Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

К ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ УПРУГИХ И СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

И. Г. Филиппов

(Москва)

В работах [1, 2] исследовались и решались нестационарные задачи дифракции плоских слабых ударных волн около контуров произвольной формы. Ниже дается обобщение результатов работ [1, 2] на двумерные нестационарные задачи дифракции цилиндрических слабых ударных и упругих волн. Приводятся общие теоремы, позволяющие исследовать и решать задачи дифракции в общей постановке.

Даются решения ряда задач дифракции в квадратурах с учетом второго приближения единым методом, некоторые из этих задач были решены другими авторами в линейной постановке различными искусственными приемами.

§ 1. Постановка и решение двумерных задач. Рассмотрим задачу дифракции цилиндрической слабой ударной волны на бесконечном цилиндре произвольного поперечного сечения, фронт которой параллелен оси цилиндра. Очевидно, данная задача дифракции является двумерной.

Интенсивность падающей ударной волны будем характеризовать параметром $\alpha = \Delta p \,/\, (\rho a^2)$, где ρ — плотность среды, a — скорость звука среды, Δp — перепад давления на фронте падающей цилиндрической ударной волны S и будем считать параметр α малым.

За исходные параметры задачи примем скорость распространения падающей волны, которая в рассматриваемых задачах совпадает со скоростью звука среды a, и максимальный диаметр $2l$ поперечного сечения цилиндра C. Пусть S^- обозначает фронт отраженной ударной волны, $\alpha\Phi_0$ — потенциал скорости падающей волны и пусть дифракция начинается при $t = 0$, где t — время.

Тогда, считая обтекание контура C ударной волной безвихревым изэнтропическим, в безразмерной постановке задачу дифракции можно свести к определению добавочного потенциала скоростей $\varphi\ (x, y, \tau)$, удовлетворяющего с точностью до величин третьего порядка малости уравнению [2]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} = (k-1)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial\tau} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial\tau}\right), \quad \tau = \frac{at}{l} \qquad (1.1)$$

и условиям

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\alpha\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} + \varepsilon_\tau'(s, \tau) \quad \text{на } C \\ \varphi = 0 \quad \text{при } \tau \leqslant 0, \qquad \text{на } S^- \text{ при } \tau > 0\end{gathered} \qquad (1.2)$$

Здесь k—коэффициент адиабаты, (n, s) — естественная система координат, связанная с контуром, $\varepsilon\ (s, \tau)$ — величина деформации контура C

при воздействии на него падающей волны; эта величина равна

$$\varepsilon(s, \tau) = k_1 p(s, \tau) \quad \text{или} \quad \varepsilon(s, \tau) = \lambda_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \qquad (\lambda_0 = -\rho a^2 k_1) \tag{1.3}$$

p — давление, создаваемое падающей и отраженной волнами на контуре; k_1 — коэффициент жесткости контура и считается известным.

Систему (1.1) — (1.2) будем решать, полагая

$$\varphi(x, y, \tau) = \varphi_1(x, y, \tau) + \varphi_2(x, y, \tau) + \ldots \tag{1.4}$$

где φ_i — величины i-го порядка малости относительно малого параметра α.

Подставляя (1.4) в (1.1), (1.2), для определения потенциалов φ_1 и φ_2 получим систему

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \tau^2} = F(x, y, \tau) \\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\alpha \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} + \lambda_0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2}, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \lambda_0 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \tau^2} \quad \text{на } C \\
\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad \text{при } \tau \leqslant 0, \qquad \text{на } S^- \quad \text{при } \tau > 0
\end{gathered} \tag{1.5}$$

где F — правая часть уравнения (1.1) при $\varphi = \varphi_1(x, y, \tau)$.

Методом работы [1] можно доказать, что имеет место

Теорема 1. Двумерная задача дифракции цилиндрической слабой ударной волны на цилиндре произвольного поперечного сечения C, описываемая системой (1.5), эквивалентна двум смешанным задачам Коши для функций φ_1 и φ_2 в пространстве (x, y, τ), описываемым также системой (1.5), или эквивалентна вспомогательной внешней задаче обтекания полого полубесконечного по оси τ $(\tau \geqslant 0)$ цилиндра, соответствующего контуру C, сверхзвуковом потоком газа при числе Маха $M_1 = \sqrt{2}$ под малым углом атаки.

