

Теперь заметим, что из (1.9) непосредственно следует оценка

$$\int_D (F_{0,\, xx} u_y^2 + F_{0,\, yy} u_x^2 - 2F_{0,\, xy} u_x u_y)\, dx\, dy \geqslant m_2 \int_D |\nabla u|^2 dx\, dy \qquad (m_2 > 0) \qquad (3.22)$$

Наконец, при помощи (3.20) — (3.22) для достаточно малых ε (3.23)

$$\int_D [\varphi_{k,\, xx} (\delta w_y)^2 + \varphi_{k,\, yy} (\delta w_x)^2 - 2\varphi_{k,\, xy} \delta w_x \delta w_y]\, dx\, dy \geqslant m_3 \int_D |\nabla \delta w|^2\, dx\, dy, \qquad m_3 > 0$$

Теперь из (3.19), используя (3.23), выводим

$$\| \triangle(\delta F) \|_{L_2} \leqslant m_4 \| \mathbf{f} \|_{L_2}, \qquad \| \triangle(\delta w) \|_{L_2} \leqslant m_4 / \varepsilon \| f \|_{L_2} \qquad (3.24)$$

Отметим еще следующие неравенства для φ_k и ψ_k, которые легко следуют из (3.20), (3.21) и (2.16)

$$\| \varphi_k \|_{C^{(2)}} \leqslant m_5, \qquad \| \psi_k \|_{C^{(2)}} \leqslant m_6 / \varepsilon \qquad (3.25)$$

Далее из (3.17) получаем оценки

$$\| \triangle^2 (\delta F) \|_{L_2}^2 \leqslant 2 (\| f_1 \|_{L_2}^2 + \| [\delta w,\ \psi_k] \|_{L_2}^2) \qquad (3.26)$$

$$\| \triangle^2 (\delta w) \|_{L_2}^2 \leqslant 3 / \varepsilon^4 (\| f_2 \|_{L_2}^2 + \| [\delta w,\ \varphi_k] \|_{L_2}^2 + \| [\delta F,\ \psi_k] \|_{L_2}^2) \qquad (3.27)$$

Отсюда, используя результаты из [17], при помощи оценок (3.24), (3.25) выводим

$$\| \delta F \|_H \leqslant m_7 / \varepsilon^2 \| \mathbf{f} \|_{L_2}, \qquad \| \delta w \|_H \leqslant m_8 / \varepsilon^3 \| \mathbf{f} \|_{L_2} \qquad (3.28)$$

Из (3.17) и (3.28) нетрудно получить, что оператор $P'_{\mathrm{V}_{k^*}}$ обратим и имеет место оценка

$$\| (\mathbf{P}'_{\mathrm{V}_{k^*}})^{-1} \| \leqslant m_9 / \varepsilon^3 \qquad (3.29)$$

Для оценки $\| P_{\mathrm{V}}'' \|$ рассмотрим билинейную форму

$$\mathbf{P}_{\mathrm{V}}'' (\delta \mathrm{V}) (\delta_1 \mathrm{V})^3 = ([\delta w,\ \delta_1 w],\ -\ [\delta w,\ \delta_1 F] - [\delta_1, w,\ \delta F])$$

Используя теоремы вложения [18], выводим

$$\| \mathbf{P}_{\mathrm{V}}'' (\delta \mathrm{V}) (\delta_1 \mathrm{V}) \|_{L_2}^2 \leqslant m_{10} \| \delta V \|_H^2 \| \delta_1 V \|_H^2$$

откуда следует оценка

$$\| \mathbf{P}_{\mathrm{V}}'' \| \leqslant m_{11} \qquad (3.30)$$

Из (3.16), (3.29), (3.30) получаем

$$\| \mathbf{P}(\mathbf{V}_k^*) \|_{L_2} \| (\mathbf{P}'_{\mathbf{V}_k^*})^{-1} \|^2 \| \mathbf{P}_\mathbf{V}'' \| \leqslant m_{12}\varepsilon^{k-5} < 1/2 \tag{3.31}$$

если $k > 5$ и ε достаточно мало $(0 < \varepsilon < \varepsilon_1)$.

