

О РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ
МЕТОДОМ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

А. С. Монин

(Москва)

Будем описывать статистические свойства турбулентных движений несжимаемой жидкости в неограниченном пространстве в поле случайных сил $X(x, t)$ при помощи совместного характеристического функционала полей скорости $u(x, t)$ и случайных сил

$$\Omega [\theta(x, t), f(x, t)] = \langle \exp \{i(\theta \cdot u) + i(f \cdot X)\} \rangle \quad (1)$$

где круглые скобки означают интегрирование скалярного произведения функций по всем x и всем t , а угловые скобки — операцию математического ожидания. Этот функционал дает полное статистическое описание полей скорости и внешних сил в том смысле, что на функциях вида

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^N \theta_n \delta(x - x_n) \delta(t - t_n), \quad f(x, t) = \sum_{n=1}^N f_n \delta(x - x_n) \delta(t - t_n) \quad (2)$$

его значениями будут характеристические функции распределений вероятностей для значений рассматриваемых полей на любых конечных множествах точек (x_n, t_n) пространства — времени. Будем рассматривать характеристический функционал на множестве функций $\theta(x, t)$ и $f(x, t)$, допускающих преобразование Фурье по x , и перейдем к его волновому представлению, полагая

$$\Lambda [z(k, t), g(k, t)] = \Omega \left[(2\pi)^{-3} \int e^{ik \cdot x} z(k, t) dk, (2\pi)^{-3} \int e^{ik \cdot x} g(k, t) dk \right] \quad (3)$$

В работе Хопфа [1] показано, что характеристический функционал поля скорости удовлетворяет некоторому линейному уравнению в вариационных производных, вытекающему из уравнений Навье — Стокса и уравнения неразрывности. Аналогичное уравнение имеет место и для функционала Λ ; оно имеет вид

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) D_{z_j}(k, t) - \Delta_{j\beta}(k) D_{g_\beta}(k, t) \right] \Lambda = \\ = \Delta_{j\beta}(k) k_\alpha \int dk' D_{z_\alpha}(k', t) D_{z_\beta}(k - k', t) \Lambda \quad \left(\Delta_{jl}(k) = \delta_{jl} - \frac{k_j k_l}{k^2} \right) \quad (4)$$

(в весьма близкой форме такое уравнение выводится в работе Крейчнана и Льюиса [2]). Здесь ν — коэффициент вязкости; $D_{z_j}(k, t)$ и $D_{g_j}(k, t)$ — операторы вариационного дифференцирования¹ по $z_j(k, t)$ и $g_j(k, t)$;

¹ Определением вариационной производной $D_{a_j}(k, t) F$ от функционала $F[a(k, t)]$ о функции a_j в точке (k, t) служит формула

$$\delta F = \int dk dt \delta a_\beta(k, t) D_{a_\beta}(k, t) F$$

для главной линейной части δF вариации функционала F при бесконечно малой вариации $\delta a(k, t)$ его функционального аргумента.

по повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование. Отметим, что левая часть уравнения (4) происходит от линейных, а правая — от нелинейных членов уравнений Навье — Стокса.

Условие соленоидальности поля скорости (выражаемое уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости) приводит к тому (см. [1]), что функционал Λ зависит лишь от ортогонального волновому вектору \mathbf{k} компоненты векторной функции $\mathbf{z}(\mathbf{k}, t)$; такую компоненту будем обозначать $z^*(\mathbf{k}, t)$, так что $z_j^*(\mathbf{k}, t) = \Delta_{j\alpha}(\mathbf{k}) z_\alpha(\mathbf{k}, t)$. Аналогично, если поле внешних сил соленоидально, то Λ будет зависеть лишь от компоненты $g^*(\mathbf{k}, t)$ функции $\mathbf{g}(\mathbf{k}, t)$.

Будем считать случайное поле внешних сил заданным и статистически-стационарным во времени; ему, очевидно, будет соответствовать статистически-стационарное поле скорости, и характеристический функционал Λ этих двух полей будет решением уравнения (4), удовлетворяющим условию

$$\Lambda [0; \mathbf{g}(\mathbf{k}, t)] = G [\mathbf{g}(\mathbf{k}, t)] \quad (5)$$

где G — заданный характеристический функционал поля внешних сил.

