Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ДИФРАКЦИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА КЛИНЕ

А. Ф. Филиппов

(Москва)

Показано, как из известного решения задачи о дифракции плоской волны на клине можно получить для задачи о дифракции волны любого вида на том же клине любое число членов лучевого разложения дифрагированной волны вблизи ее фронта. Для некоторых задач о дифракции цилиндрических и сферических волн излагаемый метод дает точное решение во всей области.

1. Рассмотрим плоскую задачу о дифракции волны любого вида с криволинейным или прямолинейным фронтом на препятствии в виде угла (клина). Распространение волны описывается уравнением

$$U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} \tag{1.1}$$

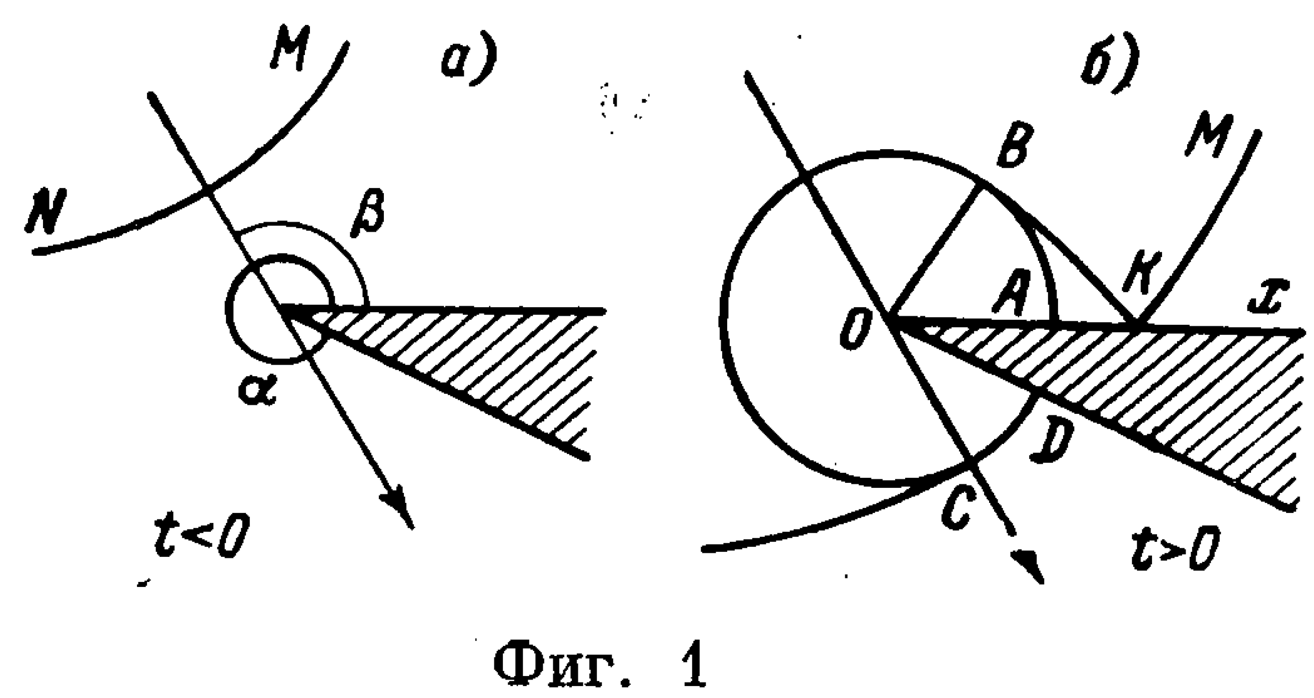
в области $0 < \varphi < \alpha$, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 < \alpha \leqslant 2\pi$. При $t < 0$ функция $U(t, x, y)$ задана (падающая волна). На сторонах угла $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$ заданы граничные условия любого из трех типов

$$\text{(а)}\quad U = 0, \qquad \text{(б)}\quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0, \qquad \text{(в)}\quad \frac{\partial U}{\partial n} = c\frac{\partial U}{\partial t} \qquad (c \geqslant 0) \tag{1.2}$$

где $\partial / \partial n$ — производная по внутренней нормали к границе. Не исключается также случай, когда на одной стороне угла задано одно из условий (1.2), а на другой стороне — другое. В случае, когда падающая волна — плоская, известно точное решение этой задачи [1,2]. Этим же методом можно решить задачу дифракции при любых граничных условиях вида

$$l(u) \equiv \sum_{p+q+r=n} g_{pqr} \frac{\partial^n U}{\partial t^p \partial x^q \partial y^r} = 0 \tag{1.3}$$

если предварительно будет найдено (например, методом [2]) решение задачи о дифракции плоской волны при тех же граничных условиях.



Фиг. 1

Пусть фронт падающей волны MN достигает вершины угла в момент $t = 0$, а луч, попавший в эту точку, образует угол β с осью Ox (фиг. 1); перед фронтом волны $U = 0$. На фиг. 1 изображены фронты волн в случае, когда $\pi/2 < \beta < \alpha - \pi$. Все выводы остаются справедливыми и при других соотношениях между α и β, надо лишь учесть, что тогда число и расположение отраженных волн будет иным.

2. Решение U при $t > 0$ представим в виде $U = u + v + w$. Функция u равна нулю внутри угла COD (фиг. 1б), а вне угла принимает те же значения, которые имела бы там падающая волна, если бы не было препятствия. Функция v отлична от нуля только в области OBK и принимает те же значения, которые имела бы там отраженная волна, если бы границей служил не угол, а вся прямая $y = 0$. Отраженная волна отыскивается известными методами, см. ниже п. 5.

Функция w — дифрагированная волна, которую и надо найти. Ясно, что $w \neq 0$ только в круге $ABCD$.

Чтобы функция $U = u + v + w$ была непрерывной и являлась решением поставленной задачи, функция w должна удовлетворять следующим требованиям. В каждом из секторов AOB, BOC, COD она ограничена и удовлетворяет уравнению (1.1); на сторонах угла OA и OD удовлетворяет граничным условиям (а) (1.2), (б) (1.2) или (в) (1.2); на дугах AB, BC, CD имеем $w = 0$; на радиусах OC и OB разрывы функции w и ее производной по нормали к радиусу равны по величине и противоположны по знаку разрывам функции $u + v$ и ее производной, т. е.

$$[w]_{\pi+\beta} = \mu_0(t, r), \qquad [w]_{\pi-\beta} = \mu_1(t, r)$$
$$\left[\frac{\partial w}{\partial n}\right]_{\pi+\beta} = \nu_0(t, r), \qquad \left[\frac{\partial w}{\partial n}\right]_{\pi-\beta} = \nu_1(t, r), \qquad \frac{\partial}{\partial n} \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{2.1}$$

