Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

О СТРУКТУРЕ ПОЛЯ МИКРОНАПРЯЖЕНИЙ РАЗВИТОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Г. И. Баренблатт, В. А. Городцов
(Москва)

Во всех моделях твердого тела, рассматриваемых в механике сплошных сред (упругое тело, идеально пластическое тело и т. д.), наиболее детальный анализ допускает простейший случай однородности и изотропии среды. Реальные твердые тела, которые можно считать однородными и изотропными в отношении их макроскопических свойств, в большинстве случаев обладают микронеоднородной структурой, характерный размер которой значительно превосходит молекулярный. Типичным примером могут служить поликристаллы, у которых размер отдельных зерен имеет порядок 10^{-5} — 10^{-1} *см*; этот размер мал сравнительно с обычным размером изделий из поликристаллов, однако на несколько порядков превышает характерный молекулярный масштаб. Полимеры, как недавно показано В. А. Каргиным и Т. И. Соголовой, также обладают неоднородной структурой надмолекулярных размеров.

Параметры отдельных микронеоднородностей (геометрические характеристики, упругие свойства, состав и т. д.) можно считать случайными величинами. Поэтому характеристики напряженного состояния в таких телах (напряжения и др.) представляют собой случайные функции точки тела и времени. Для описания напряженно-деформированного состояния тел при любом отклонении от линейной упругости существенны не только средние величины — математические ожидания — рассматриваемых характеристик, но и корреляционные функции. В самом деле, для задач, допускающих рассмотрение при помощи линейных уравнений обычной теории упругости, корреляции в силу линейности уравнений из осредненных уравнений выпадают. Поэтому можно получить замкнутую систему линейных уравнений для средних величин и независимо рассматривать линейную же систему уравнений для корреляционных функций, если они представляют самостоятельный интерес. Для нелинейных процессов, в частности пластического течения, это, вообще говоря, не так. Уравнения для средних величин содержат корреляционные моменты, которые представляют необходимый элемент макроскопического рассмотрения.

Существует аналогия между пластическим течением и турбулентностью в вязкой жидкости, в четкой форме отмеченная Тейлором [1]. Эта аналогия вытекает из нелинейного характера того и другого явлений, а также их диссипативных свойств. Нелинейность приводит к перераспределению энергии по различным степеням свободы движения, а диссипация энергии в малых масштабах устраняет возможность ее накопления. Определенное продвижение в теории турбулентности достигнуто при помощи статистических методов, причем наиболее обозримые результаты получаются для простейшего частного случая однородной и изотропной турбулентности. За исключением некоторого весьма частного вида течений, турбулентное поле не бывает столь простым. Тем не менее, как было впервые установлено А. Н. Колмогоровым (см. [2-4]), для развитых турбулентных течений предположение об изотропии и однородности реализуется в движениях достаточно малых масштабов независимо от строения основного поля (локальная однородность и локальная изотропия развитого турбулентного течения). Это обстоятельство, а также гипотеза передачи энергии по каскаду движений различных масштабов позволили А. Н. Колмогорову описать турбулентные движения соответствующих масштабов. Упомянутая аналогия позволяет провести соответствующее рассмотрение и в теории развитого пластического течения.

§ 1. Статистический характер поля микронапряжений. Реальные твердые материалы имеют неоднородную микроструктуру надмолекулярных размеров. Например, поликристаллические материалы состоят из множества кристаллов, отличающихся формой, размерами, ориентацией, состоянием границ и т. п. По существу, аналогичная картина имеет место для горных пород и для полимеров. Естественно, что геометрически одинаковые образцы, изготовленные из различных кусков макрооднородного материала, будут микроскопически неодинаковы, а напряжения, возникающие в этих образцах под действием одной и той же нагрузки, также будут различными. Для реальных тел даже задание полной структуры неоднородности представляет непреодолимые трудности, не говоря уже о математических трудностях расчета напряженно-деформированного состояния в теле, состоящем из большого числа кристаллов. Однако, именно случайный характер микронеоднородностей позволяет применить статистические методы макроскопического описания. Так, при помощи статистических методов в работе И. М. Лифшица и Л. Н. Розенцвейга [5] было дано описание упругих свойств поликристаллов.

