

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НЕРАВНОВЕСНЫХ И РАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЙ

А. Н. Крайко

(Москва)

Рассмотрена задача об определении формы плоских и осесимметричных тел минимального сопротивления и сопел максимальной тяги при стационарном сверхзвуковом течении вязкого и нетеплопроводного газа при наличии необратимых процессов типа химических реакций, идущих с конечными скоростями, и при отсутствии таких процессов. Предполагается, что область влияния искомого участка контура ограничена характеристиками и не содержит ударных волн. Ограничения на контур тела произвольны: могут задаваться размеры тела, площадь поверхности, объем и т. п.

В данной задаче параметры на поверхности тела, определяемые системой нелинейных уравнений в частных производных, являются функционалами неизвестного заранее вида. В задачах, решенных до недавнего времени [1-9], эта трудность преодолевается предложенным А. А. Никольским [10] переходом к контрольному контуру. Однако этот переход применим при задании только размеров тела и при отсутствии необратимых процессов.

Метод решения задач, не допускающих такого перехода, был предложен недавно Гудерлеем и Армитейджем [11] и независимо — Т. К. Сиразетдиновым [12]. Применение этого метода к задачам настоящей работы позволило получить необходимые условия экстремума, составляющие основу для построения оптимальных контуров. Кроме того, выяснено, что в ряде случаев необходимо допускать разрывы множителей Лагранжа при непрерывных параметрах течения. Показано, что эти разрывы могут иметь место вдоль характеристик и линий тока, получены соотношения на разрывах.

1. Пусть x, y — прямоугольные координаты; в осесимметричном случае ось x направлена по оси симметрии слева направо. За независимые переменные возьмем y и функцию тока ψ , определяемую уравнением

$$d\psi = y^{\nu} \rho^{\nu} (-v dx + u dy)$$

где ρ — плотность, u, v — проекции скорости на оси x и y ; $\nu = 0$ и 1 соответственно в плоском и осесимметричном случае. В принятых переменных течение описывается уравнениями:

$$L_1 \equiv \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial y^{\nu} \rho}{\partial \psi} = 0 \quad (\text{движения}) \quad (1.1)$$

$$L_2 \equiv \frac{\partial (y^{\nu} \rho v)^{-1}}{\partial y} + \frac{\partial (u/v)}{\partial \psi} = 0 \quad (\text{неразрывности}) \quad (1.2)$$

$$L_3 \equiv \rho u \frac{\partial u}{\partial y} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{движения}) \quad (1.3)$$

$$L_4 \equiv \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{u}{v} = 0 \quad (\text{линии тока}) \quad (1.4)$$

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + h = H(\psi) \quad (\text{энергии}) \quad (1.5)$$

Здесь p — давление, h — удельная энтальпия, H — полная энтальпия — известная функция ψ . Пусть термодинамическое состояние газа определяется давлением, температурой T поступательных степеней свободы некоторого компонента газа и n параметрами q_i , связанными с необратимыми процессами ($i = 1, \dots, n$). Ими могут быть концентрации компонентов, энергии различных степеней свободы и т. п. Введем n -мерный вектор $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ и зависимости типа $f(q_1, \dots, q_n)$ будем писать в виде $f(\mathbf{q})$. В силу сказанного, уравнение состояния и выражение для h имеют вид

$$\rho = \rho(p, T, \mathbf{q}, \psi), \quad h = h(p, T, \mathbf{q}, \psi) \quad (1.6)$$

Изменение параметров \mathbf{q} описывается уравнениями

$$\mathbf{L} \equiv \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} - \frac{\boldsymbol{\omega}(p, T, \mathbf{q}, \psi)}{v} = 0 \quad (1.7)$$

где \mathbf{L} и $\boldsymbol{\omega}$ — векторы с компонентами L_i и ω_i ; ω_i — скорость изменения параметра q_i ; правые части (1.6) и ω_i — известные функции p, T, \mathbf{q} и ψ , наличие ψ показывает, что по разным линиям тока могут течь разные газы.

Введем скорость звука c уравнением

$$c^{-2} = \rho_p + \frac{\rho_T}{h_T} \left(\frac{1}{\rho} - h_p \right) \quad (1.8)$$

Здесь

$$\rho_p = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, \mathbf{q}, \psi}, \quad \rho_T = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, \mathbf{q}, \psi}, \quad h_p = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{T, \mathbf{q}, \psi}, \quad h_T = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{p, \mathbf{q}, \psi}$$

Уравнения (1.1) — (1.7) образуют полную систему. При $u^2 + v^2 = w^2 > c^2$ она имеет три семейства действительных характеристик. Это линии тока $\psi = \text{const}$, на которых выполняются уравнения (1.3) — (1.5), и линии Маха, на которых

$$dx \mp \frac{u \sqrt{w^2 - c^2} \mp cv}{y^v \rho c w^2} d\psi = 0 \quad (1.9)$$

$$dy \mp \frac{v \sqrt{w^2 - c^2} \pm cu}{y^v \rho c w^2} d\psi = 0 \quad (1.10)$$

$$u^2 d \frac{v}{u} \pm \frac{\sqrt{w^2 - c^2}}{\rho c} dp + \left\{ \frac{vv}{y} + \left(\rho - \frac{\rho_T h}{h_T} \right) \boldsymbol{\omega} \right\} \frac{d\psi}{y^v \rho} = 0 \quad (1.11)$$

Здесь векторы

$$h = (h_{q_1}, \dots, h_{q_n}), \quad \rho = (\rho_{q_1}, \dots, \rho_{q_n})$$

$$h_{q_i} = \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \right)_{p, T, \psi, q_j \neq q_i}, \quad \rho_{q_i} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \right)_{p, T, \psi, q_j \neq q_i}$$