Итак, условия теоремы Канторовича выполняются. Поэтому уравнение (3.8), эквивалентное задаче (1.1) — (1.6), имеет решение $\mathbf{V}^* \equiv (F_1^*, w_1^*)$, для которого справедливы оценки (3.14). Подсчитываем величину r_0 при помощи (3.16), (3.29)

$$\| \mathbf{V}^* - \mathbf{V}_k^* \| \leqslant m_{13}\varepsilon^{k-2} \qquad (k > 5) \tag{3.32}$$

В силу теорем вложения [18] из (3.32) имеем

$$\| z_k^{(i)} \|_{C(l)} < m_{14}\varepsilon^{k-2} \qquad (k > 5, \ i = 1, 2, \ l = 0, 1, 2) \tag{3.33}$$

Наконец, из (3.33) при $l = 2$, $i = 1$, используя (3.20), (3.21) получаем

$$F_{xx} = F_{0,\,xx} + O(\varepsilon), \qquad F_{yy} = F_{0,\,yy} + O(\varepsilon), \quad F_{xy} = F_{0,\,xy} + O(\varepsilon) \tag{3.34}$$

Отсюда вытекает, что неравенство (1.9) выполняется. Это означает, что построенное решение $\mathbf{V}^*$ будет мембранным. Теорема 3.2 доказана. Попутно с доказательством теоремы 3.2 получены следующие выводы.

Теорема 3.3. Для мембранного решения задачи (1.1) — (1.6) справедливы асимптотические представления (2.1), причем остатки допускают оценки

$$\| z_k^{(1)} \|_{C(l)} \leqslant m_{15}\varepsilon^{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, \ l = 0, 1, 2) \tag{3.35}$$

$$\| z_k^{(2)} \|_{C(1)} \leqslant m_{16}\varepsilon^{k+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{3.36}$$

$$\| z_k^{(2)} \|_{C(2)} \leqslant m_{17}\varepsilon^{k} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.37}$$

Оценки (3.35) — (3.37) следуют непосредственно из (3.33) при помощи неравенства треугольника, с учетом того, что каждое дифференцирование функций типа пограничного слоя h_s°, g_s° понижает их порядок по ε на единицу.

§ 4. **Об уравнениях мембраны.** Ниже в некоторых случаях будут получены теоремы существования положительных решений задачи (1.6), (1.7).

1. Рассмотрим круглую симметрично загруженную мембрану. Совместим ось x с направлением радиуса-вектора при $\varphi = 0$. Тогда, используя радиальную симметрию и исключая функцию $w_{0,r}$ из (1.6), получаем уравнение

$$-r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}rv = \frac{\varphi^2}{2v^2}, \qquad \frac{v}{r}\Big|_{r=0} < \infty, \qquad \varphi(r) = \int_0^r q(t)\,t\,dt \tag{4.1}$$

Здесь $v = F_{0,r}$ — радиальное усилие. Граничные условия определяются в зависимости от способа заделки мембраны по контуру. Напряжения в срединной поверхности, действующие вдоль радиуса и дуги, обозначим соответственно через σ_r и σ_φ. Последние выражаются через функцию напряжений F_0 по формулам

$$\sigma = \frac{1}{r}F_{0,r}, \qquad \sigma_\varphi = F_{0,rr} \qquad (\tau = 0) \tag{4.2}$$

При этом (1.9) переходит в неравенство

$$\sigma_r\sigma_\varphi > 0 \tag{4.3}$$

а) Пусть мембрана глухо заделана по контуру

$$dv / dr - (\nu / r)_v \big|_{r=1} = 0 \qquad (0 < \nu < 0.5) \tag{4.4}$$

Теорема 4.1. Задача (4.1), (4.4) имеет положительное решение.