В соответствии с этим, совокупность геометрически одинаковых образцов, изготовленных из разных кусков макрооднородного и изотропного материала, будем рассматривать как статистический ансамбль. Средние по ансамблю значения всевозможных характеристик (математические ожидания) [1] будем обозначать символом $\langle\,\rangle$, так что напряжение σ_{ij} (x) в данной точке x образца представляется в виде

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \langle\sigma_{ij}(\mathbf{x})\rangle + \sigma_{ij}'(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

где $\sigma_{ij}'(\mathbf{x})$ — пульсация напряжения или микронапряжение [2]. Микронапряжения представляют собой случайное тензорное поле со средними значениями, равными нулю. Основной характеристикой этого поля является корреляционный тензор четвертого ранга

$$R_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{r}) = \langle\sigma_{ij}'(\mathbf{x})\sigma_{kl}'(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle \tag{1.2}$$

характеризующий связь микронапряжений в различных точках. Масштаб расстояний, на которых значения компонент корреляционного тензора становятся пренебрежимо малыми сравнительно с их значениями при $r = 0$, будем называть масштабом корреляции микронапряжений.

В силу симметрии тензора σ_{ij}' и определения (1.2) имеем

$$R_{ijkl} = R_{jikl} = R_{jilk}, \qquad R_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{r}) = R_{klij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}-\mathbf{r}) \tag{1.3}$$

Поле напряжений удовлетворяет уравнениям равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha k}(\mathbf{x}+\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial\sigma_{\alpha k}(\mathbf{x}+\mathbf{r})}{\partial r_\alpha} = 0 \tag{1.4}$$

Осредняя (1.4) и вычитая осредненное уравнение из (1.4), получаем

$$\frac{\partial\langle\sigma_{\alpha k}(\mathbf{x})\rangle}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial\sigma_{\alpha k}'(\mathbf{x})}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{1.5}$$

---

[1] В силу эргодической гипотезы осреднение по ансамблю можно заменить пространственным или временным осреднением.

[2] Эта терминология несколько отличается от обычной.

Умножая второе уравнение (1.4) на $\sigma_{ij}'(\mathbf{x})$ и осредняя, получаем уравнение для корреляционного тензора

$$\frac{\partial R_{ijk\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{r})}{\partial r_\alpha} = 0 \tag{1.6}$$

Отметим, что линейные инварианты корреляционного тензора R_{ijkl}, получающиеся попарной сверткой по индексам, имеют определенный физический смысл. В самом деле, выделяя шаровую часть тензора напряжений, имеем

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \tag{1.7}$$

Подставляя это в (1.2) и свертывая, находим

$$R_{\alpha\beta\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{r}) = 3P(\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{r}) + T(\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{r}), \quad R_{\alpha\alpha\beta\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{r}) = 9P(\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{r}) \tag{1.8}$$

где

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \langle p'(\mathbf{x})\, p'(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle, \qquad T(\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{r}) = \langle \tau_{\alpha\beta}'(\mathbf{x})\, \tau_{\alpha\beta}'(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle$$

Упругая энергия единицы массы тела с модулем сдвига μ и модулем всестороннего сжатия K выражается так:

$$W = \frac{1}{4\mu\rho}\tau_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{2K\rho}p^2 = W_0 + W' = \left\{\frac{1}{4\mu\rho}\langle\tau_{\alpha\beta}\rangle^2 + \frac{1}{2K\rho}\langle p\rangle^2\right\} +$$
$$+ \left\{\frac{1}{4\mu\rho}\tau_{\alpha\beta}'^2 + \frac{1}{2K\rho}p'^2\right\} + \left\{\frac{1}{2\mu\rho}\langle\tau_{\alpha\beta}\rangle\,\tau_{\alpha\beta}' + \frac{1}{K\rho}\langle p\rangle p'\right\} \tag{1.9}$$

где член в первых скобках W_0 представляет собой сумму упругой энергии формоизменения и объемного расширения для средних напряжений, член во вторых скобках — аналогичную величину для микронапряжений, а в третьей скобке заключены члены, выражающие взаимодействие между средними напряжениями и микронапряжениями (в пластическом теле W — энергия, которая выделяется при полной разгрузке). Из выражения для средней энергии последние члены выпадают, так что средняя энергия микронапряжений выражается в виде

$$\langle W'\rangle = \frac{1}{4\mu\rho}P(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{2K\rho}T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \tag{1.10}$$

Таким образом, $R_{\alpha\alpha\beta\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ и $R_{\alpha\beta\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ выражаются в виде линейной комбинации средних упругих энергий формоизменения и объемной деформации для микронапряжений.