Уравнение передней кромки полубесконечного цилиндра имеет вид

$$\tau = A(x, y), \qquad y = f(x) \tag{1.6}$$

где $\tau = A$ — уравнение фронта падающей волны, $y = f(x)$ — уравнение контура C.

В силу теоремы 1 задачу Коши (1.5) будем решать методом Вольтерра [3]. Тогда для определения φ_1 и φ_2 на поверхности полого полубесконечного цилиндра во вспомогательной задаче получим интегро-дифференциальные уравнения

$$\begin{gathered}
\varphi_1(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \iint\limits_{\Sigma} \left[\varphi_1(x, y, \tau) \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right] ds\, d\tau \right\} \\
\varphi_2(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \iint\limits_{\Sigma} \left[\varphi_2(x, y, \tau) \frac{\partial V}{\partial n} - \right.\right. \\
\left.\left. - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \lambda_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} \right) V \right] ds\, d\tau + \iiint\limits_{T} FV dx\, dy\, d\tau \right\}
\end{gathered} \tag{1.7}$$

где Σ — часть поверхности цилиндра, отсекаемая конусом влияния из точки (x_0, y_0, τ_0), T — объем, ограниченный поверхностью Σ, поверхностью конуса влияния и частью волновой поверхности вспомогательной

задачи, отсекаемой данным конусом влияния, функция Вольтерра

$$V = \ln \frac{(\tau_0 - \tau) + \sqrt{(\tau_0 - \tau)^2 - (x_0 - x)^2 - (y_0 - y)^2}}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}} \tag{1.8}$$

Потенциалы φ_1 и φ_2 в произвольной точке возмущенной области выражаются квадратурами через значения φ_1 и φ_2 на поверхности цилиндра.

Таким образом, решение поставленной выше задачи дифракции сводится к решению уравнений (1.7), для численного решения которых удобнее вместо сингулярной функции $\partial V / \partial n$ ввести функции

$$K(\tau_0 - \tau, x_0 - x, y_0 - y) = \int \frac{\partial V}{\partial n} d\tau, \qquad K_1(\tau_0 - \tau, y_0 - y, x_0 - x) = \int K\, d\tau \tag{1.9}$$

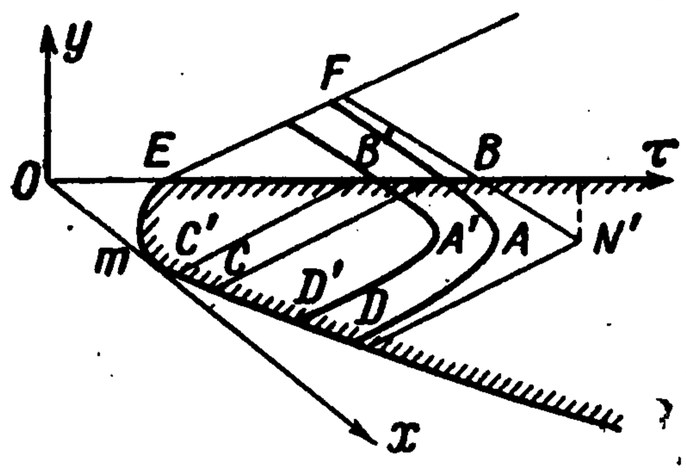
непрерывные во всей области Σ, включая ее границу, и обращающиеся в нуль в точке (x_0, y_0, τ_0), лежащей на поверхности цилиндра вспомогательной задачи, и свести уравнения (1.7) к несингулярным уравнениям относительно потенциалов φ_1 и φ_2.

§ 2. Решение частных двумерных задач дифракции. 1. Рассмотрим дифракцию цилиндрической слабой ударной волны на полубесконечной тонкой пластинке ($y = 0$, $x \geqslant 0$). Пусть центр цилиндрической волны находится в точке ($x = m$, $y = -R$) и характерный линейный размер равен $l = a \cdot 1$ *сек*. Кроме того, будем считать $k_1 = 0$.

В силу теоремы 1 данная задача дифракции эквивалентна задаче об обтекании полубесконечного плоского крыла, ограниченного кривыми

$$\tau = -R + \sqrt{(x - m)^2 + R^2}, \; y = 0, \qquad x \geqslant 0 \tag{2.1}$$

сверхзвуковым потоком газа при $M_1 = \sqrt{2}$ под малым углом атаки (фиг. 1). Вспомогательную задачу будем решать методом Вольтерра.