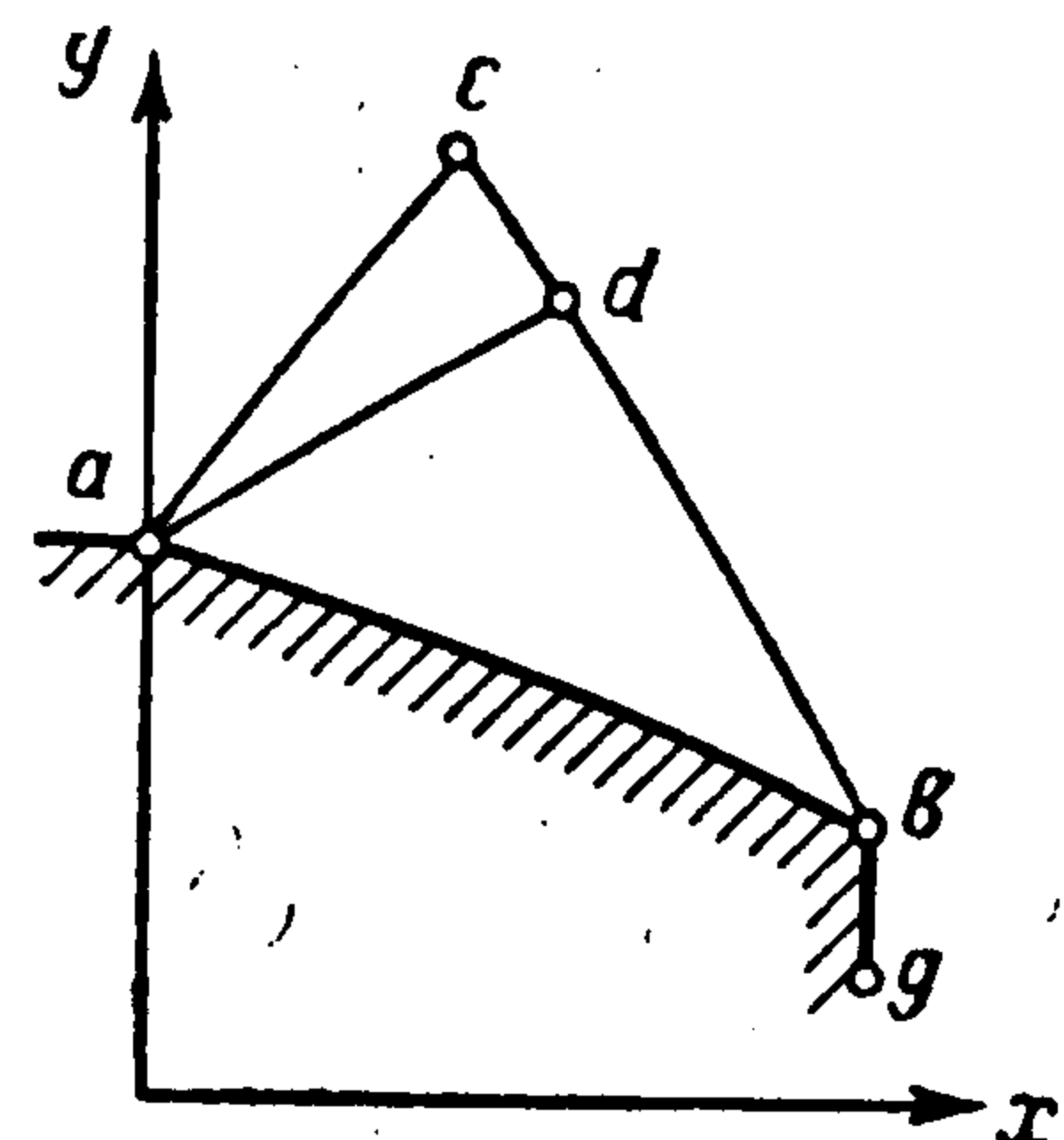
верхний знак относится к характеристикам первого семейства.

Все переменные — безразмерные. Приведение к безразмерному виду достигается делением x и y на l ; скоростей — на w_∞ , плотности — на ρ_∞ ; давления — на $\rho_\infty w_\infty^2$, температуры — на $R^{-1} w_\infty^2$; энтальпии — на w_∞^2 и ψ — на $l^{(v+1)} \rho_\infty w_\infty$, где l, w_∞ и ρ_∞ — величины с размерностями длины, скорости и плотности, R — газовая постоянная некоторого газа. Приведение к безразмерному виду параметров q_i проводится с учетом их размерностей.

2. В рассматриваемой задаче требуется найти необходимые условия, определяющие форму контура ag , который обеспечивает минимум волнового сопротивления (фиг. 1) или максимум тяги (фиг. 2) при заданном течении левее характеристики ac .

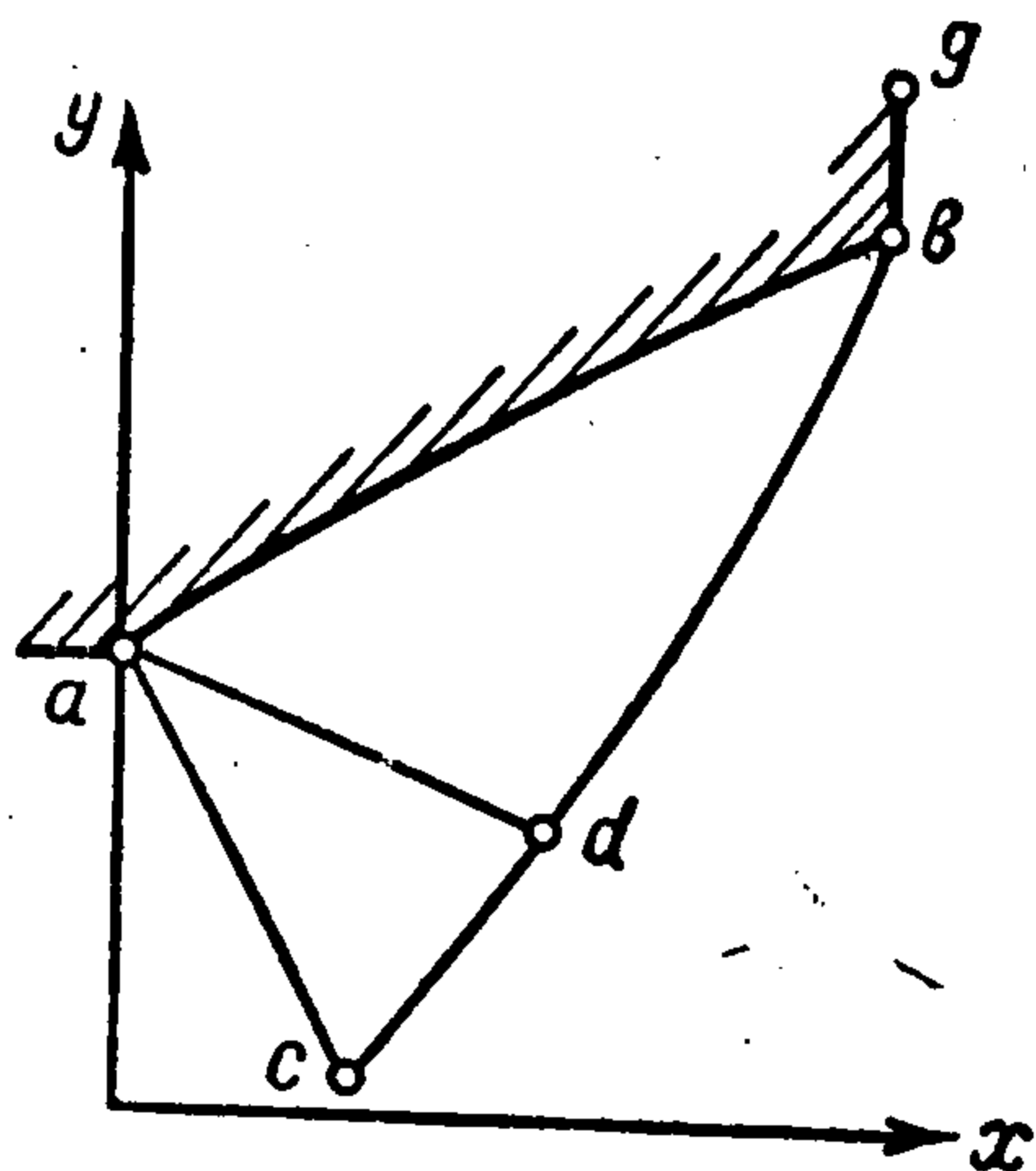
Кроме положения точки a могут фиксироваться длина тела X , площадь боковой поверхности, объем и т. п.