Как уже упоминалось, при достаточно малых напряжениях, когда все деформации обратимы и поведение тел описывается классическими линейными уравнениями теории упругости, определение тензора средних напряжений и корреляционного тензора может быть проведено раздельно. Эта задача рассматривалась С. Д. Волковым [6]. Всякое отклонение от классической линейной упругости приводит к нелинейности основных соотношений, и система уравнений для средних напряжений перестает быть замкнутой. В частности, это имеет место при пластическом течении.

§ 2. Однородные изотропные микронапряжения. Простейшим возможным предположением о структуре поля микронапряжений является предположение о его однородности и изотропии. Это предположение означает, в частности, однородность и изотропию корреляционного тензора (1.2).

Изотропное поле микронапряжений можно реализовать, например, подвергая шар многократным одинаковым растяжениям или сжатиям в различных случайных направлениях (перекатывая его между жесткими плоскостями). Общее выражение для однородного изотропного тензора, удовлетворяющего соотношениям (1.3), имеет вид

$$R_{ijkl}(\mathbf{r}) = A(r)\, n_i n_j n_k n_l + B(r)\,(n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij}) + C(r)\,(n_i n_k \delta_{jl} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_k \delta_{il} + n_j n_l \delta_{ik}) + D(r)\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + E(r)\,\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (2.1)$$

где $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{n}\,(n_i) = \mathbf{r}/r$; A, B, C, D, E — скалярные функции r. Подставляя (2.1) в уравнение (1.6), получаем три независимых уравнения

$$\begin{aligned} &2A + rA' - 2B + rB' - 4C + 2rC' = 0 \\ &2B + rB' + 2C + rE' = 0 \\ &B + 3C + rC' + rD' = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вместо функций A, B, C, D, E можно ввести в рассмотрение их линейные комбинации, имеющие непосредственный физический смысл

$$\begin{aligned} &f_1(r) = n_i n_j n_k n_l R_{ijkl} = A + 2B + 4C + 2D + E \\ &f_2(r) = n_i n_j t_k t_l R_{ijkl} = B + E, \quad f_3(r) = n_i t_j n_k t_l R_{ijkl} = C + D \\ &f_4(r) = \tau_i t_j \tau_k t_l R_{ijkl} = D, \quad f_5(r) = \tau_i \tau_j t_k t_l R_{ijkl} = E \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$(\mathbf{n} = \mathbf{r}/r, \quad \mathbf{n}^2 = \mathbf{t}^2 = \boldsymbol{\tau}^2 = 1, \quad \mathbf{nt} = \mathbf{n}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t}\boldsymbol{\tau} = 0)$$

Уравнения (2.2) принимают вид

$$\begin{aligned} {}^1/_2 r f_1' &= -f_1 + f_2 + 2f_3 \\ {}^1/_2 r f_2' &= -f_2 - f_3 + f_4 + f_5 \\ r f_3' &= -f_2 - 3f_3 + 3f_4 + f_5 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Соответственно функциям $f_1, \ldots, f_5$ можно ввести интегральные масштабы корреляции вида

$$L_i = \int_0^\infty \frac{f_i(r)dr}{f_i(0)} \quad (2.5)$$

Таким образом, в силу уравнений равновесия только два корреляционных момента остаются независимыми.

В дальнейшем исследовании иногда удобно переходить к преобразованиям Фурье. Случайное поле микронапряжений можно разложить в интеграл Фурье-Стильтьеса

$$\sigma_{ij}'(\mathbf{x}) = \int e^{i\mathbf{kx}}\, dZ_{ij}(\mathbf{k}) \quad (2.6)$$

Подставляя это разложение в определение корреляционного тензора (1.2), получаем

$$R_{ijkl}(\mathbf{x}+\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \iint e^{i[\mathbf{kr}+(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}]} \langle dZ_{ij}(\mathbf{k})\, d\bar{Z}_{kl}(\mathbf{k}')\rangle \quad (2.7)$$

(Здесь черта означает комплексно-сопряженную величину.)