где $\mu_0, \mu_1, \nu_0, \nu_1$ — известные функции, определенные при $0 < r < t$, символ [ ] означает величину разрыва, например

$$[w]_{\pi+\beta} \equiv w(t, r, \pi + \beta + 0) - w(t, r, \pi + \beta - 0)$$

3. Пусть $U^*(t, x, y)$ — решение задачи о дифракции плоской волны, задаваемой при $t < 0$ формулами

$$U^*(t, x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant -x\cos\beta - y\sin\beta \\ 1 & \text{при } t > -x\cos\beta - y\sin\beta \end{cases} \tag{3.1}$$

В случае граничных условий (а) (1.2) и (б) (1.2) решение получено в работе [1], а в случае (в) (1.2) — в работе [2]. Конкретный вид этого решения пока не нужен. Пусть $f_0(\tau)$ — функция, равная 0 при $\tau < 0$. Положим

$$f_i(\tau) = \int_0^\tau \frac{(\tau - s)^{i-1}}{\Gamma(i)} f_0(s)\, ds \quad (i > 0), \qquad \Gamma(i) \text{ — гамма-функция} \tag{3.2}$$

$$U_i^\circ(t, x, y) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty U^*(t - s, x, y) f_i(s)\, ds \quad (i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

Тогда

$$f_{i+1}'(\tau) = f_i(\tau) \quad \text{при } i \geqslant 0$$
$$U_i^\circ(t, x, y) = f_i(t + x\cos\beta + y\sin\beta) \qquad (t < 0) \tag{3.4}$$

В силу (3.3) каждая функция U_i° удовлетворяет уравнению (1.1) и тем же граничным условиям, что функция U^*. Значит, U_i° есть решение задачи о дифракции плоской волны вида (3.4).

Как и в п. 2 представим U_i° в виде

$$U_i^\circ = u_i^\circ + v_i^\circ + w_i^\circ \qquad \text{при } t > 0$$

Тогда

$$[w_i^\circ]_{\pi+\beta} = f_i(t - r), \qquad [\partial w_i^\circ / \partial n]_{\pi+\beta} = 0$$

Взяв $f_0(\tau) = \tau^n / n!$, получим функции w с разрывами вида $c_{n0}\tau^n$, где $\tau = t - r$.

Чтобы получить функции w с разрывами $c_{ik}\tau^i r^k$, продифференцируем U_i° по углу β. Учитывая, что $f_i' = f_{i-1}$, из (3.4) получим при $t < 0$

$$\frac{\partial U_i^\circ}{\partial\beta} = -\eta f_{i-1}(t + \xi), \qquad \frac{\partial^2 U_i^\circ}{\partial\beta^2} = -\xi f_{i-1}(t + \xi) + \eta^2 f_{i-2}(t + \xi) \tag{3.5}$$

где

$$\xi = x\cos\beta + y\sin\beta, \qquad \eta = -\frac{\partial\xi}{\partial\beta} = x\sin\beta - y\cos\beta, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial\beta} = \xi$$

и значит, для любой функции u

$$\frac{\partial u}{\partial\beta} = \xi\frac{\partial u}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial u}{\partial\xi} \tag{3.6}$$

Введем обозначения (3.7)

$$\Lambda_{2s-1} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 2^2\right)\cdots\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + (s-1)^2\right), \qquad \Lambda_{2s} = \frac{\partial}{\partial\beta}\Lambda_{2s-1}$$

$$U_i^m = \Lambda_m U_i^\circ \tag{3.8}$$

Функции U_i^m, как производные от решения U_i° по параметру β, удовлетворяют уравнению (1.1) и граничным условиям, а при $t < 0$ они представляют собой волны с плоским фронтом, получаемые из (3.4) по формуле (3.8). Как в п. 2, положим

$$U_i^m = u_i^m + v_i^m + w_i^m$$

Чтобы подсчитать разрывы функций w_i^m и их производных на OC, надо, согласно п. 2, найти значения U_i^m и $\partial U_i^m / \partial n$ на OC в предположении, что препятствие (угол) отсутствует. Тогда функции U_i^m будут выражаться формулами (3.4), (3.7), (3.8) и при $t > 0$. Из (3.5) и (3.6) видно, что $\partial^m U_i^\circ / \partial\beta^m$ — четная функция от η при четном m и нечетная при нечетном m. Так как на OC, т. е. $\varphi = \pi + \beta$ имеем $\eta = 0$, $\partial / \partial n = \partial / \partial\eta$, то

$$U_i^{2k-1}\big|_{\pi+\beta} = 0, \qquad \frac{\partial U_i^{2k}}{\partial n}\bigg|_{\pi+\beta} = 0 \tag{3.9}$$

Докажем по индукции, что (3.10)

$$U_i^{2k}\big|_{\pi+\beta} = (2k-1)!!\, r^k f_{i-k}(t - r) \qquad ((2k-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1),\ (-1)!!=1)$$

При $k = 1$ это верно в силу (3.8), (3.7), (3.5) и так как $\xi = -r$, $\eta = 0$ на OC. Предположим, что при некотором $k \geqslant 1$ формула (3.10) верна. Из (3.7) и (3.8) имеем

$$U_i^{2k+2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + k^2\right) U_i^{2k} \tag{3.11}$$

Для любой функции U имеем в силу (3.6)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2} = \xi^2\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} - 2\xi\eta\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\,\partial\eta} + \eta^2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} - \xi\frac{\partial U}{\partial\xi} - \eta\frac{\partial U}{\partial\eta} \tag{3.12}$$

Вследствие инвариантности оператора Лапласа относительно поворота осей координат из (1.1) следует

$$\partial^2 U / \partial t^2 = \partial^2 U / \partial\xi^2 + \partial^2 U / \partial\eta^2$$

Отсюда и из (3.12) получаем на OC, т. е. при $\eta = 0$, $\xi = -r$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = r^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) - r \frac{\partial U}{\partial r} \tag{3.13}$$

Теперь из (3.11), (3.13) и (3.10) получаем

$$U_i^{2k+2} |_{\pi+\beta} = (2k+1)!!\, r^{k+1} f_{i-k-1} (t - r)$$

Следовательно, формула (3.10) справедлива при всех k.