Отыскание такого решения позволит дать полное статистическое описание стационарной турбулентности. Случайные внешние силы, вообще говоря, фиктивны (а в задачах, где они реальны, как, например, архимедовы силы при термической конвекции, их надо не задавать, а определять вместе с гидродинамическими полями), но будем задавать их так, чтобы они обеспечивали приток энергии в среднем только к крупномасштабным компонентам турбулентности. Тогда можно ожидать, что фиктивный характер внешних сил не скажется на статистических свойствах мелкомасштабных компонент турбулентности, и последние будут правильно описываться решением уравнения (4) при условии (5).

В качестве поля внешних сил выберем соленоидальное, гауссовское, стационарное, однородное и изотропное случайное поле с нулевым средним значением. Его характеристический функционал будет иметь вид

$$G [\mathbf{g}(\mathbf{k}, t)] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int g_\alpha^*(\mathbf{k}, t_1) g_\alpha^*(-\mathbf{k}, t_2) f(k, |t_1 - t_2|) d\mathbf{k} dt_1 dt_2 \right\} \quad (6)$$

Полностью определяющая этот функционал функция $f(k, \tau)$ имеет смысл пространственного преобразования Фурье пространственно-временной корреляционной функции внешних сил. Точнее,

$$\langle X_\alpha(\mathbf{x}_1, t_1) X_\beta(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle = \int e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) f(k, |t_2 - t_1|) d\mathbf{k} \quad (7)$$

Уравнение (4) будем решать методом теории возмущений. Именно, заметим, что движущаяся жидкость представляет собой систему с внутренними взаимодействиями, которыми при эйлеровом описании движения будут инерционные взаимодействия между пространственными неоднородностями поля скорости, описываемые в уравнениях Навье—Стокса нелинейными членами (включая градиент давления, выражающийся че-

рез квадратичные комбинации скоростей в тот же момент времени). Константой взаимодействия при этом будет отношение типичных значений сил инерции и сил вязкости, т. е. число Рейнольдса R . Метод теории возмущений заключается в том, что эффект взаимодействий рассматривается как возмущение, налагающееся на линейную систему, и решение нелинейных динамических уравнений ищется в виде ряда по степеням константы взаимодействия. Таким образом, будем искать формальное решение уравнения (4) в виде ряда по степеням числа Рейнольдса. Можно ожидать, что при малых R этот ряд будет сходящимся, т. е. будет представлять собой точное решение (которое, правда, будет полезным для описания лишь слабой турбулентности). Но и при больших R формальное решение уравнения (4) в виде ряда по степеням R может быть полезным для ряда целей, например, как эталон, с которым можно сравнивать те или иные приближенные решения.

Нелинейные члены уравнений Навье—Стокса имеют на единицу больший порядок по R , чем любой из линейных членов. Поэтому правая часть уравнения (4) имеет на единицу больший порядок по R , чем любое из слагаемых в левой части. Это обстоятельство будем учитывать при получении уравнений для последовательных членов разложения функционала Λ по степеням R . В частности, уравнение для нулевого члена Λ_0 получается из (4) отбрасыванием правой части. Как нетрудно проверить, решение такого уравнения при условии (5) имеет вид

$$\Lambda_0 = G [\zeta^* (\mathbf{k}, t) + g^* (\mathbf{k}, t)], \quad \zeta^* (\mathbf{k}, t) = \int_t^{\infty} e^{-\nu k^2 (\tau-t)} z^* (\mathbf{k}, \tau) d\tau \quad (8)$$

Полагая здесь $g^* (\mathbf{k}, t) \equiv 0$, получим нулевое приближение для характеристического функционала поля скорости. Согласно (6), в этом приближении поле скорости будет гауссовским; его корреляционная функция оказывается равной

$$\langle u_\alpha (\mathbf{x}_1, t_1) u_\beta (\mathbf{x}_2, t_2) \rangle = \int e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} d\mathbf{k} \frac{\Delta_{\alpha\beta} (\mathbf{k})}{2\nu k^2} \int_{-\infty}^{\infty} f (k, |\tau|) e^{-\nu k^2 |\tau+t_2-t_1|} d\tau \quad (9)$$

Отсюда следует, что спектр кинетической энергии турбулентности в нулевом приближении по числу Рейнольдса имеет вид

$$E_0 (k) = \frac{2\pi}{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} f (k, |\tau|) e^{-\nu k^2 |\tau|} d\tau \quad (10)$$