Фиг. 1

Тогда потенциалы φ_1 и φ_2 в произвольной точке (x_0, y_0, τ_0) возмущенной области, для которой область интегрирования Σ_1 не выходит за пределы крыла, можно выразить посредством формул

$$\varphi_1(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{\alpha}{\pi} \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dx\, d\tau$$

$$\varphi_2(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{1}{\pi} \iiint\limits_{T} F(x, y, \tau) \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dx\, dy\, d\tau \tag{2.2}$$

Для определения потенциалов φ_1 и φ_2 в произвольной точке возмущенной области, для которой область интегрирования выходит за пределы крыла, необходимо учесть влияние боковой кромки крыла. Таким образом, будем иметь

$$\varphi_1(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{\alpha}{\pi} \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dx\, d\tau + \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\sigma} Q_1 \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dx\, d\tau$$

$$\varphi_2(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\sigma} Q_2 \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dx\, d\tau + \frac{1}{\pi} \iiint\limits_{T} F(x, y, \tau) \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dx\, dy\, d\tau \tag{2.3}$$

Здесь Σ_1 означает площадь $ABEmDA$, а σ — площадь $BFEB$ на фиг. 1, через Q_1 и Q_2 обозначены значения $\partial\varphi_1 / \partial y$ и $\partial\varphi_2 / \partial y$ соответственно на σ.

Для определения Q_1 и Q_2 запишем выражения для φ_1 и φ_2 в области σ. Так как φ_1 и φ_2 равны нулю на σ, то для определения Q_1 и Q_2 получим интегральные уравнения

$$\begin{gathered}\iint\limits_{\sigma_0} Q_1 \frac{\partial V}{\partial \tau_0}\, dx\, d\tau + \alpha \iint\limits_{\Sigma_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial \tau_0}\, dx\, d\tau = 0 \\ \iint\limits_{\sigma_0} Q_2 \frac{\partial V}{\partial \tau_0}\, dx\, d\tau + \iiint\limits_{T_0} F(x, y, \tau) \frac{\partial V}{\partial \tau_0}\, dx\, dy\, d\tau = 0\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь $\sigma_0 + \Sigma_0$ — область интегрирования, вырезаемая конусом влияния (фиг. 1) из точки $(x_0, 0, \tau_0)$, лежащей в σ, а T_0 — соответствующий объем.

Введем характеристические координаты

$$\mu = \tau + x, \quad \nu = \tau - x$$

Тогда преобразованные уравнения (2.4) легко обращаются [4], и окончательно будем иметь

$$\begin{gathered}\varphi_1(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Sigma_{10}} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial \tau_0}\, dx\, d\tau \\ \varphi_2(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{1}{\pi} \left\{ \iiint\limits_{T} F(x, y, \tau) \frac{\partial V}{\partial \tau_0}\, dx\, dy\, d\tau - \iint\limits_{\Sigma_1 - \Sigma_{10}} F \frac{\partial V}{\partial \tau_0}\, dx\, d\tau \right\}\end{gathered} \tag{2.5}$$

где Σ_{10} — площадь $ABCDA$ часть поверхности Σ_1 на фиг. 1.

По известным значением φ_1 и φ_2 можно определить давление p в любой точке возмущенной области вплоть до поверхности крыла.

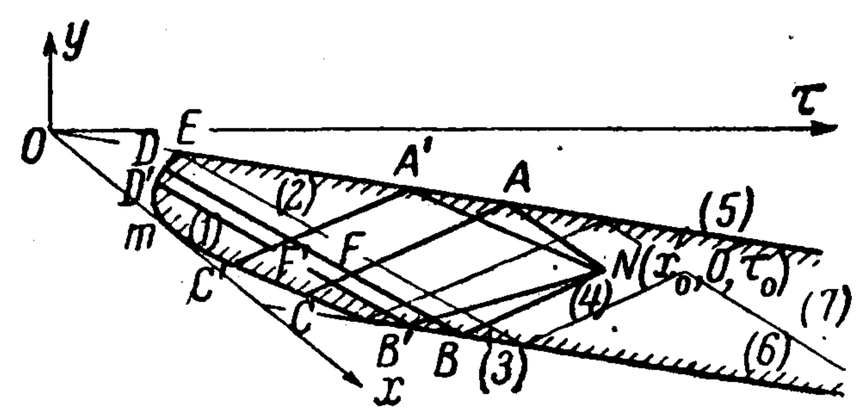
При $k_1 \neq 0$ и достаточно малом решение можно представить в виде ряда по k_1 или можно определить из интегро-дифференциального уравнения.