Так как $\partial / \partial n = \partial / \partial \eta = \xi^{-1} \partial / \partial \beta$ на OC, то из (3.6) — (3.10) имеем

$$\frac{\partial U_i^{2k-1}}{\partial n} \bigg|_{\pi+\beta} = \frac{1}{\xi} U_i^{2k} |_{\pi+\beta} = -(2k-1)!!\, r^{k-1} f_{i-k} (t - r) \tag{3.14}$$

Учитывая сказанное о разрывах функций w_i^m, получаем из (3.9), (3.10) и (3.14)

$$[w_{i+k}^{2k}]_{\pi+\beta} = (2k-1)!!\, r^k f_i (t - r), \qquad [w_{i+k}^{2k-1}]_{\pi+\beta} = 0$$
$$\left[\frac{\partial w_{i+k}^{2k}}{\partial n}\right]_{\pi+\beta} = 0, \qquad \left[\frac{\partial w_{i+k}^{2k-1}}{\partial n}\right]_{\pi+\beta} = -(2k-1)!!\, r^{k-1} f_i (t - r) \tag{3.15}$$

4. Искомую дифрагированную волну w (см. п. 2) приближенно заменим линейной комбинацией $w^1 = \Sigma c_{ik} w_i^k$ функций w_i^k, построенных в п. 3. Коэффициенты c_{ik} подберем так, чтобы функции w^1 и $\partial w^1 / \partial n$ на OC имели разрывы, равные $\mu_0 (t, r)$ и $\nu_0 (t, r)$ в (2.1) с точностью до бесконечно малых заданного порядка в окрестности точки $t = 0$, $r = 0$. Это можно сделать, если падающая волна представляется достаточно гладкой функцией, так как тогда функции μ_0 и ν_0 разлагаются по формуле Тейлора по τ и r ($\tau = t - r$)

$$\mu_0 = u |_{\pi+\beta} = \sum_{i=0}^{s} \sum_{k=0}^{s-i} a_{ik} \frac{\tau^{N+i} r^k}{(N+i)!\, k!} + o(\tau^N t^s) \tag{4.1}$$

$$\nu_0 = \frac{\partial u}{\partial n} \bigg|_{\pi+\beta} = \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{s-i-1} b_{ik} \frac{\tau^{N+i} r^k}{(N+i)!\, k!} + o(\tau^N t^{s-1}) \tag{4.2}$$

Примем

$$f_i (\tau) = \tau^{N+i} / (N+i)! \quad (\tau > 0), \qquad f_i (\tau) = 0 \quad (\tau \leqslant 0)$$

В силу (3.15) разрывы на OC функции

$$w^1 = \sum_{i=0}^{s} \sum_{k=0}^{s-i} \frac{2^k a_{ik}}{(2k)!} w_{i+k}^{2k} - \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{s-i-1} \frac{2^k b_{ik}}{(2k+1)!} w_{i+k+1}^{2k+1} \tag{4.3}$$

и ее производной $\partial w^1 / \partial n$ отличаются от μ_0 и ν_0 лишь на $o(\tau^N t^s)$ и $o(\tau^N t^{s-1})$. Также мало будут отличаться и разрывы на OB (в случаях граничных условий (а) (1.2) и (б) (1.2) это следует из известного закона отражения $v (t, x, y) = \mp u (t, x, -y)$, а в случае (в) (1.2) это доказывается в п. 6). Функция $u + v + w^1$ будет приближенным решением поставленной в п. 1 дифракционной задачи; она отличается от точного решения $u + v + w$ на величину $w^1 - w$, которая, как показывается в п. 7, в прифронтовой зоне мала по сравнению с функциями w_i^m, входящими в (4.3).

Заметим, что при выводе формул (3.15) в п. 3 использовались производные $\partial^l \overset{\circ}{u}_{i+k} / \partial \beta^l$, $l \leqslant 2k \leqslant 2s$. Эти производные существуют, если N достаточно велико. Следовательно, формула (4.3) обоснована пока в случае, когда падающая волна разлагается по формулам (4.1) и (4.2) с достаточно большим N, $N \geqslant N_s$. Если же $N < N_s$, то интегрируем падающую волну $N_s - N$ раз по t. Полученная волна разлагается по формулам (4.1), (4.2) с $N = N_s$, следовательно, для нее можно написать функцию (4.3). Дифференцируя ее $N_s - N$ раз по t, получим функцию w^1 для первоначально заданной падающей волны. Это доказывает формулу (4.3) при всех $N \geqslant 0$.

Если коэффициенты c_{ik} в выражении $w^1 = \Sigma c_{ik} w_i^k$ подобрать так, чтобы разрывы $[w^1]_{\pi+\beta}$ и $[\partial w^1 / \partial n]_{\pi+\beta}$, определяемые при помощи формул (3.15), равномерно аппроксимировали функции μ_0 и ν_0 в (2.1) во всей области $0 \leqslant r \leqslant t \leqslant t_1$, где t_1 — любое постоянное, то функция w^1 будет служить приближением к искомой дифрагированной волне w во всем конусе $x^2 + y^2 \leqslant t^2 \leqslant t_1^2$ (в случаях граничных условий (*а*) (1.2) и (*б*) (1.2)). Это вытекает из оценок п. 7.

5. Изучим некоторые свойства отраженной волны. Пусть в области $y \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$ функция $U(t, x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.1), при $y = 0$ — граничному условию (1.3), при $t = 0$ — начальным условиям $U = \varphi(x, y)$, $U_t = \psi(x, y)$. Падающей волной назовем решение u уравнения (1.1) в области $-\infty < y < \infty$ при начальных условиях $u = \varphi(x, y)$, $u_t = \psi(x, y)$ при $y \geqslant 0$, $u = 0$, $u_t = 0$ при $y < 0$. Отраженной волной назовем функцию $v = U - u$.

Лемма о передвижении границы. Если $v(t, x, y)$ — волна, отраженная от границы $y = 0$, то для любого $h \geqslant 0$ функция $v^*(t, x, y) \equiv v(t, x, y + 2h)$ в области $y \geqslant -h$ есть волна, отраженная от границы $y = -h$ с тем же граничным условием (1.3) (при тех же начальных условиях $U = \varphi$, $U_t = \psi$, $t = 0$, доопределенных нулем: $\varphi = \psi = 0$ при $y < 0$).

Доказательство. Легко видеть, что $v(t, x, y) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant y$ и что функция

$$U^*(t, x, y) = u(t, x, y) + v(t, x, y + 2h)$$

при $y \geqslant -h$ удовлетворяет уравнению (1.1) и начальным условиям, указанным в лемме. Покажем, что она удовлетворяет граничному условию (1.3) при $y = -h$, т. е. что $N(t, x, h) = 0$, где $N(t, x, h) = l(U^*)|_{y=-h}$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial h}\{l(v(t, x, y + 2h))_{y=-h}\} = \left\{\frac{\partial}{\partial y} l(v(t, x, y + 2h))\right\}_{y=-h} =$$
$$= \left\{l\left(\frac{\partial}{\partial y} v(t, x, y + 2h)\right)\right\}_{y=-h}$$

Аналогичные равенства справедливы для $\partial l(u) / \partial h$ и для вторых производных по h, t, x. Так как u и v удовлетворяют уравнению (1.1), то

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial h^2}\right) N(t, x, h) = 0 \qquad (t \geqslant 0,\ h > 0)$$

Далее, $N(t, x, 0) = l(u + v)|_{y=0} = 0$ в силу (1.3). Наконец, при $t = 0$, $h > 0$ имеем $N = 0$, $\partial N / \partial t = 0$ (так как $u = 0$ при $0 \leqslant t < -y$, $v(t, x, y) = 0$ при $0 \leqslant t < y$). Итак, функция $N(t, x, h)$ удовлетворяет волновому уравнению и нулевым начальным и граничным условиям. Поэтому она равна нулю.