Искомый контур может состоять из участков двустороннего и краевого экстремума. Последние определяются постановкой задачи и границами применимости используемых уравнений. При фиксированной длине это будет отрезок bg прямой $x = X$, где допустимые $\delta x \leq 0$. При заданном поперечном размере Y участком краевого экстремума будет отрезок прямой $y = Y$. В осесимметричном случае и в случае симметричного плоского тела таким участком является и отрезок оси симметрии. Границе применимости уравнений (1.1)–(1.7) без привлечения соотношений на ударной волне соответствует отрезок кривой максимального сжатия [6], такой, что образующаяся при ее обтекании ударная волна начинается на границе области влияния искомого участка тела.



Фиг. 1

Направления заданного контура левее a и контура, определенного из решения вариационной задачи, в общем случае различны. Поэтому в a имеет место обтекание выпуклого угла (случай, когда контур ab обтекается с образованием в a ударной волны, здесь не рассматривается). По техническим соображениям излом в окрестности a может быть запрещен, например, ограничением на $x'' = d^2x / dy^2$. Это также даст некоторый участок краевого экстремума.



Фиг. 2

Из перечисленных участков краевого экстремума рассмотрим только первый и последний, причем исследуем только тот случай, когда параметры в окрестности bg постоянны и не зависят от формы контура ag . С точностью до несущественного множителя волновое сопротивление или тяга

$$\chi = \int_a^b y^v p dy + \int_b^g y^v p_T dy$$

где b — точка сопряжения участка двустороннего экстремума и торца bg ; $p_T = \text{const}$ — давление на торец; точки b и g могут совпадать.

Изопериметрические условия (учитывая, что $u = vx'$) имеем в виде

$$K^j = \int_a^b f^j(y, x, v, p, T, q, x') dy + \int_b^g f^{0j}(y, x, x') dy \quad (j = 1, \dots, m) \quad (2.1)$$

где K^j — заданные константы; f^j и f^{0j} — известные функции; m — число изопериметрических условий; штрихом обозначены производные $(\partial/\partial y)_{\psi=\psi_a}$; индексы a, b, \dots приписаны параметрам в соответствующих точках.

3. Воспользуемся методом Гудерлея — Армтейджа — Сиразетдинова [11, 12]. На поверхности тела параметры течения определяются урав-

нениями (1.5), (1.6) и дифференциальными уравнениями (1.3), (1.4), (1.7) — вдоль ab и (1.1) — (1.3), (1.7) — в области влияния G , ограниченной характеристиками ac и cb и контуром ab . Составим функционал

$$I = \int_a^b (\Phi + \alpha L_3 + \beta L_4 + \gamma L) dy + \int_b^g F dy + \\ + \iint_G (\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_3 L_3 + QL) dy d\psi$$

$$\Phi = \Phi(y, x, v, p, T, \mathbf{q}, x', \lambda) = y^v p + \sum_{j=1}^m \lambda^j f^j(y, x, v, p, T, \mathbf{q}, x')$$

$$F = F(y, x, x', \lambda) = y^v p_T + \sum_{j=1}^m \lambda^j f^{0j}(y, x, x')$$

Здесь $\lambda^1, \dots, \lambda^m$ — постоянные, а $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $\gamma(y)$, $\mu_1(y, \psi)$, $\mu_2(y, \psi)$, $\mu_3(y, \psi)$, $Q(y, \psi)$ — переменные множители Лагранжа, γ и Q — n -мерные векторы. При допустимом варьировании в силу уравнений (1.1) — (1.4), (1.7) и условий (2.1) вариации I и χ совпадают.

Найдем первую вариацию I при отсутствии ограничений на x'' , т. е. при допущении излома контура (фиг. 1 и 2).

В силу (1.5) и (1.6)

$$\delta T = -\frac{u}{h_T} \delta u - \frac{v}{h_T} \delta v - \frac{h_p}{h_T} \delta p - \frac{\mathbf{h}}{h_T} \delta \mathbf{q}$$

Поэтому, если $\zeta = \zeta(p, T, \mathbf{q}, \psi)$, то

$$\delta \zeta = -\frac{\zeta_T u}{h_T} \delta u - \frac{\zeta_T v}{h_T} \delta v + \left(\zeta_p - \frac{\zeta_T h_p}{h_T} \right) \delta p + \left(\zeta - \frac{\zeta_T \mathbf{h}}{h_T} \right) \delta \mathbf{q}$$

Здесь

$$\zeta \equiv \zeta_{\mathbf{q}} = (\zeta_{q_1}, \dots, \zeta_{q_n})$$

$$\zeta_p = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial p} \right)_{T, \mathbf{q}, \psi}, \quad \zeta_T = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial T} \right)_{p, \mathbf{q}, \psi}, \quad \zeta_{q_i} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial q_i} \right)_{p, T, \mathbf{q}_{j \neq i}, \psi}$$

Для исключения появляющихся при варьировании под знаками интегралов вариаций от производных применим формулу интегрирования по частям и соотношение, являющееся следствием формулы Грина,

$$\iint_G \left(N \frac{\partial \delta \xi}{\partial y} + M \frac{\partial \delta \xi}{\partial \psi} \right) dy d\psi = - \iint_G \left(\frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial \psi} \right) \delta \xi dy d\psi + \oint \left(M \frac{d\psi}{dy} - N \right) \delta \xi dy$$

где контурный интеграл взят по непроварьированной границе области влияния в плоскости $y\psi$. Вариация двойного интеграла, связанная с изменением границы G , отсутствует из-за равенства нулю подынтегрального выражения. Вариации же интегралов вдоль ag , связанные с изменением координат b и g , отличны от нуля. Приращения координат этих точек обозначим через Δy и Δx . С точностью до малых более высокого порядка $\delta x = \Delta x - x' \Delta y$.

Пусть ad — замыкающая характеристика пучка волн разрежения. Малые изменения контура ag не влияют на течение в acd . Следовательно, здесь, в том числе на ac и cd , вариации параметров равны нулю. Далее, δx_a исчезает ввиду задания a , вариация δq_a — в силу уравнений (1.7); наконец, δu_a , δv_a и δp_a связаны равенством $(\rho \delta u + \rho v \delta v + \delta p)_a = 0$. Последнее следует из уравнения (1.3), имеющего в a вид: $\rho u \delta u + \rho v \delta v + \delta p = 0$, и того, что здесь $u = u(p)$ и $v = v(p)$, и, следовательно, $\delta u = (du / dp) \delta p$ и $\delta v = (dv / dp) \delta p$.

Учитывая сказанное и используя (1.3), (1.7) и (1.8), найдем

$$\begin{aligned} \delta\chi = \delta I = & \{ \Phi_- - F_+ - (\Phi_{x'} + \beta)_- x'_- + F_{x'_+} x'_+ \}_b \Delta y_b' + (\Phi_{x'_-} + \beta_- - F_{x'_+})_b \Delta x_b + \\ & + \{ \alpha (\rho u \delta u + \rho v \delta v + \delta p) + \gamma \delta q \}_b + F_g \Delta y_g + \\ & + \int_a^b (U^0 \delta x + U^1 \delta u + U^2 \delta v + U^3 \delta p + U \delta q) dy + \int_b^g \{ F_x - (F_x)' \} \delta x dy + \\ & + \int_b^d (V^1 \delta u + V^2 \delta v + V^3 \delta p + V \delta q) dy + \\ & + \iint_{G^0} (W^1 \delta u + W^2 \delta v + W^3 \delta p + W \delta q) dy d\psi \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$(\Phi_{x'} = (\partial\Phi/\partial x')_{y, x, v, p, T, q, \lambda}, \quad F_{x'} = (\partial F/\partial x')_{y, x, \lambda})$$

где G^0 — область adb ; индексы минус и плюс приписаны параметра в точке b до и после излома, U^i, V^i, W^i, U, V и W — известные функции параметров течения и множителей Лагранжа.