Для однородности поля (независимости от $\mathbf{x}$) необходимо, чтобы

$$\langle dZ_{ij}(\mathbf{k})\, d\bar{Z}_{kl}(\mathbf{k}')\rangle = \Phi_{ijkl}(\mathbf{k})\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\, d^3\mathbf{k}\, d^3\mathbf{k}' \quad (2.8)$$

т. е. чтобы спектральные компоненты полей микронапряжений были

некоррелированы. Таким образом, для однородного поля получаем

$$R_{ijkl}(\mathbf{r}) = \int \Phi_{ijkl}(\mathbf{k})\, e^{i\mathbf{kr}}\, d^3\mathbf{k} \tag{2.9}$$

Преобразование Фурье корреляционного тензора Φ_{ijkl} определяется обратным (2.9) соотношением

$$\Phi_{ijkl}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3}\int R_{ijkl}(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{kr}}\, d^3\mathbf{r} \tag{2.10}$$

оно удовлетворяет соотношениям симметрии

$$\Phi_{ijkl} = \Phi_{jikl} = \Phi_{ijlk}, \qquad \Phi_{ijkl}(\mathbf{k}) = \Phi_{klij}(-\mathbf{k}) = \overline{\Phi}_{klij}(\mathbf{k}) \tag{2.11}$$

причем форма $\Phi = \Phi_{ijkl}(\mathbf{k})\, X_i Y_j \overline{X}_l \overline{Y}_k$ определенно-положительна при произвольных комплексных векторах X, Y. Уравнения (1.6) запишутся в виде

$$k_i \Phi_{ijkl} = 0 \tag{2.12}$$

Далее общее выражение для изотропного спектрального тензора Φ_{ijkl} записывается в виде

$$\Phi_{ijkl} = a(k)\, \varkappa_{ij}\varkappa_{kl} + b(k)(\varkappa_{ik}\varkappa_{jl} + \varkappa_{jk}\varkappa_{il}) \qquad (\varkappa_{ij} = k^{-2}(k_i k_j - k^2\delta_{ij})) \tag{2.13}$$

где $a(k)$, $b(k)$ — функции модуля волнового вектора.

Коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ можно выразить через величины имеющие непосредственный физический смысл. Для этого воспользуемся спектральным представлением введенных в § 1 функций P и T в случае однородного изотропного поля микронапряжений. Имеем

$$P(r) = \int \Pi(\mathbf{k})\, e^{i\mathbf{kr}}\, d^3\mathbf{k} = 4\pi \int_0^\infty \Pi(k)\, k^2 \frac{\sin kr}{kr}\, dk$$

$$T(r) = 4\pi \int \Theta(k)\, k^2 \frac{\sin kr}{kr}\, dk \tag{2.14}$$

Интегрирование по углам выполняется отдельно в силу изотропии. В силу (1.8), (2.9), (2.13) имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta\alpha\beta}(k) &= 3\Pi(k) + \Theta(k) = 2a(k) + 6b(k) \\ \Phi_{\alpha\alpha\beta\beta}(k) &= 9\Pi(k) = 4a(k) + 4b(k) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Согласно (1.10) и (2.14) получаем для однородного изотропного поля микронапряжений

$$\langle W' \rangle = \int_0^\infty \frac{4\pi}{\mu\rho} E(k)\, dk + \int_0^\infty \frac{16\pi}{3K\rho} e(k)\, dk$$

$$E(k) = {}^1/_4 k^2\, \Theta(k), \qquad e(k) = {}^3/_8 k^2 \Pi(k) \tag{2.16}$$

так что $E(k)$ и $e(k)$ с точностью до постоянных размерных множителей представляют собой спектральные плотности энергии формоизменения и объемной деформации соответственно.