Следствие. Функция $u(t, x, y - h) + v(t, x, y + h)$ удовлетворяет граничному условию (1.3) при $y = 0$, каково бы ни было $h \geqslant 0$, т. е.

$$l(u(t, x, y - h) + v(t, x, y + h))|_{y=0} = 0 \qquad (5.1)$$

Установим теперь связь между значениями падающей волны на плоскости $x \sin\beta - y\cos\beta = 0$ и отраженной волны на симметричной плоскости $x\sin\beta + y\cos\beta = 0$ в случае, когда при $y = 0$ выполнено граничное условие (1.3). Введем новые системы координат τ, p, n, различные для падающей и отраженной волн. Для падающей волны

$$p = -x\cos\beta - y\sin\beta, \qquad n = x\sin\beta - y\cos\beta, \qquad \tau = t - p$$

а для отраженной в этих формулах надо заменить y на $-y$.

Лемма. Предположим, что на плоскости $n = 0$ в окрестности начала координат при $t \geqslant |p|$ для падающей волны справедливы формулы

$$u = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=0}^{M-i} a_{ij}\frac{\tau^i p^j}{i!\,j!} + o(t^M), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-i-1} b_{ij}\frac{\tau^i p^j}{i!\,j!} + o(t^{M-1}) \tag{5.2}$$

и аналогичные формулы для отраженной волны v, но с коэффициентами c_{ij} и d_{ij}. Тогда c_{ij} $(i + j \leqslant M)$ и d_{ij} $(i+j \leqslant M-1)$ зависят только от a_{ij} $(i+j\leqslant M)$, b_{ij} $(i+j\leqslant M-1)$, от угла β и от коэффициентов g_{pqr} граничного условия (1.3), и не зависят от других параметров падающей волны.

Доказательство. Проведем доказательство для граничного условия (в) (1.2); в случае (1.3) рассуждения аналогичны. В силу (5.1) имеем

$$u_y(t, x, -h) + v_y(t, x, h) - cu_t(t, x, -h) - cv_t(t, x, h) = 0 \quad \text{при } h \geqslant 0$$

Переходя к τ, p, n, получим

$$(v_p - u_p - v_\tau + u_\tau)\sin\beta + (v_n - u_n)\cos\beta - c(u_\tau + v_\tau) = 0 \tag{5.3}$$

где для u и для v значения τ, p, n одни и те же

$$p = h\sin\beta - x\cos\beta, \qquad n = x\sin\beta + h\cos\beta, \qquad \tau = t - p, \qquad h \geqslant 0$$

Итак, равенство (5.3) справедливо в некоторой области пространства τ, p, n, примыкающей к началу координат. Дифференцируя (5.3) по n и пользуясь тем, что u и v удовлетворяют уравнению (1.1), т. е. в новых координатах уравнению $2U_{\tau p} = U_{pp} + U_{nn}$, получим

$$(v_{pn} - u_{pn} - v_{\tau n} + u_{\tau n})\sin\beta + (2v_{\tau p} - 2u_{\tau p} - v_{pp} + u_{pp})\cos\beta - cu_{\tau n} - cv_{\tau n} = 0 \tag{5.4}$$

Подставляя (5.2) в (5.3) и (5.4) и приравнивая коэффициенты при $\tau^i p^j / i!j!$, получим

$$(c - \sin\beta)\,a_{i+1,\,j} + (c + \sin\beta)\,c_{i+1,\,j} = (c_{i,\,j+1} - a_{i,\,j+1})\sin\beta + (d_{ij} - b_{ij})\cos\beta$$

$$(c - \sin\beta)\,b_{i+1,\,j} + (c + \sin\beta)\,d_{i+1,\,j} = (d_{i,\,j+1} - b_{i,\,j+1})\sin\beta + (a_{i,\,j+2} - c_{i,\,j+2})\cos\beta + 2(c_{i+1,\,j+1} - a_{i+1,\,j+1})\cos\beta$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots$; $j = 0, 1, 2, \ldots$, причем $a_{0j} = b_{0j} = c_{0j} = d_{0j} = 0$. Так как $c + \sin\beta \neq 0$, то из этих формул можно найти сначала c_{1j}, $j = 0, 1, 2, \ldots$, затем d_{1j}, затем c_{2j}, затем d_{2j} и т. д. Утверждение доказано.

Замечание. Можно показать, что в случае граничных условий (1.3)

$$c_{0j} = ka_{0j}, \quad c_{ij} = \sum_{s=0}^{i}\frac{2^s}{(2s)!}\Lambda_{2s}(k)\,a_{i-s,\,j+s} - \sum_{s=1}^{i}\frac{2^{s-1}}{(2s-1)!}\Lambda_{2s-1}(k)\,b_{i-s,\,j+s-1}$$

$$d_{ij} = \sum_{s=0}^{i}\frac{2^s}{(2s)!}\Lambda_{2s}(k)\,b_{i-s,\,j+s} + \sum_{s=0}^{i}\frac{2^s}{(2s)!}\left(s\Lambda_{2s-1}(k) - \frac{2}{2s+1}\Lambda_{2s+1}(k)\right)a_{i-s,\,j+s+1}$$

где Λ_s те же, что в (3.7), а $k = k(\beta)$ — известный коэффициент отражения для плоских волн

$$k(\beta) = -\frac{m(\beta)}{m(-\beta)}, \qquad m(\beta) = \sum_{p+q+r=n} g_{pqr}\cos^q\beta\sin^r\beta \tag{5.5}$$

6. Оценим разрывы функций $w^1 - w$ и $\partial (w^1 - w) / \partial n$ на OB в случае граничного условия (в) (1.2). Пусть функции $f_i(\tau)$, w^1, w те же, что в п. 4, а U^1 — сумма построенных в п. 3 решений U_i^k с теми же коэффициентами, что в формуле (4.3). Тогда, как в п. 2, $U^1 = u^1 + v^1 + w^1$, где u^1 — падающая, v^1 — отраженная, w^1 — дифрагированная волны; очевидно, функция w^1 здесь та же, что в (4.3). Так как функция U^1, точное решение $U = u + v + w$ и падающие волны u^1 и u непрерывны на OB, т. е. при $\varphi = \pi - \beta$, то $[w^1 - w]_{\pi-\beta} = -[v^1 - v]_{\pi-\beta}$; такое же заключение можно сделать и о производных $\partial / \partial n$. Коэффициенты в формуле (4.3) подбирались так, чтобы функции u^1 и $\partial u^1 / \partial n$ на OC при разложении по степеням τ и r имели те же коэффициенты, что u и $\partial u / \partial n$ в (4.1) и (4.2). Тогда по второй лемме п. 5, то же самое справедливо для v^1, $\partial v^1 / \partial n$ и v, $\partial v / \partial n$ на OB; при этом $M = N + s$. Следовательно,

$$v^1 - v\,|_{\pi-\beta} = o(t^M), \qquad \partial (v^1 - v) / \partial n\,|_{\pi-\beta} = o(t^{M-1})$$

Отсюда вытекает, что

$$[w^1 - w]_{\pi-\beta} = o(t^M), \qquad \left[\frac{\partial (w^1 - w)}{\partial n}\right]_{\pi-\beta} = o(t^{M-1}) \tag{6.1}$$

Чтобы обосновать применимость этой леммы, надо показать, что отраженная волна существует и допускает разложение, аналогичное (5.2). Для достаточно гладкой падающей волны это вытекает из [4]. Можно даже получить явное выражение для отраженной волны методом, которым С. Л. Соболев получил решение задачи о распространении упругих волн для случая полуплоскости [1], стр. 509—559.