4. Рассмотрим различные члены выражения (3.1). Для любого контура ag некоторые из них можно обратить в нули специальным выбором множителей Лагранжа. Определим μ_1, μ_2, μ_3, Q из уравнений $W^1 = 0, W^2 = 0, W^3 = 0, W = 0$, которые представим в виде

$$W^2 - \frac{v}{u} W^1 \equiv \frac{v}{u} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} + \frac{1}{y^v \rho v^2} \frac{\partial \mu_2}{\partial y} + \frac{w^2}{uv^2} \frac{\partial \mu_2}{\partial \psi} + \frac{Q\omega}{v^2} = 0 \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} W^2 - \rho v W^3 \equiv & -y^v \rho v \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi} + \frac{c^2 - v^2}{y^v \rho v^2 c^2} \frac{\partial \mu_2}{\partial y} + \frac{u}{v^2} \frac{\partial \mu_2}{\partial \psi} - \mu_3 \left(\rho - \frac{\rho_T h}{h_T} \right) \omega + \\ & + Q \left\{ \rho \left(\omega_p - \frac{\omega_T h_p}{h_T} \right) + \frac{\omega}{v^2} + \frac{\omega_T}{h_T} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} -W^1 - \frac{v}{u} W^2 \equiv & \frac{\partial \mu_1}{\partial y} - \frac{1}{y^v uv} \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon w^2 \right) \frac{\partial \mu_2}{\partial y} + \frac{\rho w^2}{u} \frac{\partial \mu_3}{\partial y} + \quad \left(\varepsilon = \frac{\rho_T}{\rho^2 h_T} \right) \\ & + \frac{\mu_3 \rho w^2}{u} \left\{ \left(\frac{1}{\rho c^2} - \varepsilon \right) \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\rho - \frac{\rho_T h}{h_T} \right) \frac{\omega}{\rho v} \right\} - \frac{Q}{uv} \left(\omega + \frac{\omega_T w^2}{h_T} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} W \equiv & \frac{1}{y^v \rho^2 v} \left(\rho - \frac{\rho_T h}{h_T} \right) \frac{\partial \mu_2}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\mu_3}{\rho} \left(\rho - \frac{\rho_T h}{h_T} \right) \frac{\partial p}{\partial y} + \\ & + \frac{(Q \cdot \omega_T) h}{v h_T} - (Q \cdot \omega)_q v^{-1} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Система (4.1) — (4.4) того же типа, что и система уравнений течения. Она эллиптична при $w < c$ и гиперболична при $w > c$. При $w > c$ имеется три семейства действительных характеристик, совпадающих с характеристиками уравнений (1.1) — (1.7). Вдоль линий тока выполняются уравнения (4.3) и (4.4), а вдоль линий Маха

$$\begin{aligned} d\mu_1 \pm \frac{\sqrt{w^2 - c^2}}{y^v \rho v^2 c} d\mu_2 + \left\{ \mu_3 \rho \omega \left(\rho - \frac{\rho_T h}{h_T} \right) - Q \omega_T h_T^{-1} + \right. \\ \left. + Q \left(\omega_p - \frac{\omega_T h_p}{h_T} \right) \rho \right\} \frac{d\psi}{y^v \rho v} + \frac{Q\omega}{v^2} dx = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

где верхний знак соответствует характеристикам первого семейства.

Получим граничные условия на характеристике db и контуре ab . Приравнявая на db коэффициенты перед δu , δv и δq нулю, получим

$$\mu_1 \pm \frac{\sqrt{w^2 - c^2}}{y^\nu \rho v^2 c} \mu_2 = 0 \quad (4.6)$$

$$\mu_1 + \mu_2 \left(\epsilon u y^{-\nu} - \frac{dy}{d\psi} \right) v^{-1} + \mu_3 \rho u = 0 \quad (4.7)$$

$$\mu_2 \left(\rho - \frac{\rho_T h}{h_T} \right) - Q y^\nu \rho^2 v = 0 \quad (4.8)$$

Здесь и ниже, если не оговорено особо, верхние знаки относятся к внешней задаче (фиг. 1), а нижние — к внутренней (фиг. 2); $dy/d\psi$ на db определяется по (1.10). Выполнение (4.6) и (4.7) на db приводит в силу (1.10) к обращению в нуль и коэффициента V^3 . Граничное условие на ab найдем из рассмотрения коэффициентов U^1 , U^2 , U^3 , U . Определим на ab множители α , β , γ и μ_1 из уравнений $U^1 = 0$, $U^2 = 0$, $U^3 = 0$, $U = 0$, которые с учетом выражений для U^i и U можно представить в виде:

$$-U \equiv \gamma' - \Phi_q + \frac{\Phi_T h}{h_T} + \frac{\alpha}{\rho} \left(\rho - \frac{\rho_T h}{h_T} \right) \rho' + \frac{1}{v} (\gamma \cdot \omega)_q - \frac{(\gamma \cdot \omega_T) h}{h_T v} = 0$$

$$- \frac{u}{v} U^1 - U^2 \equiv \frac{w^2}{v} (\alpha \rho)' - \Phi_v + \quad (4.9)$$

$$+ \frac{w^2}{h_T v} (\Phi_T - \alpha \rho_T \rho^{-1} \rho' - \gamma \omega_T v^{-1}) - \gamma \omega v^{-2} = 0 \quad (4.10)$$

$$U^3 \equiv \pm y^\nu \mu_1 + \Phi_p - \frac{v \Phi_v}{\rho w^2} + \frac{\Phi_T}{h_T} \left(\frac{1}{\rho} - h_p \right) + \frac{\alpha \omega}{\rho v} \left(\rho - \frac{\rho_T h}{h_T} \right) -$$

$$- \frac{\gamma}{v} \left\{ \frac{\omega}{\rho w^2} + \omega_p + \frac{\omega_T}{h_T} \left(\frac{1}{\rho} - h_p \right) \right\} = 0 \quad (4.11)$$

$$u U^2 - v U^1 \equiv u \Phi_v + \gamma \omega u v^{-2} + \frac{w^2}{v^2} (\beta \pm \mu_2) = 0 \quad (4.12)$$

$$\Phi_v = (\partial \Phi / \partial v)_{y, x, p, T, q, x', \lambda}$$

$$\Phi_p = (\partial \Phi / \partial p)_{y, x, v, T, q, x', \lambda}$$

$$\Phi_T = (\partial \Phi / \partial T)_{y, x, v, p, q, x', \lambda}$$

$$\Phi_{q_i} = (\partial \Phi / \partial q_i)_{y, x, v, p, T, q_j + q_i, x', \lambda}$$