Доказательство. Существование решения задачи (4.1), (4.4) доказано в [7]. Надо доказать (4.3). Для этого от (4.1), (4.4) перейдем к эквивалентному интегральному уравнению

$$r\sigma_r = v = \frac{1}{2}r^{-1}J(r, 1) + r\frac{1+\nu}{2(1-\nu)}J(1, 1) \tag{4.5}$$

Здесь введено обозначение

$$J(r, s) = \int_0^r \eta \int_\eta^s \frac{\varphi^2}{\xi v^2} d\xi \, d\eta$$

Дифференцируя (4.5) по r, получим

$$\sigma_\varphi = -\frac{1}{2} r^{-2} J(r, 1) + \frac{1}{2} \int_r^1 \frac{\varphi^2}{\xi v^2} d\xi + \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} J(1,1) \qquad (4.6)$$

Выражение $\Phi(r) = -{}^1/_2 \, r^{-2} J(r, 1)$ в отрезке $[0,1]$ убывающая по r функция, так как $\Phi(0) = 0$ и

$$\partial\Phi / \partial r = r^{-3} J(r, r)$$

Поэтому минимальное значение $\Phi(r)$ достигается в точке $r = 1$. Далее, очевидно:

$$|\Phi(r)| \leqslant |\Phi(1)| \leqslant \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} J(1, 1) \qquad (0 < \nu < 0.5) \qquad (4.7)$$

Наконец, из (4.6) при помощи (4.7) получаем, что $\sigma_\varphi > 0$, если $r \in (0, 1]$. Положительность σ_r очевидна и условие (4.3) выполняется.

Следствие 1. Симметричное решение задачи о больших прогибах круглой симметрично загруженной пластины, глухо заделанной по контуру, будет мембранным. (Вытекает из теоремы 3.2.) В [10] доказано, что в случае круглой симметрично загруженной пластины, глухо заделанной по контуру, при достаточно больших $q(r)$ наряду с симметричным решением появляется несимметричное. Из следствия 1 и теоремы 3.2 вытекает.

Следствие 2. Несимметричное решение не будет мембранным.

б) Пусть мембрана подвергнута однородному нормальному растяжению на контуре

$$v\,|_{r=1} = T \geqslant 0 \qquad (4.8)$$

В случае, когда $T = 0$, контур свободен от напряжений.

Теорема 4.2. Пусть выполняется неравенство

$$T > T_0 = \max_{0 \leqslant r \leqslant 1} \left(\frac{1}{2r^2} \Phi(r)\right)^{1/_3} \qquad \left(\Phi(r) = \int_0^r \frac{\varphi^2(\tau)}{\tau} d\tau\right) \qquad (4.9)$$

Тогда задача (4.1), (4.8) имеет единственное положительное решение.

Доказательство. Существование и единственность решения задачи (4.1), (4.8) доказана в [7]. Выясним, когда справедливо условие (4.3). Для этого перейдем к эквивалентному интегральному уравнению

$$r\sigma_r = v \quad \frac{r}{2} \int_r^1 \Psi(t) \frac{dt}{t^3} + Tr \qquad \left(\Psi(t) = \int_0^t \frac{\tau\varphi^2(\tau)}{v^2} d\tau\right) \qquad (4.10)$$

Дифференцируя (4.9) по r, получим

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2} \int_r^1 \Psi(t) \frac{dt}{t^3} - \frac{1}{2r^2} \Psi(r) + T \qquad (4.11)$$

Пусть $T > 0$. Тогда из (4.10) находим, что $v \geqslant Tr$. Используя это из (4.11), выводим, что если ${}^1/_2 \, \Phi(r) \leqslant T^3 r^2$, то σ_φ положительно. Поэтому при $T > T_0$ условие (4.3) выполняется и решение будет положительным.