7. Оценим разность $w^1 - w$. Из предыдущего следует, что функция $w^1 - w$ удовлетворяет уравнению (1.1) в области $r < t$, кроме плоскостей $\varphi = \pi - \beta$ и $\varphi = \pi + \beta$, изображаемых линиями OB и OC на фиг. 1, где эта функция и ее производная имеют разрывы

$$[w^1 - w] = \mu_i^*(t, r) = o(t^M), \qquad \left[\frac{\partial (w^1 - w)}{\partial n}\right] = \nu_i^*(t, r) = o(t^{M-1})$$

для OC $i = 0$, для OB $i = 1$. Далее при $r = t$ функция $w^1 - w$ равна 0, а при $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$ удовлетворяет граничным условиям (а) (1.2), (б) (1.2) или (в) (1.2). Будем считать, что функции μ_i^* и ν_i^* имеют производные до четвертого порядка, причем k-е производные от μ_i^* равны $o(t^{M-k})$, $k \leqslant 4$, а от ν_i^* — $o(t^{M-k-1})$ (это имеет место, если падающая волна достаточно гладкая). Заменим t на $\tau + r$ и разложим μ_i^* и ν_i^* по формуле Тейлора

$$\mu_i^* = \mu_i^\circ(\tau) + r\mu_i^1(\tau) + r^2\mu_i^2(\tau, r), \qquad \nu_i^* = \nu_i^\circ(\tau) + r\nu_i^1(\tau, r)$$

Очевидно,

$$\mu_i^\circ = o(\tau^M), \quad \mu_i^1 = o(\tau^{M-1}), \quad \nu_i^\circ = o(\tau^{M-1})$$
$$\mu_i^2 = o(t^{M-2}), \quad \nu_i^1 = o(t^{M-2}), \quad \text{при } t \to 0$$

В случаях граничных условий (а) (1.2) и (б) (1.2) пусть

$$z^* = w^1 - w - W$$

$$W = \frac{\partial^N}{\partial t^N}\left\{\sum_{j=0}^{1} \int_0^{t-r} w_j^{2j}(t - s, x, y)\, d\mu_1^j(s) - \int_0^{t-r} w_1^1(t - s, x, y)\, d\nu_1^\circ(s)\right\},$$

где w_i^k те же, что в п. 3, $r^2 = x^2 + y^2$. Тогда

$$[z^*]_{\pi+\beta} = r^2\mu_0^2(\tau, r), \qquad [\partial z^* / \partial n]_{\pi+\beta} = r\nu_0^1(\tau, r)$$

легко видеть, что разрывы на OB также равны $r^2 o(t^{M-2})$ и $r o(t^{M-2})$.

В случае граничного условия (в) (1.2) тоже можно построить функцию z^* с разрывами тех же порядков малости, но для этого надо добавить к функции W слагаемые с разрывами только на OB (более подробно на этом не останавливаемся).

Возьмем малое $h > 0$ и построим функцию z, совпадающую с z^* вне секторов S_i, определенных неравенствами

$$|\varphi - \beta_i| < h, \qquad r < t, \qquad (i = 0, 1;\ \beta_0 = \pi + \beta,\ \beta_1 = \pi - \beta)$$

и непрерывную вместе с производной $\partial z / \partial\varphi$ в этих секторах, включая их боковые границы

$$z = z^* + \left(\frac{\mu_i^2}{2h^2}\operatorname{sign}(\beta_i - \varphi) + \frac{r\nu_i^1}{4h}\right)(h - |\varphi - \beta_i|)^2 \quad \text{при } |\varphi - \beta_i| \leqslant h$$

Тогда z удовлетворяет тем же граничным условиям, что $w^1 - w$, и уравнению

$$z_{tt} - z_{xx} - z_{yy} = f(t, x, y) \tag{7.1}$$

Здесь $f = 0$ вне S_i, $f = h^{-2}\, o(t^{M-2})$ в S_i. Последняя оценка вытекает из свойств μ_i, ν_i и их производных. Оценим теперь «энергию»

$$E(t) = \iint\limits_D \frac{1}{2}(z_t^2 + z_x^2 + z_y^2)\, dx\, dy$$

решения z в момент $t = t_1 > 0$. Интегрируя по частям и учитывая (7.1), получим

$$\frac{dE}{dt} = \iint\limits_D z_t f\, dx\, dy - \int\limits_\Gamma z_t z_n ds$$

где Γ — граница области D $(0 < \varphi < \alpha)$, пробегаемая в положительном направлении, а z_n — производная по внутренней нормали к Γ; заметим, что $z = 0$ при $r > t$. В случае граничного условия (в) (1.2) имеем $z_n = cz_t$, значит контурный интеграл $\geqslant 0$, а в случаях (в) (1.2) и (б) (1.2) он равен 0. Следовательно,

$$\frac{dE}{dt} \leqslant \iint z_t f\, dx\, dy$$

Пользуясь неравенством Буняковского, получим

$$\frac{dE}{dt} \leqslant \left(\iint z_t^2 dx\, dy \iint f^2\, dx\, dy\right)^{1/2} \leqslant \left(2E(t) \iint f^2\, dx\, dy\right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{E(t)}}\frac{dE}{dt} \leqslant \left(2\iint f^2\, dx\, dy\right)^{1/2} \leqslant \gamma(t)\, t^{M-1}, \qquad \gamma(t) \to 0 \qquad (t \to 0)$$

Интегрируя и учитывая, что $E(0) = 0$, получим

$$E(t_1) \leqslant \frac{4}{M^2} t_1^{2M} \max_{0 \leqslant t \leqslant t_1} \gamma^2(t) = o(t_1^{2M})$$

Оценим z вблизи фронта $r = t$ при $t > t_1$. Пусть Z_τ — прифронтовая зона

$$t - \tau < r < t, \qquad 0 < \varphi < \alpha, \qquad |\varphi - \beta_i| > h + \psi \qquad (i = 0, 1), \qquad \psi > 0$$

$$\tau = t_1(1 - \cos\psi)$$

Легко видеть, что из-за конечной скорости распространения волн на значения z в зоне Z_τ не влияют значения функции f в секторах S_i при $t > t_1$. Так как вне этих секторов $f = 0$, то энергия, заключенная в зоне Z_τ в момент t, т. е.

$$\iint\limits_{Z_\tau} \frac{1}{2}(z_t^2 + z_x^2 + z_y^2)\, dx\, dy$$

не превосходит всей энергии, имевшейся в момент t_1, т. е. $E(t_1)$. Итак, энергия решения z в прифронтовой зоне Z_τ равна $o(\tau^{2M})$.