Здесь U^3 преобразовано с учетом (4.10). Начальными условиями для интегрирования (4.9) и (4.10) возьмем

$$\alpha_b = 0, \quad \gamma_b = 0 \quad (4.13)$$

Итак, для любого гладкого контура ab множители α , β , γ , μ_1 , μ_2 , μ_3 , Q можно выбрать так, чтобы обратить в нуль коэффициенты U^i , V^i , W^i ($i = 1, 2, 3$), U , V , W , α_b , γ_b в (3.1). Действительно, для этого требуется выполнение соотношений (4.1)–(4.13). Для любого контура ab течение в acb может быть рассчитано, например, методом характеристик и, следовательно, известно. При известных параметрах течения α и γ на ab определяются уравнениями (4.9) и (4.10) и условиями (4.13). Затем по (4.11) на ab находится μ_1 , в частности, μ_{1b} , а по (4.5)–(4.8) с использованием μ_{1b} — значения μ_1 , μ_2 , μ_3 , Q на db . Знание этих величин на характеристике db и μ_1 на контуре ab позволяет при помощи уравнений (4.1)–(4.4) или эквивалентных им уравнений (4.3)–(4.5) найти μ_1 , μ_2 , μ_3 , Q в области G° . Наконец, множитель β на ab определяется уравнением (4.12). Ясно, что найденные таким образом множители Лагранжа зависят от формы контура ab .

5. Если ab содержит излом (фиг. 3), то непрерывными в G множителями Лагранжа нельзя удовлетворить всем полученным условиям. Действительно, μ_1, μ_2, μ_3, Q на характеристике ke находятся по условиям на kb и db , причем найденное таким образом значение μ_{1k} слева от излома в общем случае не будет удовлетворять уравнению (4.11). Следовательно, необходимо допустить возможность линий разрыва множителей Лагранжа при непрерывных параметрах течения.

Пусть l — такая линия. При варьировании I область G разобьем на области непрерывности множителей Лагранжа. В этих областях и на границах ab и db функции μ_1, μ_2, μ_3, Q определяются по-прежнему, т. е. выполняются уравнения (4.1) — (4.13). Пусть $[\varphi]$ — скачок φ на l . Поскольку параметры течения и их вариации на l непрерывны, то в выражении (3.1) появится дополнительный интеграл

$$\int_l \left(S^1 \delta u + S^2 \delta v + S^3 \delta p + S \frac{d\psi}{dy} \delta q \right) dy$$

где S^1, S^2, S^3, S — линейные однородные функции $[\mu_1], [\mu_2], [\mu_3]$ и $[Q]$, зависящие также от параметров течения и $d\psi/dy$ на l . Определим $[\mu_1], [\mu_2], [\mu_3], [Q]$ так, чтобы на l выполнялись условия

$$S^1 = 0, \quad S^2 = 0, \quad S^3 = 0, \quad S \frac{d\psi}{dy} = 0 \quad (5.1)$$

Если l — не линия тока и не характеристика, то это дает $(n + 3)$ линейно независимых линейных однородных уравнения относительно $(n + 3)$ неизвестных $[\mu_1], [\mu_2], [\mu_3], [Q]$. Следовательно, в этом случае имеем

$$[\mu_1] = [\mu_2] = [\mu_3] = 0, \quad [Q] = 0$$

т. е. разрыв отсутствует.

Если l — характеристика, то S^3 — линейная комбинация S^1 и S^2 , и условия (5.1) дают

$$[\mu_1] \mp [\mu_2] \frac{\sqrt{w^2 - c^2}}{y^v \rho v^2 c} = 0 \quad (5.2)$$

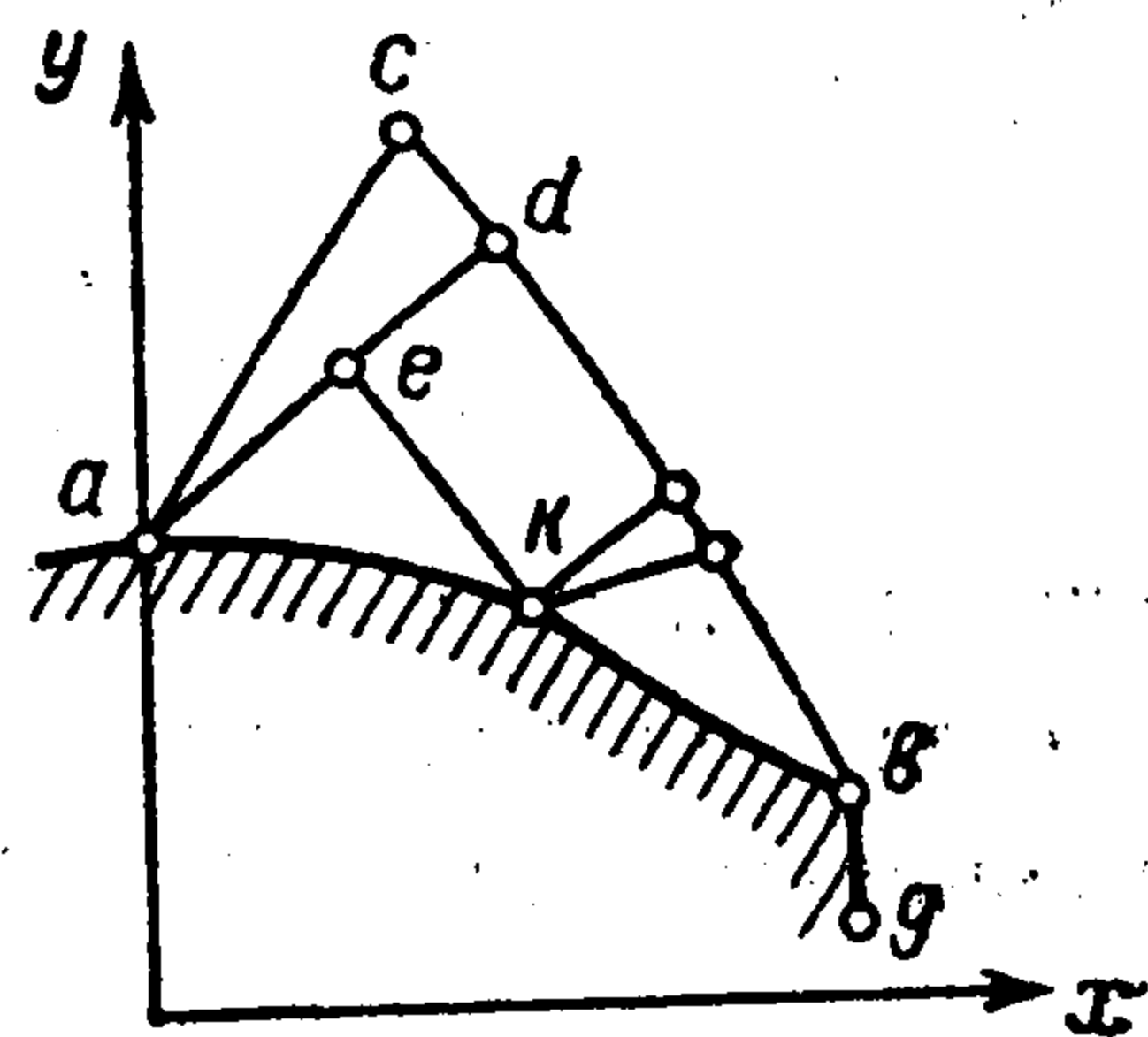
$$[\mu_1] + [\mu_2] \left(\epsilon u y^{-v} - \frac{dy}{d\psi} \right) v^{-1} + [\mu_3] \rho u = 0 \quad (5.3)$$

$$[\mu_2] \left(\rho - \frac{\rho_T h}{h_T} \right) - [Q] y^v \rho^2 v = 0 \quad (5.4)$$