2. Рассмотрим более общую задачу дифракции цилиндрической слабой ударной волны на пластинке единичной длины, движущейся вдоль оси x с произвольной скоростью U под нулевым углом атаки.

В силу теоремы 1 будем решать вспомогательную задачу обтекания полубесконечного крыла (фиг. 2), ограниченного кривыми

$$\tau = -R + \sqrt{(x - m)^2 + R^2} \tag{2.6}$$

$$x = M_0 \tau, \quad x = 1 + M_0 \tau, \quad M_0 = U / a$$



Фиг. 2

Разобьем поверхность крыла на подобласти (*1*), (*2*), (*3*), (*4*) и т. д., как показано на фиг. 2, и ограничимся случаем $M_0 < 1$. Решение задачи в случае $M_0 > 1$ получается более просто и решение для плоской волны изложено в работе [1].

Как и при решении предыдущей частной задачи, будем иметь:

а) в точках возмущенной области, на которую оказывают влияние точки поверхности крыла, лежащие в подобласти (*1*) и (*2*) или (*3*), значения потенциалов φ_1 и φ_2 совпадают по виду с решениями (2.2) и (2.5) соответственно и находятся аналогично;

б) в точках возмущенной области, на которую оказывают влияние точки поверхности крыла, лежащие в подобласти (*4*), значения φ_1 и φ_2 равны

$$\varphi_1(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{\alpha}{\pi} \iint\limits_{\Sigma_0+EC} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dx\, d\tau \tag{2.7}$$

$$\varphi_2(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{1}{\pi} \left\{ \iiint\limits_T F(x, y, \tau) \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dx\, dy\, d\tau - \iint\limits_{\Sigma_1-\Sigma_0} F(x, 0, \tau) \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dx\, d\tau \right\} \tag{2.8}$$

где Σ_0 площадь $NAFDmCFBN$ часть поверхности Σ_1 фиг. 2.

Можно показать, что задача дифракции плоских или цилиндрических слабых ударных волн на решетке профилей в виде пластин аналогично решается в квадратурах.

Если вместо пластинки имеем тонкий профиль, то задача дифракции также решается в квадратурах, но лишь при условии $U = 0$.

§ 3. Постановка и решение двумерных задач дифракции цилиндрических упругих волн. При исследовании задач дифракции упругих волн будем предполагать, что упругая среда, вообще говоря, подчиняется нелинейному закону упругости, в частности закону Мурнагана [5]

$$\sigma_{xx} = \lambda A_0 + 2\mu(1 + \beta_1 A_0)\varepsilon_{xx} + \beta_2 A_0^2 - \beta_1 A_1 + \beta_3(\varepsilon_{xx}^2 + {}^1/_4\varepsilon_{xy}^2 + {}^1/_4\varepsilon_{xz}^2)$$
$$\sigma_{xy} = \mu(1 + \beta_1 A_0)\varepsilon_{xy} + \beta_3[(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\varepsilon_{xy} + {}^1/_2\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}] \tag{3.1}$$

где λ, μ, β_1, β_2, β_3 — упругие константы; A_0, A_1, A_2 — инварианты тензора деформаций. Выражения для σ_{yy}, σ_{zz}, σ_{yz}, σ_{zx} получаются из (3.1) круговой перестановкой. Кроме того, будем рассматривать такие упругие среды, для которых $\beta_1 = \beta_3 = 0$, и, считая деформации малыми, будем исследовать влияние нелинейных членов в (3.1).

Для простоты будем считать, что падающая цилиндрическая упругая волна задана потенциалами $\alpha\Phi_0$ и Ψ_0 продольной и поперечной волн вида

$$\Phi_0 = f(x, y, z, \tau), \quad \Psi_0 = 0, \quad \tau = a_0 t / l, \quad a_0^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho \tag{3.2}$$

где a_0 — скорость распространения продольной волны, ρ — плотность среды, l — характерный линейный размер задачи.

Пусть на контур C произвольной формы падает цилиндрическая упругая волна (3.2) и дифракция начинается при $\tau = 0$ ($t = 0$).