В этой зоне $w_i^k = O(\tau^{N+i+1/2} r^{-1/2})$; пользуясь соответствующими оценками для производных, можно получить, что энергия решения W тоже равна $o(\tau^{2M})$. Следовательно, энергия решения $w^1 - w$ в этой зоне равна $o(\tau^{2M})$.

В формуле (4.3) наивысший порядок малости вблизи фронта имели функции w_s^j; в зоне Z_τ

$$w_s^j = g_s^j(\tau, r, \varphi)\, \tau^{N+s+1/2} r^{-1/2}$$

где g_s^j — гладкая функция. Следовательно, их энергия в зоне Z_τ равна $O(\tau^{2M})$. Таким образом, ошибка формулы (4.3), т. е. $w^1 - w$, в прифронтовой зоне Z_τ при $\tau \to 0$ будет бесконечно малой высшего порядка по сравнению с любым членом этой формулы.

8. В случае, когда фронт падающей волны — дуга окружности (этот случай наиболее важен, так как он позволяет рассмотреть дифракцию волны от точечного источника, а также многократную дифракцию на вершинах многоугольника [1], на отрезке и на щели), можно вывести удобные формулы для любого числа членов лучевого разложения дифрагированной волны.

Укажем некоторые свойства лучевого разложения любой волны с круговым фронтом. Пусть при $t > t_0$ фронт — дуга окружности $\rho = t - t_0$ (в полярных координатах ρ, θ), а сама волна задается формулами

$$u = 0 \quad \text{при } \tau < 0, \qquad u = \sum_{i=0}^{m} f_i(\tau) A_i(\rho, \theta) + \overset{*}{A}_{m+1}(\tau, \rho, \theta) \quad \text{при } \tau \geqslant 0 \tag{8.1}$$

Здесь f_i такие же, как в (3.2),

$$\tau = t - t_0 - \rho, \qquad |\overset{*}{A}_{m+1}| \leqslant C \int_0^\tau |f_m(s)|\, ds$$

Тогда (см. [5], формулы (27) и (34), где для перехода к обозначениям этой статьи надо заменить φ на u, q на ρ, $|q|^{-1/2} A_i$ на A_i)

$$2 \frac{\partial A_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} A_i = \frac{\partial^2 A_{i-1}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{i-1}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_{i-1}}{\partial \theta^2}$$

Отсюда

$$A_0 = \frac{1}{\rho^{1/2}} a(\theta), \qquad A_1 = -\frac{1}{2\rho^{3/2}} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2^2} a \right) + \frac{b(\theta)}{\rho^{1/2}}, \ \ldots$$

где $a(\theta)$, $b(\theta)$, ... — произвольные функции от θ. Сначала рассмотрим случай, когда эти функции, начиная с $b(\theta)$, равны нулю. Тогда получаем

$$A_i = \frac{(-1)^i L_{2i}^\theta a(\theta)}{2^i i!\, \rho^{i+1/2}}, \qquad L_{2i}^\theta \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right) \ldots \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \left(i - \frac{1}{2}\right)^2 \right)$$

Если функция $a(\theta)$ аналитическая, то ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i L_{2i}^\theta a(\theta)}{2^i i!\, \rho^{i+1/2}} f_i(\tau) = F(\rho, f_0(\tau), a(\theta)) \tag{8.2}$$

сходится при $0 < \tau / \rho < \gamma_0$, где γ_0 зависит только от радиуса сходимости степенного ряда для $a(\theta)$.

Рассмотрим случай, когда $b(\theta)$, $c(\theta)$, ... могут быть и не равны нулю. Тогда любая волна (8.1) с круговым фронтом представляется в виде

$$u = F(\rho, f_0(\tau), a(\theta)) + F(\rho, f_1(\tau), b(\theta)) + F(\rho, f_2(\tau), c(\theta)) + \ldots + R_{m+1}$$

где остаточный член R_{m+1} того же порядка, что A^*_{m+1}, в (8.1). Поэтому достаточно рассмотреть задачу о дифракции волны вида (8.2).

[1] Более простым путем, чем это сделано в [6].

Пусть угол, на котором происходит дифракция, такой же, как на фиг. 1, а r, φ — полярные координаты с полюсом в вершине угла O; центр падающей круговой волны — точка O_0 ($r = R$, $\varphi = \beta$), а ρ и θ — полярные координаты с полюсом O_0; падающая волна имеет вид (8.2), где

$$f_i(\tau) = \tau^{N+i} / \Gamma(N+i+1) \quad \text{при } \tau > 0$$

Чтобы найти дифрагированную волну, надо (см. п. 4) разложить функции u и $\partial u / \partial n$ на OC в ряд Тейлора по r (на OC имеем $r = \rho - R$, $\partial u / \partial n = \rho^{-1} \partial u / \partial \theta$) и полученные коэффициенты из (4.1) и (4.2)

$$a_{ik} = \frac{(-1)^{i+k}(2i+2k-1)!!\, L_{2i}^{\theta} a}{2^k (2i)!\, R^{i+k+1/2}}, \qquad b_{ik} = \frac{(-1)^{i+k}(2i+2k+1)!!\, L_{2i+1}^{\theta} a}{2^k (2i+1)!\, R^{i+k+3/2}}$$

$$\left(L_{2i+1}^{\theta} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} L_{2i}^{\theta}\right)$$

подставить в (4.3), положив $\theta = \pi + \beta$.

Напишем лучевое разложение функций $w_p{}^l$ в (4.3). Решение $U^*(t, x, y)$ в п. 3 — однородная функция нулевого измерения.

Если $f_i(\tau) = \tau^{N+i} / \Gamma(N+i+1)$ при $\tau > 0$, то функции $U_p{}^l$ в (3.3) и (3.8), а значит и дифрагированные волны $w_p{}^l$, имеют измерение $N + p$. Поэтому они выражаются формулами вида (8.2)

$$w_p{}^{\circ} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i L_{2i}^{\varphi} m(\varphi, \beta)}{2^i i!\, r^{i+1/2}} \, \frac{\tau^{N+p+i+1/2}}{\Gamma(N+p+i+3/2)}, \qquad w_p{}^l = \Lambda_l w_p{}^{\circ} \tag{8.3}$$

Из [1] получаем, что в случае граничного условия (а) (1.2)

$$m = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{4} (-1)^k \operatorname{ctg} \frac{\pi(\varphi - \gamma_k)}{2\alpha}, \qquad \begin{matrix} \gamma_1 = -\gamma_3 = \pi + \beta \\ \gamma_2 = -\gamma_4 = \pi - \beta \end{matrix}$$

в случае (б) (1.2) надо только изменить знаки первого и четвертого членов суммы; в случае граничного условия (в) (1.2) функцию m можно определить из [2].