Следствие 1. Если $0 \leqslant T < T_0$, то решение задачи (4.1), (4.8) не будет положительным.

Следствие 2. Если $T > T_0$, то симметричное решение круглой симметрично загруженной пластины, подвергнутой на контуре растяжению T, будет мембранным. Если же $0 \leqslant T < T_0$, то симметричное решение не будет мембранным.

Однако, если ограничиться множеством функций, зависящих только от r, и считать мембранным такое решение, которое удовлетворяет условию $\sigma_r \geqslant 0$, то так же можно показать, что симметричное решение будет мембранным при любых $T \geqslant 0$ [7]. Результаты, полученные в [7] и несколько более точные, можно получить при помощи теорем 3.2 и 3.3, доказанных для одномерного случая при исследовании асимптотики решений симметрично загруженных оболочек вращения [13]. При этом важно отметить следующий факт. Обоснование асимптотики не связано со способом ее построения. Существенным оказывается только выполнение оценок (3.16), (3.29) и (3.15).

2. Пусть на границе мембраны произвольной формы заданы напряжения

$$F_{0,\tau\tau}|_\Gamma = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta, \quad F_{0,n\tau}|_\Gamma = {}^1/_2\,(b-a)\sin 2\theta \qquad (4.12)$$
$$(a > 0, \quad b > 0)$$

Здесь $\theta = \theta(A)$ — угол, который нормаль n образует с осью x. В случае, когда $a = b = \sigma$ задача (1.1) — (1.4), (4.12) переходит в задачу (1.1) — (1.4), (1.8), рассмотренную П. Файфом в [8].

Преобразуем исходные уравнения. Положим

$$F_1 = F_0\sigma^{-1}, \qquad F = F_1 - {}^1/_2\,(a_1x^2 + b_1y^2) \qquad (4.13)$$

Здесь

$$a_1 = a\sigma^{-1/2} > 0, \quad b_1 = b\sigma^{-1/2} > 0, \quad \sigma = {}^1/_2\,(a^2+b^2)$$
$$w = w_0\sigma^{-1/2}, \quad p = q\sigma^{-3/2}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon\sigma^{-1/2} \qquad (4.14)$$

Тогда (1.6), (4.12) перейдет в задачу

$$\Delta^2 F + {}^1/_2\,[w,w] = 0, \qquad -a_1w_{xx} - b_1w_{yy} - [F,w] - p = 0 \qquad (4.15)$$

$$w(A) = F(A) = F_n(A) = 0, \qquad (A \in \Gamma) \qquad (4.16)$$

Повторяя рассуждения [8], легко доказать существование решений задачи (4.15), (4.16) для достаточно малых $p(x, y)$. Для этого используются пространства $B^{l,\alpha}$ функций f, определенных в D с непрерывными производными порядка l, удовлетворяющими равномерно условию Гёльдера с показателем $\alpha (0 < \alpha < 1)$ вдоль всего контура с нормой

$$\|f\|_{l+\alpha} = \|f\|_{\bar{B}^{l,\alpha}} = \sup|D^lf| + \sup\frac{|D^lf(N_1) - D^lf(N_2)|}{|N_1 - N_2|^\alpha} \qquad (4.17)$$

Здесь предполагается, что $N_1 = (\varphi_1, n)$, $N_2 = (\varphi_2, n)$, а верхняя грань берется по всем точкам $N_1 \neq N_2$ из D и по всем производным порядка l.