Далее, так как (4.5) выполняется с каждой стороны характеристики, то

$$d[\mu_1] \pm \frac{\sqrt{w^2 - c^2}}{y^v \rho v^2 c} d[\mu_2] + \left\{ [\mu_3] \rho \omega \left(\rho - \frac{\rho_T h}{h_T} \right) - [Q] \omega_T h_T^{-1} - [Q] \left(\omega_p - \frac{\omega_T h_p}{h_T} \right) \rho \right\} \frac{d\psi}{y^v \rho v} + [Q] \omega v^{-2} dx = 0 \quad (5.5)$$

Здесь и в (5.2) верхний знак соответствует характеристике первого семейства; $dy/d\psi$ в (5.3) определяется по (1.10). Уравнения (5.2) — (5.5) определяют скачки всех величин на данной характеристике по скачку одной из них в некоторой точке. В силу линейности и однородности (5.2) — (5.5) все множители Лагранжа или непрерывны или разрывны на всей характеристике.



Фиг. 3

Если l — линия тока, то $d\psi/dy = 0$, и, кроме того, S^3 — линейная комбинация S^1 и S^2 . В итоге получаем

$$[\mu_1] = [\mu_2] = 0 \quad (5.6)$$

Из этого условия и уравнений (4.3) и (4.4)

$$\frac{\partial [\mu_3]}{\partial y} + [\mu_3] \left\{ \left(\frac{1}{\rho c^2} - \varepsilon \right) \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\rho - \frac{\rho_T h}{h_T} \right) \frac{\omega}{\rho v} \right\} - \frac{[Q]}{\rho v} \left(\frac{\omega}{w^2} + \frac{\omega_T}{h_T} \right) = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial [Q]}{\partial y} + \frac{[\mu_3]}{\rho} \left(\rho - \frac{\rho_T h}{h_T} \right) \frac{\partial p}{\partial y} - ([Q] \cdot \omega_T) \frac{h}{v h_T} + ([Q] \cdot \omega)_q v^{-1} = 0 \quad (5.8)$$

Эти уравнения также линейны и однородны, следовательно, если хотя бы в одной точке линии тока $[\mu_3] = 0$ и $[Q] = 0$, то это условие выполняется на всей линии тока.

Итак, введение разрывов позволяет удовлетворить всем условиям предыдущего раздела. В частности, в случае, приведенном на фиг. 3, линией разрыва будет характеристика ke .

Выше предполагалась непрерывность параметров течения. Разрывы параметров течения, например ударные волны, будут разрывами и множителей Лагранжа. При получении соотношений на таких разрывах требуется учет связей между вариациями параметров течения с разных сторон разрыва.

6. В соответствии с выбором множителей Лагранжа выражение для $\delta\chi$ станет

$$\delta\chi = \delta I = [\Phi_- - F_+ - (\Phi_{x'} + \beta)_- x'_-]_b \Delta y_b + (\Phi_{x'_-} + \beta_- - F_{x'_+})_b \Delta x_b + F_g \Delta y_g + \int_a^b U^\circ \delta x dy + \int_b^g \{F_x - (F_{x'})'\} \delta x dy \quad (6.1)$$

где, в отличие от (3.1), все вариации независимы.

На участке двустороннего экстремума ab вариации x произвольны, следовательно, необходимое условие экстремума имеет вид

$$U^\circ \equiv \Phi_x - (\beta + \Phi_{x'})' = 0 \quad (\Phi_x = (\partial\Phi/\partial x)_{y, v, p, T, q, x', \lambda}) \quad (6.2)$$

При свободной длине торец отсутствует, и в выражении (6.1) остаются только два первых слагаемых, причем без F_+ и $F_{x'_+}$. Длина контура ввиду произвольности Δx_b определится условием

$$(\Phi_{x'} + \beta)_{b_-} = 0 \quad (6.3)$$

а ордината $y_b \equiv y_g$ или задана, или находится из условия

$$\{\Phi - (\Phi_{x'} + \beta) x'\}_{b_-} = 0 \quad (6.4)$$

При ограниченной длине торец также может отсутствовать. Ордината y_b по-прежнему или задана, или определяется по (6.4). В первом случае допустимы $\Delta y_b \geq 0$ (верхний знак относится к внешней задаче), и необходимым условием минимума сопротивления или максимума тяги будет

$$\{\Phi_- - F_+ - (\Phi_{x'} + \beta)_- x'_-\}_b \geq 0 \quad (6.5)$$

При наличии торца y_b находится из условия (6.5) при знаке равенства, а при свободном поперечном размере ордината y_g — из условия