Выражая $a(k)$ и $b(k)$ непосредственно через $E(k)$ и $e(k)$, можно переписать (2.13) в виде

$$\Phi_{ijkl}(k) = \frac{E(k) - e(k)}{k^2}\{\varkappa_{ik}\varkappa_{jl} + \varkappa_{jk}\varkappa_{il} - \varkappa_{ij}\varkappa_{kl}\} + \frac{6e(k)}{k^2}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl} \tag{2.17}$$

§ 3. Локальные свойства развитого пластического течения. Рассмотрим тело, находящееся в макрооднородном напряженно-деформированном состоянии и выполненное из микронеоднородного материала. Будем предполагать, что материал по своим свойствам приближается к идеально пластическому телу и, кроме того, что отдельные элементы надмолекулярной структуры пластически деформируются почти изотропным образом. В частности, применительно к поликристаллам это означает, что кристаллиты обладают большим числом плоскостей легкого скольжения.

Проследим за развитием пластических деформаций в теле при увеличении нагрузки, для определенности будем говорить о поликристалле. Сначала, когда нагрузки достаточно малы, материал деформируется упруго. Затем по достижении некоторой нагрузки наиболее нагруженные и благоприятно ориентированные кристаллиты подвергаются пластическим деформациям. Если микронеоднородности в материале распределены достаточно равномерно, то среднее расстояние l_1 между первыми пластически деформированными кристаллитами может быть весьма велико, в частности, велико сравнительно со средним размером кристаллита. Таким образом[1], возникают микронапряжения с характерным масштабом l_1. При дальнейшем увеличении нагрузки пластические деформации возникают в новых кристаллитах, расположенных уже ближе один к другому, так что возникают случайно распределенные микронапряжения с масштабом $l_2 < l_1$. При последующем увеличении нагрузки таким же образом возникают микронапряжения масштаба $l_3 < l_2 < l_1$ и т. д., так что в развитом пластическом течении появляется набор микронапряжений с масштабами от l_1 до размера порядка среднего размера зерна d и менее.

Для тел, близких к идеально пластическим, развитие течения происходит в небольшом интервале изменения нагрузок. То, что масштабы микронапряжений могут значительно превышать размер зерна, подтверждается экспериментом (см. очень показательную работу П. О. Пашкова и В. А. Братухиной [7]). В условиях неоднородного напряженно-деформированного состояния верхний масштаб микронапряжений определяется масштабом неоднородности.

Для микронапряжений наибольшего масштаба l_1 существенна анизотропия поля приложенных нагрузок, так что микронапряжения этого масштаба нельзя считать изотропными. При переходе к следующему, меньшему масштабу l_2, эта анизотропия уже менее существенна, так как на анизотропию микронапряжений наибольшего масштаба накладывается новый случайный элемент. С переходом к микронапряжениям еще меньших масштабов происходит дальнейшая нивелировка анизотропии, так что можно предполагать, что микронапряжения, имеющие масштаб, существенно меньший l_1, изотропны. Подчеркнем, что изотропия микронапряжений самых малых масштабов обеспечивается наличием большого числа плоскостей легкого скольжения у отдельных кристаллитов. На поведение материалов с малым числом систем легкого скольжения существенное влияние

[1] Под характерным масштабом понимается, как обычно, порядок величины расстояния, на котором существенно меняются напряжения.

будет оказывать текстура, образующаяся в процессе деформации. Она ведет к анизотропии микронапряжений малых масштабов.

Намеченная картина показывает, что в развитом пластическом течении поле микронапряжений с масштабами, меньшими некоторого l, обладает определенной автономностью, т. е. независимостью от деталей структуры основного напряженного состояния и микронапряжений с большими масштабами, а также однородностью и изотропией. Иными словами, в развитом пластическом течении поле микронапряжений обладает свойством локальной изотропии и однородности. Таким образом, для соответствующих масштабов структурные тензоры [2-4], составленные из характеристик напряженно-деформированного состояния для развитого пластического течения, должны быть изотропными и однородными. В частности, тензор

$$D_{ijkl}(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{r}) = \langle [\sigma_{ij}(\mathbf{x}) - \sigma_{ij}(\mathbf{x}+\mathbf{r})]\,[\sigma_{kl}(\mathbf{x}) - \sigma_{kl}(\mathbf{x}+\mathbf{r})]\rangle \qquad (3.1)$$

