Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ОБТЕКАНИЕ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

С. В. Валькович, И. А. Чернов

(Саратов)

В работе [1] численными методами была решена автомодельная задача об осесимметричном околозвуковом потоке вдали от произвольного тела. Авторы высказали предположение, что этому решению соответствует показатель автомодельности, равный $^4/_7$. В настоящей работе найдено частное семейство автомодельных решений, алгебраических на плоскости s, t как для плоского, так и для осесимметричного потока, и определены соответствующие им показатели автомодельности. Среди данного семейства содержится и решение Гудерлея—Йосихары. Теоретически доказано, что показатель автомодельности этого решения равен $^4/_7$.

1. Приближенное уравнение для потенциала скоростей возмущения Φ в случае плоского и осесимметричного околозвукового потока может быть записано в виде

$$-(\varkappa+1)\,\Phi_x\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\omega\,\frac{\Phi_y}{y}=0 \qquad (\Phi_x=u,\ \Phi_y=v) \tag{1.1}$$

Здесь u и v — проекции скорости возмущения основного звукового потока на оси прямоугольной системы координат, $\omega=0$ для плоского потока и $\omega=1$ для осесимметричного потока.

Рассмотрим автомодельные решения уравнения (1.1) вида

$$\Phi=y^{3n-2}f(\zeta) \qquad \left(\zeta=\frac{x}{(\varkappa+1)^{1/3}\,y^n}\right) \tag{1.2}$$

Здесь n — показатель автомодельности. Для определения $f(\zeta)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f''(n^2\zeta^2-f')-n(5n-5+\omega)\,\zeta f'+(3n-2)(3n-3+\omega)\,f=0 \tag{1.3}$$

Введением переменных Гудерлея

$$s=f\zeta^{-3}, \qquad t=f'\zeta^{-2} \tag{1.4}$$

оно приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{ds}{dt}=\frac{(n^2-t)(t-3s)}{2t^2+B_1t-B_2s} \qquad \left(\begin{array}{l}B_1=3n^2-5n+n\omega\\ B_2=(3n-2)(3n-3+\omega)\end{array}\right) \tag{1.5}$$

В конечной части плоскости уравнение (1.5) имеет три особые точки [1]

$$A\,(s=0,\ t=0), \qquad C\left(\frac{n^3(5n-5+\omega)}{(3n-2)(3n-3+\omega)},\ n^2\right), \qquad D\left(s=\frac{3-\omega}{9},\ t=\frac{3-\omega}{3}\right)$$

Если интегральная кривая $t=t(s)$ уравнения (1.5) определена, то ζ находится по формуле [1]

$$\ln C\zeta=\int\frac{ds}{t-3s} \tag{1.6}$$

Составляющие скорости u, v определяются по формулам

$$\begin{aligned} u &= \Phi_x = (\varkappa + 1)^{-1/3} y^{2n-2} f'(\zeta) = (\varkappa + 1)^{-1/3} y^{2n-2}\zeta^2 t \\ v &= \Phi_y = y^{3n-3}[(3n-2)f - n\zeta f'] = y^{3n-3}\zeta^3 [(3n-2)s - nt] \end{aligned} \tag{1.7}$$

2. Будем разыскивать частное семейство решений уравнения вида

$$s = a + bt \pm \sqrt{1 + ct}\,(d + gt) \tag{2.1}$$

Анализируя результаты работ [2,3], легко показать, что при $n = 2$ как в плоском, так и в осесимметричном случае существуют решения вида (2.1), описывающие аналитические течения в соплах Лаваля.