Подставляя a_{ik}, b_{ik}, $w_p{}^l$ в (4.3) и полагая $s = \infty$ (пользуясь известными оценками для производных аналитической функции, можно доказать абсолютную сходимость всех полученных рядов при достаточно малых τ / r и τ / R), получим

$$w^1 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{2p} \frac{(-1)^{p+l} C_{2p}^{\,l} (L_l^{\beta} a(\pi+\beta))(\Lambda_{2p-l}^{\beta} M_j)}{2^p p!\, R^{p+1/2}} f_{p+j+1/2}(\tau)$$

$$M_j = \frac{(-1)^j}{2^j j!} L_{2j}^{\varphi} m(\varphi, \beta), \qquad C_{2p}^{l} = \frac{(2p)!}{l!(2p-l)!}$$

Замечая, что для любых функций a и b

$$\sum_{l=0}^{2p} C_{2p}^{\,l} (L_l a)(\Lambda_{2p-l} b) \equiv L_{2p}(ab)$$

(это тождество доказывается индукцией по p), получим

$$w^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^n L_{2n-2j}^{\beta} (a(\pi+\beta) L_{2j}^{\varphi} m(\varphi, \beta))}{2^n j!\,(n-j)!\, R^{n-j+1/2} r^{j+1/2}} f_{n+1/2}(\tau) \tag{8.4}$$

Этот ряд сходится в некоторой окрестности фронта дифрагированной волны. Ширина окрестности уменьшается до нуля при приближении к особым точкам B и C (фиг. 1).

Формула (8.4) получена для падающей волны вида (8.2), где $f_i(\tau) = \tau^{N+i} / \Gamma(N+i+1)$ при $\tau > 0$. Если решение для этого случая обозначить $U_N(t, x, y)$, то решение U для случая любой интегрируемой $f_0(\tau)$, равной 0 при $\tau < 0$, есть суперпозиция решений $U_N(t-s, x, y)$

$$U(t, x, y) = \frac{\partial^{N+1}}{\partial t^{N+1}} \int_0^\infty U_N(t-s, x, y) f_0(s)\, ds \tag{8.5}$$

так как падающая волна есть такая же суперпозиция. Отсюда легко получается, что формула (8.4) справедлива и для таких f_0. При этом $f_{n+1/2}(\tau)$ в (8.4) выражается через $f_0(\tau)$ формулой (3.2).

9. Применим полученные результаты к задаче дифракции волны от простейшего точечного источника, действующего в точке $r = R$, $\varphi = \beta$ в момент $t = -R$, т. е. волны

$$u = \frac{1}{2\pi \sqrt{(t+R)^2 - \rho^2}} \qquad (t + R > \rho) \tag{9.1}$$

Здесь ρ — расстояние от источника до точки наблюдения. Полагая $t + R = \rho + \tau$, получим, что

$$u \sim \frac{1}{2\sqrt{2\pi\rho}} \frac{\tau^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} \qquad \text{при } \tau \to +0$$

Следовательно, взяв в формулах (8.2) и (8.4)

$$a(\theta) \equiv \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}, \qquad f_0(\tau) = \frac{\tau^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}, \qquad f_{n+1/2}(\tau) = \frac{\tau^n}{n!}$$

найдем дифрагированную волну w^1.

В случаях граничных условий (а) (1.2) и (б) (1.2) полученную формулу для w^1 можно еще упростить, если заметить, что в этих случаях $\partial^{2s} m / \partial\beta^{2s} \equiv \partial^{2s} m / \partial\varphi^{2s}$, $s = 1, 2, \ldots$, и воспользоваться тождеством

$$L_{2s} L_{2j} \equiv \sum_{q=0}^{\min(s,j)} \frac{(-1)^q s!\, j!\, (s+j)!}{q!\,(s-q)!\,(j-q)!\,(s+j-q)!} L_{2s+2j-2q}$$

которое можно доказать индукцией по j. Выполнив затем в (8.4) суммирование по j с помощью бинома Ньютона и собрав вместе члены, содержащие L_{2k} с одним и тем же k, получим

$$w^1 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi R}} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k L_{2k} m}{2^k k!\, r^{k+1/2}} \frac{z^k}{k!}, \qquad z = \frac{R+r}{R}\tau + \frac{\tau^2}{2R}$$

Из сравнения с (8.3) вытекает, что

$$w^1(\tau, r, \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi R}} w^\circ(z, r, \varphi)$$

Здесь $w^\circ(\tau, r, \varphi)$ — дифрагированная волна для падающей плоской волны

$$u^\circ = \frac{\tau^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}$$

приходящей по тому же направлению β. Переходя от τ к $t = \tau + r$, получим

$$w^1(\tau, r, \varphi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2R}}\, w\left(t + \frac{t^2 - r^2}{2R},\ r, \varphi\right) \tag{9.2}$$

Здесь $w(t, r, \varphi)$ — дифрагированная волна для падающей плоской волны, задаваемой при $t < 0$ формулами

$$U = \frac{1}{\sqrt{t + r\cos(\varphi - \beta)}} \quad (t > -r\cos(\varphi - \beta)), \qquad U = 0 \quad (t < -r\cos(\varphi - \beta)) \tag{9.3}$$

При помощи (8.5) получаем, что решение задачи дифракции волны (9.3) есть

$$U(t, r, \varphi) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty U^*(t - s, r, \varphi)\frac{ds}{\sqrt{s}} \tag{9.4}$$

где $U^*(t, r, \varphi)$ — решение задачи дифракции волны (3.1), найденное С. Л. Соболевым. Заменив в (9.4) решение U^* на дифрагированную волну w^* (как в п. 2, $U^* = u^* + v^* + w^*$), получим функцию $w(t, r, \varphi)$.

Формула (9.2) выведена при помощи рядов, сходящихся в некоторой окрестности фронта $r = t$, и значит, пока доказана только для этой окрестности. Докажем, что она справедлива и везде.

Теорема. Если $u^\circ(t, r, \varphi)$ — однородное, размерности $-1/2$ относительно t и r, решение волнового уравнения

$$Lu^\circ \equiv u^\circ_{tt} - u^\circ_{rr} - r^{-1}u^\circ_r - r^{-2}u^\circ_{\varphi\varphi} = 0$$

то

$$u(t, r, \varphi) = u^\circ\left(t + \frac{t^2 - r^2}{2R},\ r, \varphi\right) \tag{9.5}$$

— тоже решение этого уравнения.

Доказательство. Имеем

$$Lu = \frac{2}{R}\left(Tu^\circ_{TT} + ru^\circ_{Tr} + \frac{3}{2}u^\circ_T\right) = \frac{2}{R}\left(Tv_T + rv_r + \frac{3}{2}v\right)$$

Здесь

$$T = t + \frac{t^2 - r^2}{2R}, \qquad v = u^\circ_T$$

v — однородная функция размерности $-3/2$. По теореме Эйлера об однородных функциях $Tv_T + rv_r \equiv -3v/2$, т. е. $Lu = 0$.

Замечание 1. Теорема справедлива и для обобщенных решений волнового уравнения.