при $r < l$ должен быть однородным и изотропным. Отсюда следует, что и для структурного тензора D_{ijkl} справедлива формула (2.1). Для выяснения связей между коэффициентами A, B, C, D, E структурного тензора D_{ijkl} заметим, что в силу автономности поля микронапряжений с масштабами, меньшими l, можно получить эти связи, рассмотрев частный случай, когда имеет место полная изотропия и однородность всего поля напряжений. В этом случае

$$\begin{aligned} D_{ijkl} &= 2\langle \sigma_{ij}(\mathbf{x})\sigma_{kl}(\mathbf{x})\rangle - 2\langle \sigma_{ij}(\mathbf{x})\sigma_{kl}(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle = \\ &= 2\langle \sigma_{1ij}\sigma_{1kl}\rangle - 2\langle \sigma_{1ij}\sigma_{2kl}\rangle \end{aligned} \qquad (3.2)$$

где индексы соответствуют точке 1 с радиус-вектором $\mathbf{x}$ и точке 2 с радиус-вектором $\mathbf{x}+\mathbf{r}$. Продифференцировав последнее соотношение по координатам точки 2, получаем

$$\frac{\partial D_{ijkl}}{\partial x_{2k}} = -2\left\langle \sigma_{1ij}\frac{\partial \sigma_{2kl}}{\partial x_{2k}}\right\rangle = 0 \qquad (3.3)$$

так как вследствие уравнения равновесия $\partial\sigma_{2kl} / \partial x_{2k} = 0$. В силу однородности последнее соотношение записывается в виде

$$\frac{\partial D_{ijkl}}{\partial r_k} = 0 \qquad (3.4)$$

(r_k — компоненты вектора $\mathbf{r}$). Вполне аналогично предыдущему, получим, что функции A, B... связаны между собой тремя дифференциальными соотношениями (2.2), и, следовательно, для полного описания тензора D_{ijkl} достаточно знания двух из этих функций.

Рассмотрим теперь процесс преобразования энергии в ходе установившегося пластического течения. Работа внешних нагрузок в условиях развитого пластического течения полностью превращается в работу пластических деформаций, причем это превращение происходит при пластическом деформировании отдельных зерен. Опираясь на данную выше схему развития пластического течения, процесс превращения энергии можно представить себе как передачу энергии от макроскопических напряжений к микронапряжениям наибольшего масштаба, от них — к микро-

напряжениям все меньших масштабов, пока не происходит диссипация энергии за счет пластической деформации зерен, т. е. в микронапряжениях с масштабом l_0, меньшим среднего размера зерна.

Аналогично введению А. Н. Колмогоровым инерционного интервала в теории турбулентности, можно сделать предположение о существовании интервала масштабов микронапряжений (упругого интервала), в котором, с одной стороны, имеет место локальная изотропия и однородность, а с другой стороны, характерные масштабы достаточно велики сравнительно с размером l_0, так что на микронапряжениях рассматриваемого интервала масштабов не происходит заметной диссипации энергии.

Соотношения, характеризующие пластическое течение, можно выразить в виде зависимостей между кинематическими величинами типа «кинематического напряжения» σ_{ij}/ρ, энергии, поглощаемой пластическими деформациями в единице массы и т. д., из размерности которых исключена масса за счет деления на соответствующую степень плотности. В частности, коэффициенты A, B, C, D, E, определяющие кинематический структурный тензор D_{ijkl} имеют при таком условии размерность L^4T^{-4}. В упругом интервале все кинематические характеристики пластического течения определяются только двумя величинами: расстоянием r и энергией ε, поглощаемой в единице массы за единицу времени. Из соображений размерности получаем

$$A = \alpha\,(\varepsilon r)^{4/3}, \qquad B = \beta\,(\varepsilon r)^{4/3}, \qquad C = \gamma\,(\varepsilon r)^{4/3}$$
$$D = \delta\,(\varepsilon r)^{4/3}, \qquad E = \lambda\,(\varepsilon r)^{4/3} \tag{3.5}$$

Для микронапряжений всех масштабов $r < l$ существенным параметром будет также l_0 — масштаб микронапряжений, в которых происходит диссипация энергии на пластические деформации. Это приводит к зависимостям вида $A = \varepsilon^{4/3}r^{4/3}f_A\,(r\,/\,l_0)$, где f_A — некоторая безразмерная функция и аналогично для других функций.