Введем потенциалы Φ и Ψ продольной и поперечной волн

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad w = u + iv \tag{3.3}$$

где w — вектор смещения произвольной точки упругой среды.

Тогда при отсутствии внешних сил уравнения движения упругой среды (3.1) в безразмерных переменных можно представить в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}=-\left(\frac{\beta^2}{\rho a_0^2}\right)(\Delta\varphi)^2$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}=0,\qquad b^2=\frac{\mu}{\rho a_0^2} \tag{3.4}$$

где b — безразмерная скорость распространения поперечной волны,

$$\varphi=\Phi-\Phi_0,\quad \Psi=\Psi-\Psi_0 \tag{3.5}$$

Будем решать задачу при граничных и начальных условиях:

$$q_1(s,\tau)=\varepsilon(s,\tau),\qquad q_2(s,\tau)=f_1(s,\tau)\quad \text{на } C \tag{3.6}$$

где n, s — естественные координаты, связанные с контуром; q_1, q_2 — составляющие вектора смещения по нормали и касательной к контуру C соответственно; $\varepsilon(s,\tau)$ — величина деформации контура C при воздействии на него упругой волны. Для простоты будем предполагать, что

$$\varepsilon(s,\tau)={}^1/_2\,k_2(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}),\qquad f_1=k_3\sigma_{sn} \tag{3.7}$$

и S^- — фронт отраженной волны; k_2 и k_3 — константы.

Задачи (3.4), (3.6), (3.7), будем решать, полагая

$$\varphi(x,y,\tau)=\varphi_1(x,y,\tau)+\varphi_2(x,y,\tau)+\ldots$$
$$\psi(x,y,\tau)=\psi_1(x,y,\tau) \tag{3.8}$$

Для определения $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ получим систему

$$\Delta\varphi_1-\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\tau^2}=0,\qquad \Delta\varphi_2-\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\tau^2}=F(x,y,\tau),\qquad \Delta\psi_1-\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tau^2}=0$$
$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\alpha\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}+\frac{\partial\psi_1}{\partial s}+\lambda_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\tau^2},\qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\lambda_1\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\tau^2}\quad \text{на } C$$
$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n}-\alpha\frac{\partial\Phi_0}{\partial s}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}-\frac{\lambda_2}{b^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tau^2}+2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial\tau\,\partial s^2}\quad \text{на } C \tag{3.9}$$
$$\lambda_1=k_2(\lambda+\mu),\qquad \lambda_2=\frac{\mu k_3}{1-\mu k_3}$$
$$\varphi_1=\varphi_2=\psi_1=0\quad \text{при } \tau\leqslant 0,\qquad \text{на } S^-\quad \text{при } \tau>0$$

где через $F(x,y,\tau)$ обозначена правая часть уравнения (3.4) при $\varphi=\varphi_1$.

Как и при решении задач дифракции плоских слабых ударных волн, имеет место следующая теорема [2].

Теорема 2. Дифракция цилиндрической упругой волны на контуре C, описываемая системой (3.9), эквивалентна внешней задаче обтекания двумя сверхзвуковыми потоками идеального газа полого полубесконечного по оси τ ($\tau\geqslant 0$) цилиндра Q, соответствующего контуру C, при $M_1=\sqrt{2}$ и $M_2=\sqrt{1+b^{-2}}$, или эквивалентна трем смешанным задачам Коши, описываемым также системой (3.9), в пространстве (x, y, τ).

Уравнение передней кромки цилиндра во вспомогательной задаче задается уравнением (1.6).

В силу теоремы 2 для определения $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ применим метод Вольтерра. Тогда для определения $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ на поверхности цилиндра Q получим систему двумерных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\varphi_1(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau_0}\left\{\iint\limits_{\Sigma_1}\left[\varphi_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right]ds\,d\tau\right.$$

$$\varphi_2(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau_0}\left\{\iint\limits_{\Sigma_1}\left[\varphi_2\frac{\partial V}{\partial n} - \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} + \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\tau^2} - \right.\right.\right. \tag{3.10}$$

$$\left.\left.\left. - \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial s\,\partial\tau}\right)V\right]ds\,d\tau + \iiint\limits_{T} F(x, y, \tau)\,V\,dx\,dy\,d\tau\right\}$$

$$\psi_1(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau_0}\left\{\iint\limits_{\Sigma_2}\left[\psi_1\frac{\partial V_1}{\partial n} - V_1\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\right]ds\,d\tau\right\}$$