Подставим функцию (2.1) в уравнение (1.5). Приравнивая коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях t, получим следующую систему алгебраических равенств:

$$-B_2acd - 2B_2ag - 2B_2bd + 6n^2 d = 0 \tag{2.2}$$

$$cd(B_1 + 6n^2) + (2B_1 + 6n^2)g - 3B_2 bcd - 4B_2 bg - 3B_2acg - 6d = 0 \tag{2.3}$$

$$(3B_1 + 6n^2)cg - 5B_2bcg - 2g - 4cd = 0 \tag{2.4}$$

$$-3B_2cg^2 - 2b + 2 = 0 \tag{2.5}$$

$$(2B_1 + 6n^2)\,b - 4B_2cgd - 2B_2b^2 - 2B_2g^2 - 2n^2 - 6a = 0 \tag{2.6}$$

$$-2B_2ab - B_2cd^2 - 2B_2gd + 6n^2a = 0 \tag{2.7}$$

Равенства (2.2) — (2.7) представляют собой систему шести алгебраических уравнений для определения неизвестных: a, b, c, d, g, n. В общем случае ее легко свести к системе трех уравнений с тремя неизвестными.

Используя (2.6), определим a

$$a = b\left(\tfrac{1}{3}B_1 + n^2\right) - \tfrac{2}{3}B_2\,cgd - \tfrac{1}{3}B_2b^2 - \tfrac{1}{3}B_2g^2 - \tfrac{1}{3}n^2 \tag{2.8}$$

Выразим b из (2.5)

$$b = 1 - \tfrac{3}{2}B_2\,cg^2 \tag{2.9}$$

Из уравнения (2.4) с использованием (2.9) определим d

$$d = g\left[\tfrac{3}{4}B_1 + \tfrac{2}{3}n^2 - \tfrac{5}{4}B_2 - \tfrac{1}{2}c^{-1}\right] + \tfrac{15}{8}B_2^2\,cg^3 \tag{2.10}$$

Подставляя найденные значения a, b, d в равенства (2.2), (2.3), (2.7), получим систему трех уравнений для определения c, g, n. Однако эта система имеет весьма громоздкий вид и непосредственное ее решение затруднительно.

3. Рассмотрим сначала решения вида (2.1), проходящие через особую точку A, которая является узлом интегральных кривых уравнения (1.5), с угловым наклоном

$$\frac{ds}{dt} = \frac{n}{3n-2} \tag{3.1}$$

Известно [1], что особая точка A изображает в переменных s, t ось x физической плоскости. Условие (3.1) для решений вида (2.1) означает важное свойство симметричности течения относительно оси x в случае $\omega = 0$ и отсутствия на этой оси особенностей типа источников в случае $\omega = 1$.

Для таких решений можно записать два дополнительных условия

$$d = -a, \qquad b = \frac{n}{3n-2} + \frac{ca}{2} - g \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в уравнения (2.2) — (2.7), получим систему четырех уравнений для определения a, c, g, n, решение которой при условии, что $a \neq 0$, $g \neq 0$, имеет вид

$$\begin{gathered} g = \frac{4n\omega - 12n \pm \sqrt{720n^3 - 1476n^2 + 720n - 48n^3\omega + 308n^2\omega - 272n\omega}}{12B_2} \\ a = \frac{60n^3 - 4n^3\omega - 138n^2 + {}^{94}/_3\, n^2\omega + 60n - {}^{68}/_3\, n\omega}{12B_2} \\ b = \frac{6n^2 - 3n + n\omega}{2B_2}, \qquad c = \frac{12n^2 - 27n + 5n\omega + 12 - 4\omega}{3B_2{}^2 g^2} \end{gathered} \tag{3.3}$$

Окончательно можно получить уравнение для определения показателя автомодельности n.

В случае плоского потока ($\omega = 0$) будем иметь

$$\pm\sqrt{20n^3 - 41n^2 + 20n}\,(2n^2 - 41n + 20) - 80n^4 + 304n^3 - 447n^2 + 304n - 80 = 0 \tag{3.4}$$

Освобождаясь от иррациональности, получим

$$\begin{gathered} 3200n^8 - 28320n^7 + 106568n^6 - 222638n^5 + 282381n^4 - \\ - 222638n^3 + 106568n^2 - 28320n + 3200 = 0 \end{gathered} \tag{3.5}$$

Находим корни

$$n_1 = 2, \quad n_2 = n_3 = \frac{4}{5}, \quad n_4 = n_5 = \frac{5}{4}, \quad n_6 = \frac{1}{2}, \quad n_7 = \frac{9+\sqrt{17}}{8}, \quad n_8 = \frac{9-\sqrt{17}}{8}$$

Корни n_7 и n_8 должны быть отброшены — им соответствуют решения с $g = 0$, которые не удовлетворяют основной системе (2.2) — (2.7).