Запишем разложение функционала Λ в ряд по степеням R в виде

$$\Lambda = \Lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} M_n [\zeta^* (\mathbf{k}, t), g^* (\mathbf{k}, t)] \quad (11)$$

Здесь M_n — слагаемое порядка R^n (причем $M_0 \equiv 1$). Подставив этот ряд в уравнение (4), перейдя от вариационного дифференцирования по $z_j (\mathbf{k}, t)$ и $g_j (\mathbf{k}, t)$ к дифференцированию по $\zeta_j^* (\mathbf{k}, t)$ и $g_j^* (\mathbf{k}, t)$, восполь-

зовавшись определением (8) и (6) функционала Λ_0 и собирая члены с одинаковыми степенями R , для функционалов M_n при $n \geq 1$ получим уравнения вида

$$L_j(\mathbf{k}, t) M_n = \{A_j^{(1)}(\mathbf{k}, t) + A_j^{(2)}[\xi(\mathbf{k}, t); \mathbf{k}, t] + A_j^{(3)}[\xi(\mathbf{k}, t); \mathbf{k}, t]\} M_{n-1} \quad (12)$$

$$(\xi(\mathbf{k}, t) = \zeta^*(\mathbf{k}, t) + \mathbf{g}^*(\mathbf{k}, t))$$

Здесь L_j — дифференциальный оператор первого порядка, определяемый формулой

$$L_j(\mathbf{k}, t) = \Delta_{j\alpha}(\mathbf{k}) [D_{\zeta_{\alpha}^*}(\mathbf{k}, t) - D_{g_{\alpha}^*}(\mathbf{k}, t)] \quad (13)$$

Здесь $A_j^{(1)}$ — оператор, содержащий двукратное вариационное дифференцирование и определяемый формулой

$$A_j^{(1)}(\mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 dt_1 dt_2 a_{j,pq}(\mathbf{k}, t | \mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) D_{\zeta_p^*}(\mathbf{k}_1, t_1) D_{\zeta_q^*}(\mathbf{k}_2, t_2)$$

$$a_{j,pq}(\mathbf{k}, t | \mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) = \Delta_{j\alpha}(\mathbf{k}) k_{\beta} \Delta_{\beta p}(\mathbf{k}_1) \Delta_{\alpha q}(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \times$$

$$\times e^{-\nu k_1^2(t-t_1) - \nu k_2^2(t-t_2)} \Phi(t-t_1) \Phi(t-t_2)$$

причем $\Phi(t)$ — функция, равная 1 при $t > 0$, $1/2$ при $t = 0$ и 0 при $t < 0$; оператор $A_j^{(2)}$ получается из $A_j^{(1)}$ заменой оператора $D_{\zeta_p^*}(\mathbf{k}_1, t_1) D_{\zeta_q^*}(\mathbf{k}_2, t_2)$ на оператор

$$- \int f(k_2, |t_2 - \tau|) \xi_q(-\mathbf{k}_2, \tau) d\tau D_{\zeta_p^*}(\mathbf{k}_1, t_1) -$$

$$- \int f(k_1, |t_1 - \tau|) \xi_p(-\mathbf{k}_1, \tau) d\tau D_{\zeta_q^*}(\mathbf{k}_2, t_2)$$

наконец, $A_j^{(3)}$ — квадратичный функционал, получаемый из $A_j^{(1)}$ заменой обоих операторов $D_{\zeta_j^*}(\mathbf{k}, t)$ функциями

$$\int f(k, |t - \tau|) \xi_j(-\mathbf{k}, \tau) d\tau$$

Функционалы M_1, M_2, \dots определяются из уравнений (12) последовательно, для чего каждый раз приходится искать решение неоднородного уравнения $L_j(\mathbf{k}, t) M_n = F_j^{(n)}$ с известной (определенной на предыдущем шаге) правой частью, удовлетворяющее условию

$$M_n[0, \mathbf{g}^*(\mathbf{k}, t)] = 0 \quad (15)$$

(условия (15) при $n \geq 1$ будут следствием условия (5)). Обозначим такое решение символом

$$M_n = L_j^{-1}(\mathbf{k}, t) F_j^{(n)}$$

Тогда будем иметь

$$M_n = (S_1 + S_2 + S_3) M_{n-1}, \quad S_r = L_j^{-1} A_j^{(r)} \quad (r = 1, 2, 3) \quad (16)$$