где Σ_1 и Σ_2 — части поверхности цилиндра, отсекаемые конусами влияния

$$(\tau_0 - \tau)^2 - (x_0 - x)^2 - (y_0 - y)^2 = 0$$
$$b^2(\tau_0 - \tau)^2 - (x_0 - x)^2 - (y_0 - y)^2 = 0$$

из точки (x_0, y_0, τ_0), лежащей на поверхности цилиндра; V — функция Вольтерра (1.8), а

$$V_1(\tau_0 - \tau, x_0 - x, y_0 - y) = V\,[b(\tau_0 - \tau), x_0 - x, y_0 - y] \tag{3.11}$$

Таким образом, общая задача дифракции сводится к решению системы (3.10), которую для заданного контура C можно решать численно или для некоторых контуров C можно получить решения в квадратурах.

Рассмотрим частные задачи дифракции упругих цилиндрических волн.

1. Рассмотрим задачу дифракции цилиндрической упругой волны на полубесконечном разрезе ($y = 0$, $x \geqslant 0$), жестко связанным с окружающей средой. Пусть центр волны находится в точке ($x = m$, $y = -R$).

По теореме 2 вместо задачи дифракции будем решать две вспомогательные смешанные задачи (фиг. 1), причем полуплоскость Q ограничена кривыми (2.1).

Тогда следуя методу Вольтерра для решения трехмерных задач Коши для потенциалов φ_1 и ψ_1 в произвольной точке $(x_0, 0, \tau_0)$, для которой область интегрирования не выходит за пределы полуплоскости Q, получим выражения

$$\varphi_1(x_0, 0, \tau_0) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial\tau_0}dx\,d\tau + \frac{\alpha}{\pi}\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial\tau_0}dx\,d\tau$$

$$\psi_1(x_0, 0, \tau_0) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial V_1}{\partial\tau_0}dx\,d\tau + \frac{\alpha}{\pi}\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}\frac{\partial V_1}{\partial\tau_0}dx\,d\tau \tag{3.12}$$

Аналогично, для точек $(x_0, 0, \tau_0)$, для которых область интегрирования выходит за пределы полуплоскости

$$\varphi_1(x_0, 0, \tau_0) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Sigma_{10}}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial\tau_0}dx\,d\tau + \frac{\alpha}{\pi}\iint\limits_{\Sigma_{10}}\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial\tau_0}dx\,d\tau$$

$$\psi_1(x_0, 0, \tau_0) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Sigma_{20}}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial V_1}{\partial\tau_0}dx\,d\tau + \frac{\alpha}{\pi}\iint\limits_{\Sigma_{20}}\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}\frac{\partial V_1}{\partial\tau_0}dx\,d\tau \tag{3.13}$$

где Σ_{10} и Σ_{20} — части поверхности Σ_1 и Σ_2 или $A'B'C'D'A'$, как показано на фиг. 1.

Рассмотрим уравнение (3.12). Вводя характеристические координаты $\mu = \tau + x$, $\nu = \tau - x$ в первом уравнении (3.12), соответственно во втором уравнении можно показать, что символ дифференцирования функций φ_1, ψ_1 можно вынести за двойной интеграл; исключая затем ψ_1, φ_1, уравнения (3.12) представим в виде

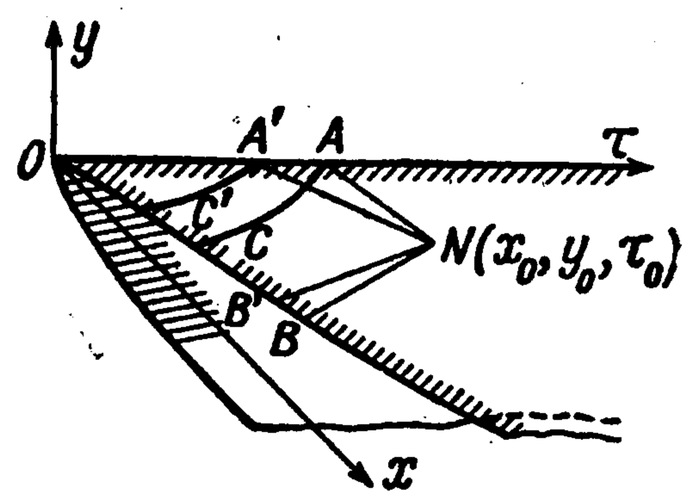
$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0, 0, \tau_0) &= -\frac{\partial}{\pi^2 \partial x_0} \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dx\, d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint\limits_{\Sigma_2} \varphi_1 \frac{\partial V_1}{\partial \tau} dx' d\tau' + F_1(x_0, \tau_0) \\ \psi_1(x_0, 0, \tau_0) &= -\frac{1}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial x_0} \iint\limits_{\Sigma_2} \frac{\partial V_1}{\partial \tau_0} dx\, d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint\limits_{\Sigma_1} \psi_1 \frac{\partial V}{\partial \tau} dx' d\tau' + F_2(x_0, \tau_0) \end{aligned} \tag{3.14}$$