В случае осесимметричного потока ($\omega = 1$) уравнение, определяющее показатель автомодельности, имеет вид

$$\pm\sqrt{42n^3 - 73n^2 + 28n}\,(42n^2 - 73n + 28) - 252n^4 + 816n^3 - 993n^2 + 544n - 112 = 0 \tag{3.6}$$

Освобождаясь от иррациональности, получим

$$\begin{gathered} 31752n^8 - 242676n^7 + 776322n^6 - 1357191n^5 + 1417205n^4 - \\ - 904794n^3 + 345032n^2 - 71904n + 6272 = 0 \end{gathered} \tag{3.7}$$

Находим корни

$$n_1 = 2, \quad n_2 = \frac{1}{3}, \quad n_3 = n_4 = \frac{4}{7}, \quad n_5 = \frac{4}{3}, \quad n_6 = n_7 = \frac{7}{6}, \quad n_8 = \frac{1}{2}$$

Корни n_5 и n_8 должны быть отброшены.

4. Используя найденные значения n для нахождения коэффициентов a, b, c, d, g по соотношениям (3.3) и (3.7), получим следующую систему решений:

в плоском случае ($\omega = 0$)

$$n = 2, \qquad s = \frac{1}{3} + \frac{3}{4}t \pm \sqrt{1+2t}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{12}t\right), \qquad t > -\frac{1}{2} \tag{4.1}$$

$$n = \frac{4}{5}, \qquad s = \frac{10}{3} - 3t \pm \frac{10}{3}\sqrt{(1-t)^3}, \qquad t < 1 \tag{4.2}$$

$$n = \frac{5}{4}, \qquad s = -\frac{125}{84} + \frac{15}{7}t \pm \frac{25}{84}\sqrt{\left(1 - \frac{16}{25}t\right)^3}, \qquad t < \frac{25}{16} \tag{4.3}$$

$$n = \frac{1}{2}, \qquad s = \frac{1}{3} \pm \sqrt{1 + \frac{8}{3}t\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t\right)}, \qquad t > -\frac{3}{8} \tag{4.4}$$

в осесимметричном случае ($\omega = 1$)

$$n = 2, \qquad s = \frac{1}{2} + \frac{5}{8}t \pm \sqrt{1+t}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}t\right) \qquad t > -1 \tag{4.5}$$

$$n = \frac{1}{3}, \qquad s = \frac{2}{9} \pm \sqrt{1+6t}\left(-\frac{2}{9} + \frac{1}{3}t\right), \qquad t > -\frac{1}{6} \tag{4.6}$$

$$n = \frac{4}{7}, \qquad s = -\frac{28}{9} + 5t \pm \frac{28}{9}\sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}t\right)^3}, \qquad t < \frac{2}{3} \tag{4.7}$$

$$n = \frac{7}{6}, \qquad s = -\frac{343}{729} + \frac{35}{27}t \pm \frac{343}{729}\sqrt{\left(1 - \frac{36}{49}t\right)^3}, \qquad t < \frac{49}{36} \tag{4.8}$$

Таким образом, найдены все решения вида (2.1), проходящие через особую точку A с угловым наклоном (3.1).

Используя другие особые точки уравнения (1.5) и известные наклоны интегральных кривых в этих точках, можно получить остальные решения вида (2.1).