Обобщенным решением волнового уравнения $Lu = 0$ в области D называется такая функция (или обобщенная функция) u, что для любой функции v, имеющей производные всех порядков и равной нулю в окрестности границы области D и вне какой-нибудь конечной области,

$$\iiint_D uLv\, dt\, dx\, dy = 0$$

Пусть $u^\circ(t, r, \varphi)$ — однородное размерности $-1/2$ относительно t и r обобщенное решение. Покажем, что (9.5) будет обобщенным решением, т. е. что

$$J = \iiint_D u^\circ\left(t + \frac{t^2 - r^2}{2R},\ r, \varphi\right) Lv\, dt\, r dr\, d\varphi = 0$$

Введем обозначения

$$\frac{1}{2R} = a, \qquad t + \frac{t^2 - r^2}{2R} = T, \qquad \frac{v(t, r, \varphi)}{\sqrt{1 + 4a^2r^2 + 4aT}} = w(T, r, \varphi)$$

Тогда

$$J = J_1 + J_2$$

$$J_1 = \iiint\limits_{D_1} u^\circ(T, r, \varphi)\left(w_{TT} - w_{rr} - \frac{1}{r} w_r - \frac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi}\right) r\, dr\, dT d\varphi$$

$$J_2 = \iiint\limits_{D_1} u^\circ(T, r, \varphi)\,(4Tw_{TT} + 4rw_{Tr} + 10w_T)\, r\, dr\, dT\, d\varphi$$

Так как u° — обобщенное решение, то $J_1 = 0$. Для интеграла J_2 положим

$$r = \rho T, \quad u^\circ(T, r, \varphi) = u_1(T, \rho, \varphi), \quad w_T(T, r, \varphi) = z(T, \rho, \varphi).$$

Тогда

$$J_2 = \iiint\limits_{D_2} \sqrt{T} u_1(T, \rho, \varphi)\,(4T^{5/2} z_T + 10\, T^{3/2} z)\, \rho\, d\rho\, dT\, d\varphi$$

Выражение в скобках равно $4\partial(T^{5/2}z) / \partial T$. Интегрируя по частям по T, и учитывая, что $\sqrt{T} u_1(T, \rho, \varphi)$ не зависит от T вследствие однородности функции u_1 и что в окрестности границы $z = 0$, получим $J_2 = 0$.

Замечание 2. Аналогичная теорема справедлива и для решений уравнения $u_{tt} = u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n}$, если u° — однородное решение размерности $(1 - n) / 2$; при этом $r = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$.

Получим теперь решение задачи дифракции волны от источника. Пусть U — решение (9.4) задачи дифракции плоской волны (9.3). В силу теоремы и замечания 1 функция

$$u(t, r, \varphi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2R}}\, U\left(t + \frac{t^2 - r^2}{2R},\ r, \varphi\right) \tag{9.6}$$

будет обобщенным решением. В силу (9.3) при $t < 0$

$$u(t, r, \varphi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(t + R)^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos(\varphi - \beta)}}$$

т. е. совпадает с волной от источника (9.1). Значит, при $t > 0$ функция (9.6) — решение задачи дифракции волны от источника. (Решение этой задачи, записанное в другой форме известно, см. [7], гл. 5.)

10. Рассмотрим теперь пространственную задачу дифракции сферической волны от источника на двугранном угле (клине) или любом конусе, в частности, на многогранном угле с граничными условиями $u = 0$ или $\partial u / \partial n = 0$. Пусть r, φ, z — цилиндрические координаты, источник действует в момент $t = -R$ в точке $r = R$, $\varphi = \beta$, $z = 0$ и пусть волна от источника

$$u = \frac{1}{4\pi d}\,\delta(t + R - d) \qquad (-R < t < 0)$$

где d — расстояние от источника, δ — дельта-функция, достигает препятствия (двугранного угла с ребром $r = 0$ или конуса с вершиной $r = 0$, $z = 0$) впервые в начале координат в момент $t = 0$. Пусть известно решение u_0 задачи дифракции плоской волны

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R}\,\delta(t + r\cos(\varphi - \beta)) \qquad (t < 0) \tag{10.1}$$

на том же двугранном угле или конусе. В сферических координатах ρ, φ, ψ, где $r = \rho\cos\psi$, $z = \rho\sin\psi$, имеем

$$u_0(t, r, \varphi, z) = u_1(t, \rho, \varphi, \psi) = \frac{1}{4\pi R}\,\delta\,(t + \rho\cos\psi\cos(\varphi - \beta)) \quad (t < 0) \qquad (10.2)$$

Для двугранного угла решение не зависит от z и выражается формулой

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R}\frac{\partial U^*}{\partial t}$$

где функция U^* та же, что в п. 3, т. е. U^* — решение плоской задачи о дифракции плоской волны на угле, найденное С. Л. Соболевым [1]. Для конуса в некоторых случаях метод численного решения указан В. А. Боровиковым [8].

В силу замечания 2 функция

$$u(t, \rho, \varphi, \psi) = u_1\left(t + \frac{t^2 - \rho^2}{2R},\ \rho, \varphi, \psi\right) \qquad (10.3)$$

будет решением волнового уравнения; очевидно, она удовлетворяет граничным условиям. В силу формулы (10.2) и свойств δ — функции

$$|a|\,\delta\,(ax) \equiv \delta\,(x), \qquad \delta\,(f\,(x)) \equiv \frac{\delta\,(x - d)}{|f'(d)|} \qquad (\text{если } f(d) = 0),$$

имеем

$$u = \frac{1}{2\pi}\,\delta\,((t + R)^2 - d^2) = \frac{1}{4\pi d}\,\delta\,(t + R - d) \quad \text{при } -R < t < 0$$

т. е. решение (10.3) при $-R < t < 0$ совпадает с волной от источника. Значит, (10.3) — решение задачи дифракции волны от источника на двугранном угле или конусе.

В случае двугранного угла это решение известно [9], а в случае конуса было известно [10] только лучевое разложение дифрагированной волны вблизи фронта.

Поступила 23 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний (гл. XII в книге Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, ОНТИ, 1937).
2. Papadopoulos V. M. Pulse diffraction by an imperfectly reflecting wedge. J. Austral. Math. Soc., 1961, v. 2, No 1.
3. Бабич В. М., Алексеев А. С. О лучевом методе вычисления интенсивности волновых фронтов. Изв. АН СССР, сер геофиз., 1958, № 1.
4. Duff G. F. D. A mixed problem for normal hyperbolic linear partial differential equations of second order. Canad. J. Math., 1957, v. 9, No 1.
5. Филиппов А. Ф. О приближенном вычислении отраженных и преломленных волн. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1957, № 7.
6. Боровиков В. А. О двумерной задаче дифракции на многоугольнике. Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 4.
7. Фридлендер Ф. Звуковые импульсы. ИЛ, 1962.
8. Боровиков В. А. О сведении некоторых трехмерных задач дифракции к задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 3.
9. Боровиков В. А. О трехмерной задаче дифракции на призме. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 3.
10. Боровиков В. А. О функции Грина для задачи дифракции на многогранном угле. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 2.