где F_1 и F_2 — известные квадратуры в уравнениях (3.12).

Можно показать, что

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial x_0} \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dx d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint\limits_{\Sigma_2} \frac{\partial V_1}{\partial \tau} dx' d\tau' \right| < 1, \qquad 0 \leqslant b < 1 \\ &\left| \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial x_0} \iint\limits_{\Sigma_2} \frac{\partial V_1}{\partial \tau_0} dx d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial V}{\partial \tau} dx' d\tau' \right| < 1, \qquad 0 \leqslant b < 1 \end{aligned} \tag{3.15}$$

и, следовательно, уравнения (3.14) разрешимы относительно φ_1 и ψ_1, и приближенное решение можно получить методом итераций, причем для получения приближенного выражения φ_1 и ψ_1 практически приемлемую точность дает первая итерация. Последующие же итерации дают вклад не более 2 — 3% для широкого диапазона изменения параметра b.



Фиг. 3

Аналогично решается система (3.13).

Определение потенциала φ_2 принципиально не отличается от определения потенциала φ_2 в задачах, решенных в § 2, п. 1, и имеет вид (2.2) или (2.3).

Аналогично решается задача при $\Psi_0 \neq 0$.

2. Пусть на пластинку единичной длины ($0 \leqslant x \leqslant 1$), движущейся со скоростью U вдоль оси x, падает продольная упругая цилиндрическая волна.

В силу теоремы 2 будем решать вспомогательные задачи Коши.

Разобьем поверхность полубесконечной пластинки на области (*1*), (*2*), (*3*), . . . (фиг. 2). Потенциалы φ_1, ψ_1 в точках $(x_0, 0, \tau_0)$ областей (*1*) и (*2*) или (*3*) имеют вид (3.12) и (3.13). В точках же области (*4*)

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0, 0, \tau_0) &= -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Sigma_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dx\, d\tau + \frac{\alpha}{\pi} \iint\limits_{\Sigma_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dx\, d\tau \\ \psi_1(x_0, 0, \tau_0) &= \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Sigma_0'} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial V_1}{\partial \tau_0} dx\, d\tau + \frac{\alpha}{\pi} \iint\limits_{\Sigma_0'} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial V_1}{\partial \tau_0} dx\, d\tau \end{aligned} \tag{3.16}$$

где Σ_0' обозначает площадь $NA'F'D'C'F'B'N$ на фиг. 2.

Уравнения (3.16) разрешаются относительно φ_1 и ψ_1 так же, как и уравнения (3.12) или (3.13). В случае $U = U(\tau)$ построение решения аналогичное. Решение при $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$ достаточно малых можно получить в виде рядов по λ_1 и λ_2.

Аналогично решается задача дифракции упругих волн на решетке профилей, составленных из прямолинейных отрезков, или на n щелях.

3. Рассмотрим задачу дифракции цилиндрической круговой упругой волны на клине угла полураствора $0 \leqslant \beta \leqslant \pi/2$. Пусть центр цилиндрической волны лежит на оси симметрии клина и вне клина.

В силу теоремы 2 будем решать вспомогательные смешанные задачи Коши относительно потенциалов φ_1, ψ_1 или задачу об обтекании соответствующего трехмерного полубесконечного ($\tau \geqslant 0$) угла с плоскостью симметрии $y = 0$ (фиг. 3).