Так, например, нетрудно убедиться, что

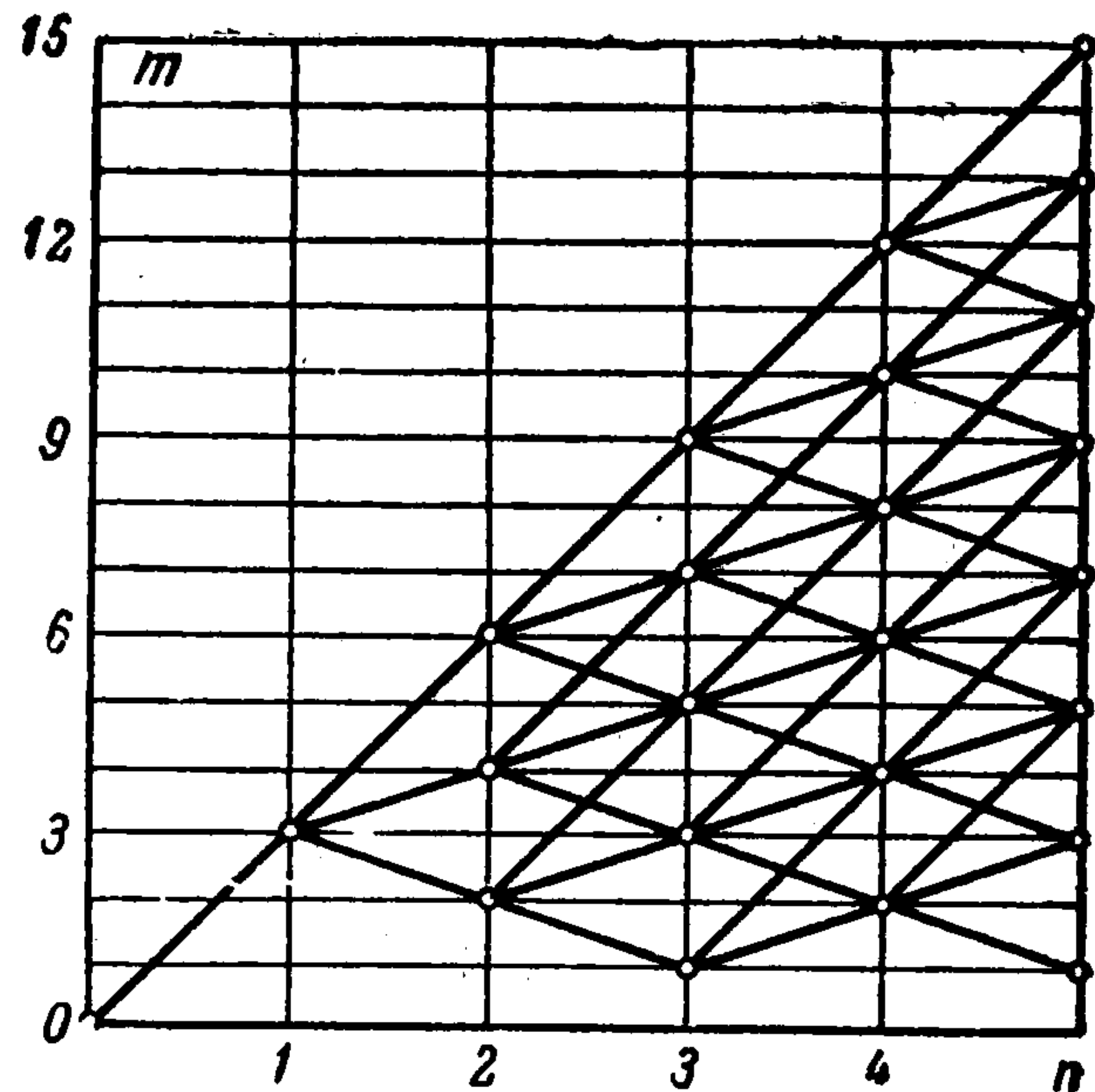
$$M_1 = S_3 1 = \int \zeta_j^*(\mathbf{k}', t') A_j^{(3)}[\xi(\mathbf{k}, t); \mathbf{k}', t'] d\mathbf{k}' dt' \quad (17)$$