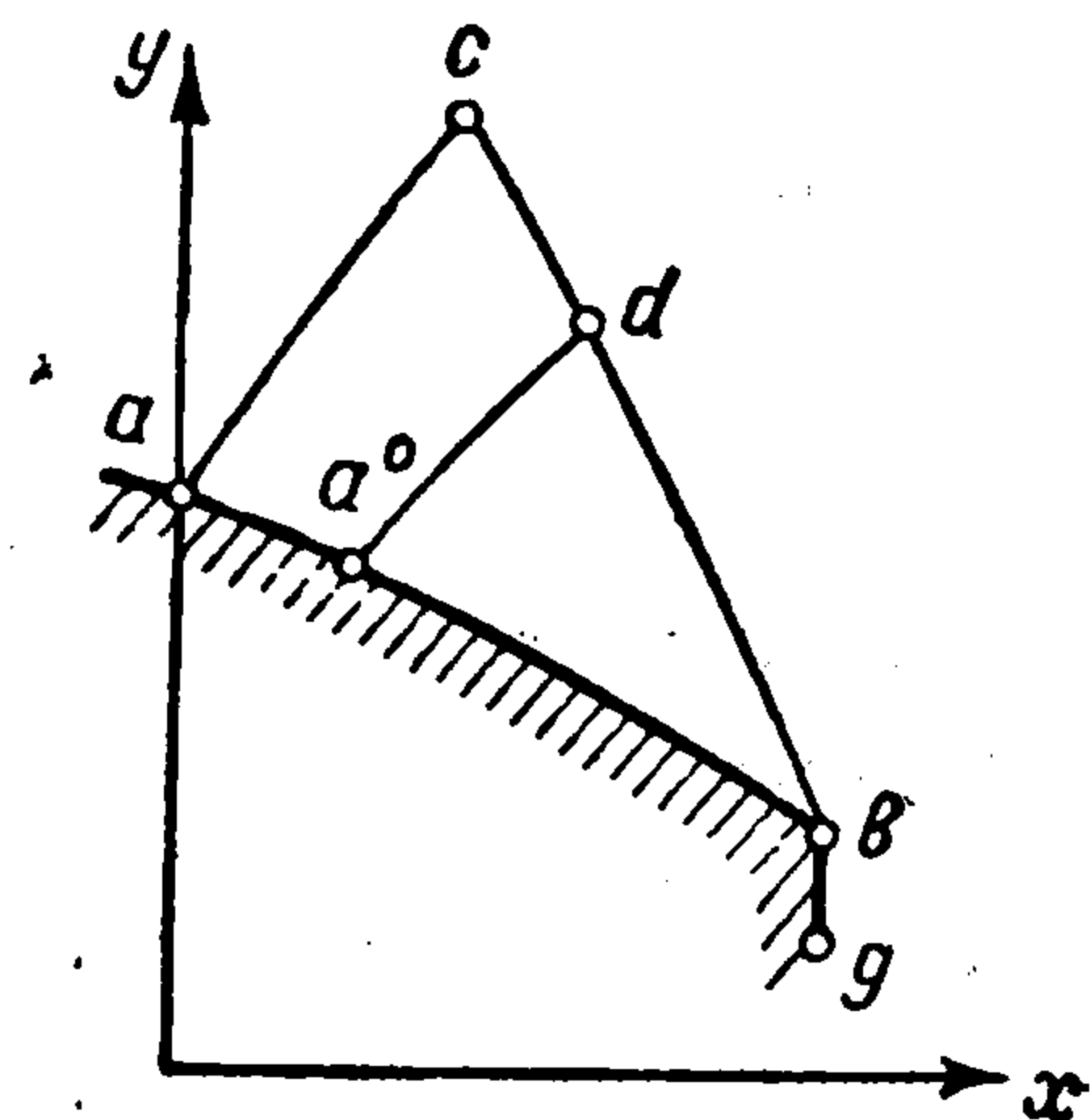
$$F_g = 0 \quad (6.6)$$

Кроме того, в этом случае Δx_b и δx на bg отрицательны. Следовательно, необходимыми условиями краевого экстремума будут

$$(\Phi_{x'_-} + \beta_- - F_{x'_+})_b \leq 0 \quad (6.7)$$

$$F_x - (F_{x'})' \geq 0 \quad \text{на } bg \quad (6.8)$$

Полученные соотношения составляют систему необходимых условий, определяющих форму оптимального контура. Произвол в выборе характеристики ad позволяет строить контур требуемой длины, а подбор постоянных множителей Лагранжа — удовлетворять условиям (2.1).



Фиг. 4

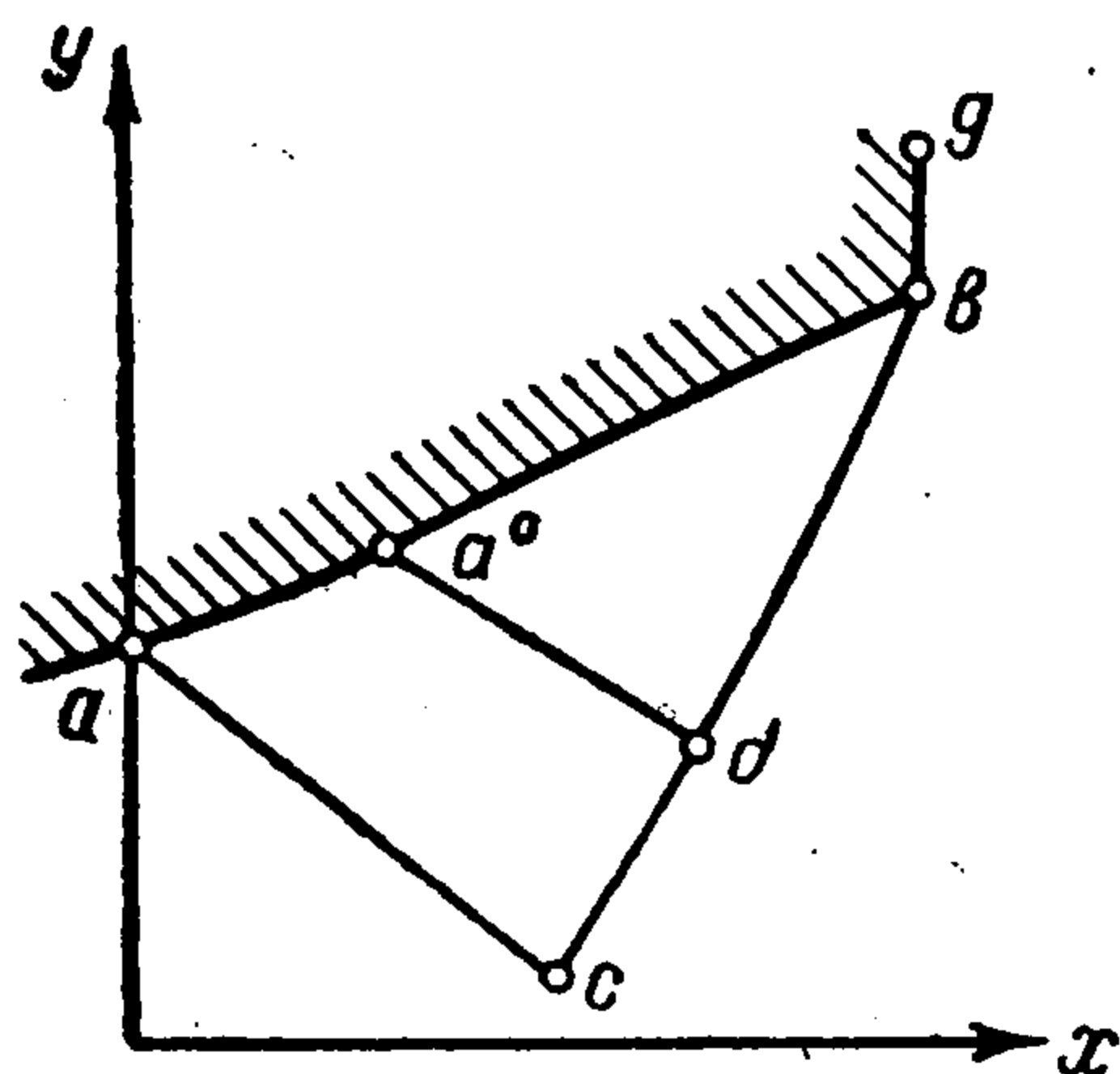
Уравнения (4.6) — (4.8), (4.11) и (4.12), записанные в b , и условия (4.13) позволяют выразить μ_{1b} , μ_{2b} , μ_{3b} , Q_b и β_b через параметры течения, y и x в b . В частности,

$$\beta_b = \left(\mp \frac{\rho v^2 c}{\sqrt{w^2 - c^2}} \left\{ \Phi_p - \frac{v \Phi_v}{\rho w^2} + \frac{\Phi_T}{h_T} \left(\frac{1}{\rho} - h_p \right) \right\} - \frac{u v^2}{w^2} \Phi_v \right)_b$$

Подстановка этого выражения в (6.3) — (6.5) и (6.7) приводит к соотношениям, которым должны для оптимального контура удовлетворять в b параметры потока, y и x . Например, при отсутствии изопериметрических условий (6.5) дает условие Буземана [1]. Наличие необратимых процессов сказывается на этих соотношениях через вид производных по p и T . Те же соотношения можно получить и иначе, если учесть, что для оптимального контура конечной элемент контура ab и торец также оптимальны.