Подставляя (3.5) в (2.2), получаем следующие выражения для коэффициентов γ, λ и δ через α и β

$$\gamma = \tfrac{5}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\beta, \qquad \delta = -\tfrac{65}{8}\alpha + \tfrac{7}{8}\beta, \qquad \lambda = -\tfrac{15}{4}\alpha - \tfrac{7}{4}\beta \tag{3.6}$$

Представляет также интерес дать спектральную формулировку сделанных гипотез и полученных результатов. Первая гипотеза заключается в том, что поля микронапряжений с волновыми числами $k > l^{-1}$ обладают однородностью. Отсюда вытекает некоррелированность микронапряжений в этом диапазоне волновых чисел, т. е. формула (2.8). Вторая гипотеза — гипотеза каскада в пространстве волновых чисел — состоит в том, что в интервале $k > l^{-1}$ характеристики микронапряжений определяются следующими параметрами: $k\,(L^{-1})$, $\varepsilon\,(L^2T^{-3})$ и $l_0\,(L)$. Поэтому кинематические плотности энергии формоизменения и объемных деформаций в силу соображений размерности запишутся в виде

$$E = \varepsilon^{4/3}k^{-7/3}f_E\,(kl_0), \qquad e = \varepsilon^{4/3}k^{-7/3}f_E\,(kl_0) \tag{3.7}$$

Третья гипотеза заключается в том, что в интервале $k > l^{-1}$ существует область волновых чисел $k \ll l_0^{-1}$. В этой области $kl_0 \ll 1$, так что f_E и f_e превращаются в константы и соотношения (3.7) записываются в виде

$$E = C_E \varepsilon^{4/3} k^{-7/3}, \qquad e = C_e \varepsilon^{4/3} k^{-7/3} \tag{3.8}$$

Четвертая гипотеза состоит в том, что в интервале $k > l^{-1}$ имеет место изотропия полей микронапряжений. В силу этой гипотезы и формул (3.8) для спектрального представления Φ_{ijkl} корреляционного тензора получается соотношение типа (2.17)

$$\Phi_{ijkl} = \varepsilon^{4/3} k^{-13/3} [(C_E - C_e)(\varkappa_{ik}\varkappa_{jl} + \varkappa_{jk}\varkappa_{il} - \varkappa_{ij}\varkappa_{kl}) + 6C_e \varkappa_{ij}\varkappa_{kl}] \tag{3.9}$$

Безразмерные константы C_E и C_e связаны с ранее введенными константами α и β.

Используя свойства интегрального представления структурного тензора [3]

$$D_{ijkl} = 2\int \Phi_{ijkl}(\mathbf{k})(1 - \cos \mathbf{kr})\, d^3\mathbf{r} \tag{3.10}$$

получаем

$$C_E \approx (0.2\beta - 3\alpha)\, 10^2, \qquad C_e \approx (-0.04\beta - 0.5\alpha)\, 10^2 \tag{3.11}$$

Таким образом, в упругом интервале масштабов и волновых чисел удается получить выражение для структурного тензора поля микронапряжений и спектрального представления корреляционного тензора с точностью до двух универсальных констант.

Полученные результаты еще раз наглядно демонстрируют, что идеи локальной изотропии и однородности, а также гипотеза каскада, выдвинутые А. Н. Колмогоровым в теории турбулентности, имеют весьма общее значение для широкого класса нелинейных распределенных систем с диссипацией.

Авторы глубоко благодарны А. С. Монину за ценные советы и Р. Л. Салганику за полезную дискуссию.

Поступила 20 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. I. Strains in crystalline aggregates. Scientific papers, v. 1, Cambridge Univ. Press, 1958, p. 586.
2. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1941, т. 30, стр. 299.
3. Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. ИЛ, 1955.
4. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1954.
5. Лифшиц И. М. и Розенцвейг Л. Н. К теории упругих свойств поликристаллов. ЖЭТФ, 1946, т. 16, стр. 967.
6. Волков С. Д. О краевой задаче теории упругости поликристаллов. Физ. металлов и металловед., 1962, т. 13, вып. I.
7. Пашков П. О. и Братухина В. А. О распределении пластических деформаций в поликристаллических металлах. Физ. металлов и металловед., 1958, т. 6, вып. I.