Эта величина будет однородным степенным функционалом третьей степени относительно функций $\zeta_j^*(k, t)$ и $g^*(k, t)$. Из определения операторов $A_j^{(r)}$ и S_r следует, что если M есть однородный степенной функционал степени m , то величины $S_1 M$, $S_2 M$ и $S_3 M$ суть, соответственно, однородные степенные функционалы степеней $m - 1$, $m + 1$ и $m + 3$ (с теми исключениями, что оператор S_1 обращает в нуль степенные функционалы, содержащие не более одной компоненты $\zeta_j^*(k, t)$, а S_2 — функционалы, не зависящие от $\zeta_j^*(k, t)$). Пользуясь этим правилом и формулой (16), убеждаемся, что M_2 будет представлять собой сумму однородных степенных функционалов 2, 4 и 6 степеней, M_3 — 1, 3, 5, 7 и 9 степеней, и вообще,

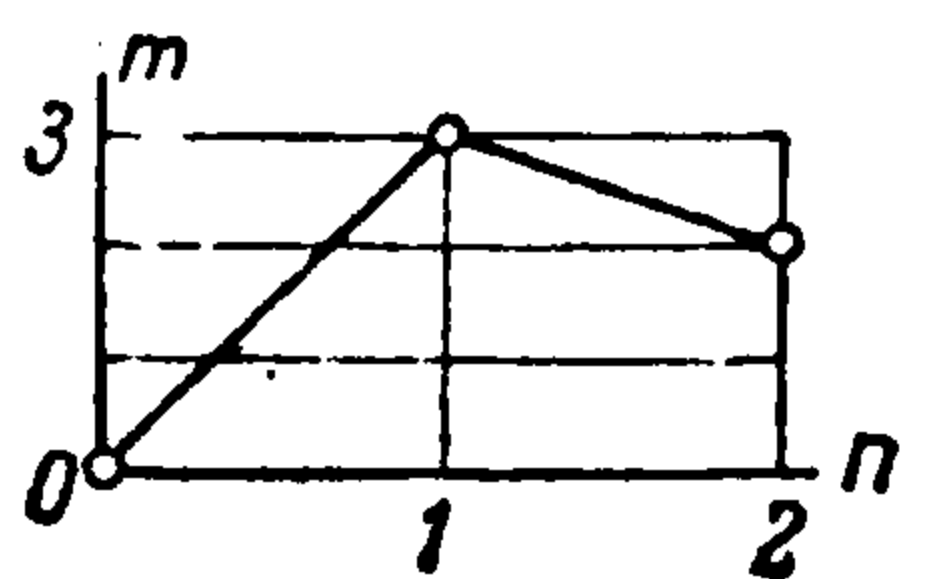
$$M_{2n} = \sum_{m=1}^{3n} M_{2n}^{(2m)}, \quad M_{2n+1} = \sum_{m=0}^{3n+1} M_{2n+1}^{(2m+1)} \quad (18)$$

где $M_n^{(m)}$ — однородные степенные функционалы степени m .

Структура ряда (11) показана на фиг. 1, где по оси абсцисс отложены номера n функционалов M_n (указывающие порядок по R соответствующих членов ряда), а по оси ординат — степени m однородных степенных функционалов $M_n^{(m)}$. При движении по графику слева направо черточки, направленные вниз, изображают оператор S_1 , полого вверх — S_2 и круто вверх — S_3 .



Фиг. 1



Фиг. 2

График дает сведения не только о наборе функционалов $M_n^{(m)}$, входящих в состав M_n , но и о способе вычисления любого функционала $M_n^{(m)}$: для этого надо просуммировать вклады, соответствующие всевозможным ломаным линиям с абсциссами вершин не более n , оканчивающимся в точке (n, m) . Такие ломаные линии будем называть диаграммами, соответствующими функционалу $M_n^{(m)}$. Так, например, функционалу $M_2^{(2)}$ соответствует одна диаграмма (фиг. 2), которая изображает оператор $S_1 S_3$, так что $M_2^{(2)} = S_1 S_3 1$. Нетрудно проверить, что этот функционал может быть записан в виде

$$M_2^{(2)} = \int dk dk' dt dt' \zeta_\beta^*(k, t) \left\{ A_\beta^{(1)}(k, t) \zeta_\alpha^*(k', t') - \frac{1}{2} \zeta_\alpha^*(k', t') A_\beta^{(1)}(k, t) \right\} A_\alpha^{(3)}[\xi(k, t); k', t'] \quad (19)$$