7. Если на x'' в окрестности a наложено ограничение

$$|x''| \leq K(y) \quad (7.1)$$



Фиг. 5

где $K(y)$ — заданная функция, то вместо излома в a имеется участок краевого экстремума aa°

$$x'' = \pm K(y) \operatorname{sign} x \quad (7.2)$$

плавно сопрягающийся с участком двустороннего экстремума $a^\circ b$. Теперь (фиг. 4 и 5) вариации параметров могут отличаться от нуля во всей области G . Поэтому потребуем, чтобы (4.1) — (4.5) выполнялись также во всей области G , а (4.6) — (4.8) — на всей характеристике cb . Однако необходимое условие двустороннего экстремума (6.2) выполняется теперь лишь на $a^\circ b$. Остальные соотношения выполняются без изменений.

В итоге получим

$$\delta \chi = \int_a^{a^\circ} U^\circ \delta x dy$$

Проварьлируем x'' только на участке mn правее точки m на aa° , и пусть $\max |\delta x''|$ и $|y_m - y_n|$ — малые одного порядка. С точностью до величин более высокого порядка

$$\delta\chi = \left(\int_m^{a^\circ} (y - y_m) U^\circ dy \right) \int_m^n \delta x'' dy$$

Согласно (7.1) и (7.2) при допустимых $\delta x''$

$$\int_m^n \delta x'' dy \leq 0$$

Следовательно, условие того, что aa° — участок краевого экстремума, имеет вид

$$\int_m^{a^\circ} (y - y_m) U^\circ dy \leq 0 \quad (7.3)$$

для любой точки m на aa° . Отметим, что достаточным условием выполнения этого неравенства будет

$$U^\circ \equiv \Phi_x - (\Phi_{x'} + \beta)' \leq 0 \quad \text{на } aa^\circ \quad (7.4)$$

8. Условия, определяющие оптимальный контур при равновесном и замороженном течениях, получаются из соотношений, найденных выше, если учесть, что в этих случаях отсутствуют параметры q , изменяющиеся в соответствии с уравнениями (1.7). Итак, для получения указанных условий достаточно опустить уравнения (4.7) и (4.9) и члены, содержащие ρ , h , ω , Q и γ , в остальных соотношениях. Кроме того, отпадает необходимость в уравнениях, содержащих μ_3 и α , так как оказывается, что в этом случае μ_1 , μ_2 , β и форма контура не зависят от μ_3 и α .

Теперь для решения задачи используются следующие уравнения и условия: уравнения (1.3), (1.5), (1.7) — (1.10)

$$u^2 d \frac{v}{u} \pm \frac{\sqrt{w^2 - c^2}}{\rho c} dp + \frac{v v}{y^{v+1} \rho} d\psi = 0 \quad (8.1)$$

$$d\mu_1 \pm \frac{\sqrt{w^2 - c^2}}{y^v \rho v^2 c} d\mu_2 = 0 \quad (8.2)$$

где верхний знак соответствует характеристикам первого семейства, — в поле течения; условие (4.6) — на замыкающей характеристике и уравнения

$$\pm y^v \mu_1 + \Phi_\rho - \frac{v \Phi_v}{\rho w^2} + \frac{\Phi_T}{h_T} \left(\frac{1}{\rho} - h_p \right) = 0 \quad (8.3)$$

$$u \Phi_v + \frac{w^2}{v^2} (\beta \pm \mu_2) = 0 \quad (8.4)$$

и (1.4) — на ab . Соотношения (6.2) — на участке двустороннего экстремума, (6.3) — (6.5) и (6.7) — в точке b , (6.6) — в точке g , (6.8) — на bg и (7.2), (7.3), (7.4) — на aa° остаются без изменений. Кроме того,

$$\rho = \rho(p, T, \psi), \quad h = h(p, T, \psi)$$

Без труда могут быть получены и соотношения на разрывах.

Дальнейшие упрощения связаны с видом изопериметрических условий. Если в них не входят p , T и v , то на ab

$$\mu_1 = \mp 1, \quad \mu_2 = \mp \beta \quad (8.5)$$

При отсутствии изопериметрических условий из (6.2)

$$\beta = \beta_b = \text{const} \quad (8.6)$$

Так как в этом случае [6] экстремали — все линии тока в adb или в $a^\circ db$, то (8.5) и (8.6) выполняются всюду в adb или в $a^\circ db$. Отсюда легко найти решения, полученные ранее переходом к контрольному контуру.

При плоском течении задача существенно упрощается, если на ac параметры потока постоянны. Так как при этом тем же свойством обладают все характеристики того же семейства, что и ac , то из (4.6), (8.2) — (8.4) на участке двустороннего экстремума

$$\Phi_x - \left(\Phi_{x'} - \frac{uv^2}{w^2} \Phi_v \mp \left\{ \Phi_p - \frac{v\Phi_v}{\rho w^2} + \frac{\Phi_T}{h_T} \left(\frac{1}{\rho} - h_p \right) \right\} \frac{\rho c v^2}{\sqrt{w^2 - c^2}} \right)' = 0 \quad (8.7)$$

Этот результат получается и обычными методами вариационного исчисления, так как в данном течении параметры на ab зависят только от x' . Из (8.7) видно, что, если Φ не зависит от x и y , то участок двустороннего экстремума — прямолинейный.

Полученные условия составляют основу для построения оптимального контура с применением численных методов. Для отработки и проверки этих методов можно использовать простые решения, приведенные выше.

Поступила 23 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. G u d e r l e y G., H a n t s c h E. Beste Formen für achsensymmetrische Überschallschubdüsen. Zeitschrift für Flugwissenschaften, 1955, Н. 9, 3, 305—313, Русск. пер., сб. «Механика», ИЛ, 1956, № 4 (38), стр. 53—69.
2. R a o G. V. R. Exhaust nozzle contour for optimum thrust. Jet Propulsion, 1958, v. 28, No 6.
3. С т е р н и н Л. Е. К расчету осесимметричного реактивного сопла наименьшего веса. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
4. G u d e r l e y G. On Rao's method for the computation of exhaust nozzles. Zeitschrift für Flugwissenschaften, 1959, Н. 12, 7.
5. R a o G. V. R. Spike nozzle contour for optimum thrust. Planetary and Space Science, 1961, No 4, 92—101.
6. Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. Вычисл. центра АН СССР, 1963.
7. Б о р и с о в В. М. Об оптимальной форме тел в сверхзвуковом потоке газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 4.
8. Ш и п и л и н А. В. Область разрывных решений вариационных задач газовой динамики. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
9. К р а й к о А. Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. Тр. Вычисл. центра АН СССР, 1963.
10. Н и к о л ь с к и й А. А. О телах вращения с протоком, обладающих наименьшим волновым сопротивлением в сверхзвуковом потоке. Сб. теорет. работ по аэродинамике. Оборонгиз, 1957.
11. G u d e r l e y K. G., A r m i t a g e J. V. A general method for the determination of best supersonic rocket nozzles. Paper presented at the Symposium on extremal problems in aerodynamics. Boeing Scientific Research Laboratories, Flight Science Laboratory, Seattle, Washington, December 3—4, 1962. Русск. пер. в сб. «Механика», ИЛ, 1963, № 6, стр. 85—101.
12. С и р а з е т д и н о в Т. К. Оптимальные задачи газодинамики. Изв. высш. учебн. завед. Авиационная техника, 1963, № 2.