5. Замечательно, что среди полученных выше решений содержатся: течение в плоском сопле Лаваля [5,2] — решение (4.1); течение вдали от произвольного тела в плоском околозвуковом потоке, впервые рассмотренное Ф. И. Франклем [4] — решение (4.2). В самом деле, задание определенного значения n и условие, что в окрестности точки A на плоскости st интегральная кривая имеет разложение вида

$$s = \frac{n}{3n-2}\ t + A_2 t^2 + \ldots$$

однозначно определяют эти решения.

Решение (4.7) удовлетворяет всем условиям, сформулированным в работе [1], и определяет течение вдали от тела в осесимметричном околозвуковом потоке. Таким образом, показатель автомодельности, соответствующий этому течению, равен $^4/_7$.

6. Для того чтобы найти значение потенциала $\Phi(x,y)$ этого течения, воспользуемся уравнением (1.6). Подставляя s из формулы (4.7), получим

$$\ln C\zeta = \int \frac{(5 - 7\sqrt{1 - {}^3/_2 t})\,dt}{{}^{28}/_3 - 14t - {}^{28}/_3\sqrt{(1 - {}^3/_2 t)^3}} \tag{6.1}$$

Обозначим

$$z^2 = 1 - \frac{3}{2}t \tag{6.2}$$

После интегрирования найдем с точностью до масштабной постоянной

$$\zeta = -(1 - z)^{-6/7} z^{-5/7} \tag{6.3}$$

Подставляя (6.3) в первую из формул (1.4), будем иметь

$$f = -{}^1/_9\,(1 - z)^{-6/7} z^{-15/7}\,[2 - 30z^2 + 28z^3] \tag{6.4}$$

Равенства (6.3), (6.4) параметрически определяют функцию $f = f(\zeta)$.

Найдем звуковую линию. По формуле (1.7) вдоль нее $t = 0$. Из (6.2) будет иметь $z = -1$. Тогда по формуле (6.3)

$$\zeta_* = \frac{1}{2^{6/7}}$$

Предельной характеристике соответствует $t = n^2 = {}^{16}/_{49}$, и по соотношению (6.3) найдем

$$\zeta_C = \frac{7}{5^{5/7}\, 12^{2/7}}$$

За предельной характеристикой существует линия, на которой скорость горизонтальна. Для определения этой линии из формулы (1.7) найдем

$$v = 0 \quad \text{при } (3n - 2)\, s - nt = 0$$

Это при $n = {}^4/_7$ дает $s = -2t$. Подставляя найденное значение s в (4.7), найдем, используя (6.2),

$$2z^3 - 3z^2 + 1 = 0$$

Это уравнение имеет корни: $z = 1$, соответствующий отрицательной части оси x и $z = -{}^1/_2$. Последний корень, согласно (6.3), дает

$$\zeta_{v=0} = \frac{2}{3^{2/7}}$$

Точке D ($t = {}^2/_3$) соответствует, согласно (6.2), $z = 0$, что дает $\zeta = \infty$. При этом попадаем на положительную часть оси x. Из (1.7) видно, что v отлично от нуля. Следовательно, эта часть оси x покрыта стоками. Аналогичное обстоятельство имеет место и для плоского случая [6].

Поступила 10 XII 63

Саратовский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Guderley K. and Yoshihara H. An Axial-Symmetric Transonic Flow Pattern. Quart. Appl., Math. 1951, v. VIII, № 4. Русск. пер.: Гудерлей К. и Йосихара Х. Осесимметричные трансзвуковые течения. Сб. «Механика», 1953, вып. 2.
2. Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
3. Рыжов О. С. О течениях в окрестности перехода в соплах Лаваля. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
4. Франкль Ф. И. Исследование по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. Докл. АН СССР, 1947, т. LVIII, № 7.
5. Франкль Ф. И. К теории сопел Лаваля. Изв. АН СССР, сер. матем., 1945, т. 9, № 5.
6. Фалькович С. В., Чернов И. А. К теории автомодельных околозвуковых течений. Изв. высш. учебн. завед., Матем., 1964, № 1.