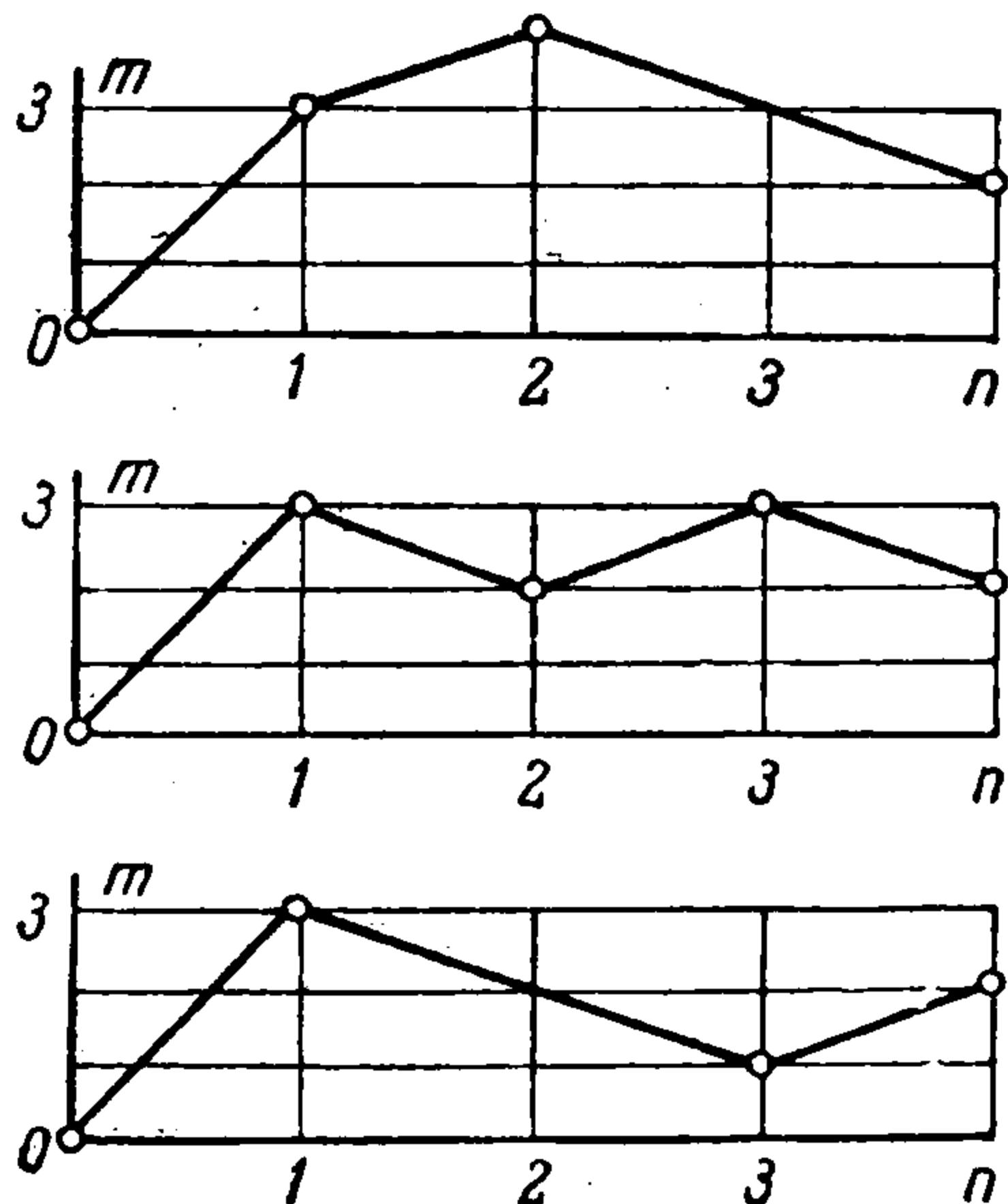
Функционалу $M_4^{(2)}$ соответствуют три диаграммы (фиг. 3), изображающие операторы $S_1^2 S_2 S_3$, $S_1 S_2 S_1 S_3$ и $S_2 S_1^2 S_3$, так что