Решая данную задачу, описываемую уравнениями и граничными и начальными условиями (3.9), методом Вольтерра и учитывая, что

$$\varphi_1(x, y, \tau) = +\varphi_1(x, -y, \tau), \qquad \psi_1(x, y, \tau) = -\psi_1(x, -y, \tau) \tag{3.17}$$

для определения φ_1 и ψ_1 получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0, y_0, \tau_0) &= -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_{10}'} \frac{\partial\psi_1}{\partial q_1} \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dq_1 d\tau + \frac{\alpha}{\pi} \iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_{10}'} \frac{\partial\Phi_0}{\partial q_2} \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dq_1 d\tau \\ \psi_1(x_0, y_0, \tau_0) &= \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Sigma_2-\Sigma_{20}'} \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} \frac{\partial V_1}{\partial \tau_0} dq_1 d\tau + \frac{\alpha}{\pi} \iint\limits_{\Sigma_2-\Sigma_{20}'} \frac{\partial\Phi_0}{\partial q_1} \frac{\partial V_1}{\partial \tau_0} dq_1 d\tau \end{aligned} \tag{3.18}$$

где

$$q_1 = x\cos\beta + y\sin\beta, \qquad q_2 = -x\sin\beta + y\cos\beta$$

а Σ_{10}', Σ_{20}' — части поверхности Σ_1 и Σ_2 или $NACBN$, $NA'C'B'N$ (фиг. 3), ограниченные кривыми (3.19)

$$\tau = \tau_0 - \sqrt{(q_{10} - q_1)^2\cos^2\beta + (q_{10} + q_1)^2\sin^2\beta}, \quad \tau = A(q_1), \quad q_2 = 0, \quad y > 0 \quad (AC)$$

$$\tau = \tau_0 - b^{-1}\sqrt{(q_{10} - q_1)^2\cos^2\beta + (q_{10} + q_1)^2\sin^2\beta}, \quad \tau = A(q_1), \quad q_2 = 0, \quad y > 0 \quad (A'C)$$

соответственно.

Исключая φ_1 и ψ_1 в интегральных членах уравнений (3.18), получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0, y_0, \tau_0) &= -\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\partial q_{10}} \iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_{10}'} \frac{\partial V}{\partial \tau_0} dq_1 d\tau \frac{\partial}{\partial q_1} \iint\limits_{\Sigma_2-\Sigma_{20}'} \varphi_1 \frac{\partial V_1}{\partial \tau} dq_1' d\tau' + F_3(x_0, y_0, \tau_0) \\ \psi_1(x_0, y_0, \tau_0) &= -\frac{1}{\pi^2}\frac{\partial}{\partial q_{10}} \iint\limits_{\Sigma_2-\Sigma_{20}'} \frac{\partial V_1}{\partial \tau_0} dq_1 d\tau \frac{\partial}{\partial q_1} \iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_{10}'} \psi_1 \frac{\partial V}{\partial \tau} dq_1' d\tau' + F_4(x_0, y_0, \tau_0) \end{aligned} \tag{3.20}$$

где F_3 и F_4 — известные квадратуры.

Уравнения (3.20) относительно φ_1 и ψ_1 решаются методом итераций, как и при решении предыдущих задач.

При $b = 0$ в уравнениях (3.20) интегральные члены исчезают и $\psi_1 = 0$. Выражение для φ_1 дает решение задачи дифракции слабой ударной или акустической волны на клине.

Примечание. Пользуясь случаем, внесем исправления к работе [2], где при решении задачи дифракции слабой ударной волны на вытянутом сфероиде поверхность сфероида бралась за значение $\xi = 1$. На самом деле, необходимо поверхность сфероида задавать уравнением $\xi = a$, $a \geqslant 1$, где a — произвольная постоянная. При $\xi = 1$ вытянутый сфероид вырождается в отрезок оси z.

В заключение автор приносит благодарность Е. А. Иванову за ряд ценных замечаний при рецензировании работы.

Поступила 25 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов И. Г. К теории дифракции слабых ударных волн около контуров произвольной формы. ПММ, 1963, т. 27, № 1.
2. Филиппов И. Г. К теории линейных пространственных нестационарных задач дифракции и некоторые нелинейные задачи. ПММ, 1963, т. 27, № 4.
3. Гурса Э. Курс математического анализа. Гостехтеоретиздат, т. 3, ч. 1, 1933.
4. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М.— Л., 1952.
5. Mournaghan F. Finite deformation of an elastic solid. Amer. J. Math., 1937, vol. 59, pp. 235—260.