Теорема 4.3. Пусть $\|p\|_{l+\alpha} < p_0$. Тогда, если p_0 достаточно мало, то существует решение задачи (4.15), (4.16) такое, что

$$\|F\|_{l+4+\alpha} + \|w\|_{l+2+\alpha} \leqslant \|p\|_{l+\alpha}^{1/2} \qquad (4.18)$$

Доказательство [1]. Определим последовательность F^i, w^i формулами

$$F^\circ = w^\circ = 0$$
$$\Delta^2F^i = -{}^1/_2\,[w^{i-1}, w^{i-1}] \qquad (i = 1, 2, \ldots) \qquad (4.19)$$
$$-a_1w^i_{xx} - b_1w^i_{yy} = p(x,y) + [F^{i-1}, w^{i-1}] \qquad (4.20)$$
$$w^i(A) = F^i(A) = F^i_n(A) = 0 \qquad (4.21)$$

[1] При $a_1 = b_1 = 1$ теорема 4.3 доказана в [8] (теорема 2)).

Далее вводятся обозначения

$$A_i = \| F^i \|_{l+4+\alpha} + \| w^i \|_{l+2+\alpha} \tag{4.22}$$

При помощи рассуждений [8], а также теоремы 7.3 из [19], показывается, что

$$A_i < C_1 (A_{i-1}^2 + \| p \|_{l+\alpha}) \tag{4.23}$$

Затем выбирается постоянная C_1 такая, что

$$p_0 < {}^1/_4 C_1{}^2 \tag{4.24}$$

Теперь из (4.23), (4.24) следует

$$A_i \leqslant \| p \|_{l+\alpha}^{1/2} \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{4.25}$$

Чтобы показать, что последовательности F^i, w^i сходятся к решению, определим разности

$$\delta^i F = F^i - F^{i-1}, \qquad \delta^i w = w^i - w^{i-1} \tag{4.26}$$

Теперь в уравнениях (4.19) — (4.21) заменим индекс i на $i - 1$ и получившиеся уравнения вычтем из первоначальных. Применяя теорему 7.3 из [19] и (4.25), получим

$$\| \delta^i F \|_{l+4+\alpha} + \| \delta^i w \|_{l+2+\alpha} < C_2 \| p \|_{l+\alpha}^{1/2} (\| \delta^{i-1} F \|_{l+4+\alpha} + \| \delta^{i-1} w \|_{l+2+\alpha}) \tag{4.27}$$

Из (4.27) следует, что для сходимости последовательности к решению в соответствующих нормах, должно выполняться условие

$$C_2 \sqrt{p_0} < 1 \tag{4.28}$$

Отсюда и из (4.24) видно, что если p_0 достаточно мало, то существует решение задачи (4.15), (4.16) и (4.18) выполняется.

Из оценки (4.18) вытекает следующая теорема.

Теорема 4.4. Если $\sqrt{p_0} < d = \min ({}^1/_2 a_1, {}^1/_2 b_1)$, то решение задачи (1.6), (4.12) будет положительным.

Доказательство. Из (4.18) легко выводятся неравенства

$$| F_{xx} | < d, \qquad | F_{yy} | < d, \qquad | F_{xy} | < d \tag{4.29}$$

Отсюда, принимая во внимание (4.13), для F_0, получаем

$$F_{0,xx} > {}^1/_2 a \sigma^{1/2}, \qquad F_{0,yy} > {}^1/_2 b \sigma^{1/2}, \qquad F_{0,xx} F_{0,yy} - F_{0,xy}^2 > 0 \tag{4.30}$$

В случае, когда $a = b = \sigma$, надо положить $p_0 = {}^1/_4$.

Следствие. Если $\| p \|_{l+\alpha}^{1/2} < d$, то решение задачи (1.1) — (1.4), (4.12) будет мембранным.