$$M_4^{(2)} = (S_1^2 S_2 S_3 + S_1 S_2 S_1 S_3 + S_2 S_1^2 S_3) 1 \quad (20)$$

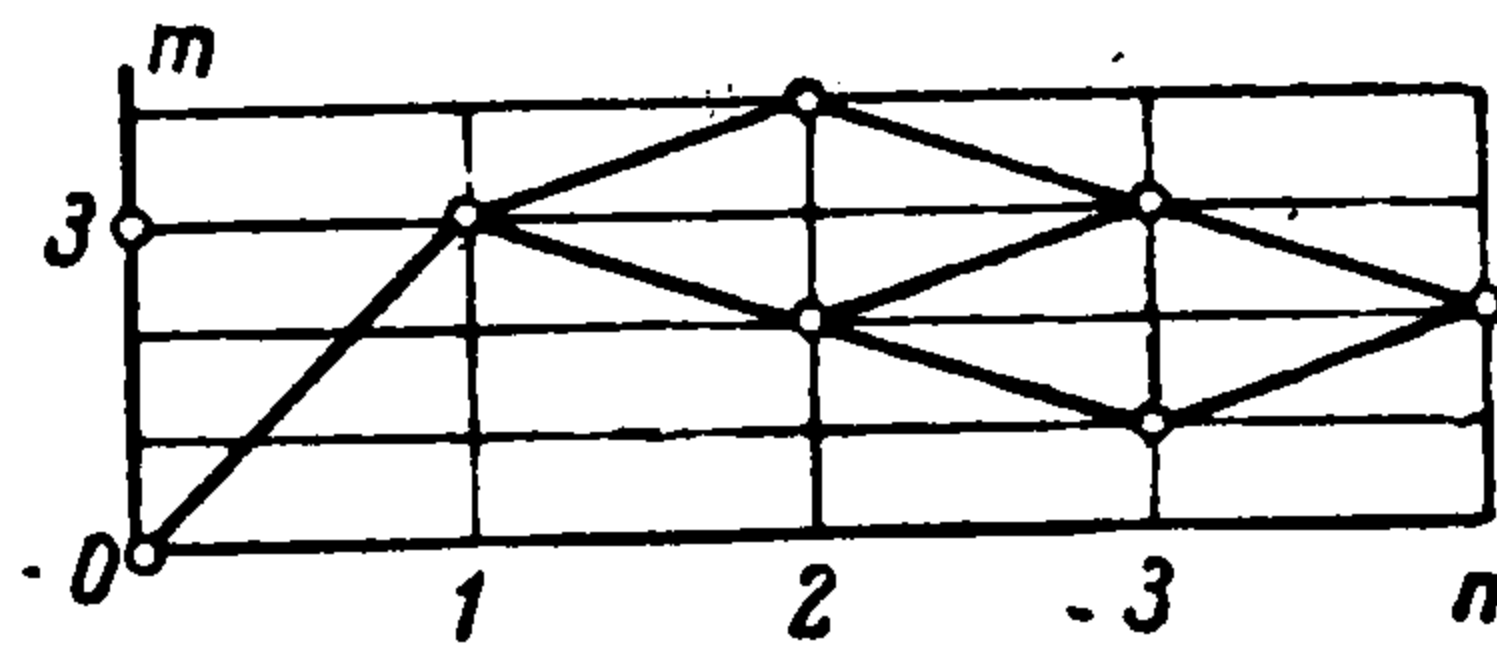
Все это выражение можно изобразить одной суммарной диаграммой фиг. 4. Функционалу $M_6^{(2)}$ соответствует уже 12 диаграмм, и т. д.

Построение диаграмм того или иного вида оказывается вообще полезным приемом для изображения рядов теории возмущений. Наиболее важным примером этому являются диаграммы Фейнмана в квантовой электродинамике.

Диаграммы для решения уравнений Навье — Стокса были построены Уайлдом [3], который показал также, как конструировать из них диаграммы для вычисления корреляционной функции поля скорости.



Фиг. 3



Фиг. 4

При помощи вариационного дифференцирования ряда (11) можно получать разложения по степеням R для различных статистических моментов поля скорости. Так, например, исходя из очевидной формулы

$$\langle u_\alpha(\mathbf{x}_1, t) u_\beta(\mathbf{x}_2, t) \rangle = - \int e^{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2)} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 [D_{z_\alpha}(\mathbf{k}_1, t) D_{z_\beta}(\mathbf{k}_2, t) \Lambda]_{z=g=0} \quad (21)$$

для спектра кинетической энергии $E(k)$ можно получить разложение

$$E(k) = E_0(k) + S(k) \sum_{n=1}^{\infty} M_{2n}^{(2)} \quad (22)$$

где $E_0(k)$ дается формулой (10), а $S(k)$ — оператор, содержащий двукратное вариационное дифференцирование и определяемый формулами

$$S(k) = - \frac{k^2}{2} \int d\Omega(\mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 dt dt_1 a_{pq}(\mathbf{k}, t/\mathbf{k}_1, t_1) D_{\zeta_p^*}(\mathbf{k}, t) D_{\zeta_q^*}(\mathbf{k}_1, t_1) \\ a_{pq}(\mathbf{k}, t/\mathbf{k}_1, t_1) = \Delta_{ap}(\mathbf{k}) \Delta_{aq}(\mathbf{k}_1) e^{\nu k^2 t + \nu k_1^2 t_1} \Phi(-t) \Phi(-t_1) \quad (23)$$

Здесь $d\Omega(\mathbf{k})$ — элемент поверхности единичной сферы в пространстве волновых векторов \mathbf{k} .

О структуре ряда (22) можно высказать следующие два замечания: во-первых, разложение функции $E(k)$ в ряд по степеням числа Рейнольдса содержит только четные степени R ; во-вторых, оно одновременно будет разложением функции $E(k)$ в функциональный степенной ряд относительно функции $f(k, |\tau|)$ (спектра внешних сил), причем член порядка R^{2n} (т. е. слагаемое $S(k)M_{2n}^{(2)}$) представляет собой однородный степенной функционал степени $n+1$ относительно функции $f(k, |\tau|)$. Первое из этих замечаний тривиально, второе же вытекает из диаграмм фиг. 1, если

учесть, что оператор S_1 не меняет, S_2 — повышает на 1, а S_3 — повышает на 2 степени степенных функционалов относительно $f(k, |\tau|)$.

Из второго замечания следует, что функционал $S(k)M_{2n}^{(2)}$ в некоторой мере аналогичен «свертке» $n + 1$ функций f (т. е. плотности вероятности для суммы $n + 1$ независимых случайных величин, каждая из которых имеет плотность вероятности, пропорциональную f). Эти «свертки» обладают следующим свойством: если f отлично от нуля лишь в области очень малых волновых чисел $0 \leq k \leq k_0$, то в области очень больших волновых чисел $k \gg k_0$ отличными от нуля будут «свертки» лишь очень большого числа функций f ; но такие «свертки» будут уже мало зависеть от конкретного вида функции f (и будут близки к некоторой универсальной функции от k , соответствующей тому или иному из так называемых безгранично-делимых законов распределения вероятностей). Аналогично этому можно ожидать, что если пространственное распределение внешних сил имеет только крупномасштабные неоднородности, т. е. если f отлично от нуля лишь при $0 \leq k \leq k_0$, то при $k \gg k_0$ отличными от нуля будут функционалы $S(k)M_{2n}^{(2)}$ лишь с очень большими номерами $2n$, и эти функционалы будут уже мало зависеть от конкретного вида функции f , так что, если ряд (22) сходится, то его сумма $E(k)$ при $k \gg k_0$ будет близка к некоторой универсальной функции от k . Таким образом, возникает возможность подойти к аналитическому обоснованию гипотезы А. Н. Колмогорова об универсальном статистическом равновесии мелкомасштабных компонент турбулентности.

Поступила 9 XII 1963

Институт физики атмосферы АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. H o p f E. Statistical hydromechanics and functional calculus. J. Rat. Mech. Anal., 1952, 1, 87.
2. K r e i c h n a n R. M., L e w i s R. M. A Space-Time Functional Formalism for Turbulence. Commun. Pure and Appl. Math., 1962, v. 15, No 4, 397—411.
3. W y l d H. W. Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid Ann. Phys., 1961, 14, 143—165.