3. Рассмотрим пример круглой мембраны, подверженной на контуре действию несимметричных растягивающих усилий вида

$$\sigma_r |_{r=1} = a + b \sin^2 \varphi, \qquad \tau |_{r=1} = 0 \tag{4.31}$$

Здесь a и b — постоянные, удовлетворяющие условию $a > 0$, если

$b > 0$ и $a > |b| > 0$, если $b < 0$

Уравнения (1.6), (4.31) можно привести к виду

$$\Delta^2 F + {}^1/_2 [w, w] = 0, \qquad -Lw - [F, w] - q = 0 \tag{4.32}$$

$$w |_{r=1} = F |_{r=1} = \partial F / \partial r |_{r=1} = 0 \tag{4.33}$$

При этом L будет эллиптическим оператором. Чтобы сделать это, достаточно положить

$$F = F_0 - {}^1/_2 a r^2 - {}^1/_4 r^2 b (1 + \cos 2\varphi - {}^1/_3 r^2 \cos 2\varphi), \qquad w = w_0$$

Теперь, применяя рассуждения теорем (4.3) и (4.4) к (4.32), (4.33), устанавливается следующая теорема.

Теорема 4.5. Существует постоянная p_0 такая, что если $\|q\|_{l+\alpha} < p_0$, то решение задачи (1.6), (4.31) будет положительным.

В общем случае задачи (1.6), (1.7), положительности нет. В качестве примера приведем круглую мембрану, к концам диаметра которой приложены две радиальные сосредоточенные силы P, а поперечная нагрузка отсутствует. Тогда (1.6) переходит в уравнение

$$\Delta^2 F_0 = 0$$

В [21] (стр. 612) для этого случая приведены формулы для σ_r, σ_φ и τ, а также графики этих функций в зависимости от r и φ. Из этих графиков видно, что σ_r и σ_φ меняют знак, и свойство положительности не выполняется. Другим примером может служить утверждение, высказанное в следствии 1 теоремы 4.2.

Автор благодарит В. И. Юдовича за большую помощь в работе.

Поступила 15 XI 1963

Ростовский-на-Дону университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1956.
2. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 2.
3. Морозов Н. Ф. К нелинейной теории тонких пластин. Докл. АН СССР, 1957, т. 114, № 5.
4. Сборник. Теория гибких и круглых пластинок. ИЛ, 1957.
5. Bromberg E. Non-Linear Bending of a Circulare Plate under Normal Pressure. Communs. Pure and Appl. Math., 1956, v. IX, No 4.
6. Срубщик Л. С. и Юдович В. И. Асимптотика уравнений большого прогиба круглой симметричной загруженной пластины. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 2.
7. Срубщик Л. С. и Юдович В. И. Асимптотика уравнений большого прогиба круглой симметрично загруженной пластины. Сибирский матем. журн., 1963, т. 4, № 3.
8. Fife P. Non-Linear Deflection of Thin Elastic — Plate under Tension. Communs Pure and Appl. Math., 1961, v. XIV, No 2.
9. Ворович И. И. Некоторые вопросы устойчивости оболочек в большом. Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 1.
10. Морозов Н. Ф. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластины, загруженной симметричной нагрузкой. Изв. высш. учебн. завед., Математика, 1961, № 2 (21).
11. Vanowitch M. Non-Linear Bucling of a Circulare Elastic Plates. Communs Pure and Appl. Math., 1956, v. IX, No 4.
12. Канторович Л. В. и Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
13. Срубщик Л. С. и Юдович В. И. Асимптотическое интегрирование уравнений большого прогиба симметрично загруженных оболочек вращения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
14. Friedrichs K., Stoker J. The Non-Linear Boundary Value — Problem of the Bucled Plate. Amer. J. Math., 1941, 63.
15. Вишик М. И. и Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 5.
16. Трикоми Ф. Лекции об уравнениях в частных производных. ИЛ, 1957.
17. Гусева О. В. О краевых задачах для сильно эллиптических систем. Докл. АН СССР, 1955, т. 102, № 6.
18. Соболев С. Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.
19. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. ИЛ., 1962.
20. Феодосьев В. И. Упругие элементы точного приборостроения. Оборонгиз, 1949.
21. Вайнберг Д. В. и Вайнберг Е. Д. Пластины, диски, балки-стенки. Госстройиздат УССР Киев, 1959.